

有两个线性转折点时的 绝对参量不稳定性¹⁾

周玉美 张淳沅 沈解伍 蔡诗东

(中国科学院物理研究所)

陈 骝

(美国普林斯顿大学等离子体物理实验室)

1982年11月9日收到

提 要

本文讨论了在弱不均匀等离子体里,当两个参量耦合方程的每一个方程都有一个线性转折点,且此两个线性转折点符号相同时,则此参量不稳定性是绝对不稳定性.解析地得到了参量不稳定性的阈值和增长率的表达式,并与数值结果作了比较,符合得很好.

一、引 言

在弱不均匀等离子体里,在弱泵浦场的作用下,讨论参量不稳定性通常是采用 WKB 近似^[1],WKB 近似成立的条件为 $|dk_x/dx| \ll |k_x|^2$ (取不均匀方向为 x 方向, k_x 为波矢在 x 方向的分量).而在有些感兴趣的情况下,此条件并不满足.比如在讨论 Raman 散射时,在被反向散射的电磁波的截止区,即 $\omega_0 = 2\omega_{pe}(x)$ 的区域, WKB 近似就不成立^[2,3],或者在讨论近似 90° 散射时, WKB 近似也不成立^[3].这时就需要找另外的近似法来讨论问题.现在通常所用的办法是,在波的耦合方程^[3]

$$\frac{\partial^2 n_c}{\partial t^2} + [\omega_{pe}^2(x) - v_{te}^2 \nabla^2] n_c = \nabla^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) n_0,$$
$$\left[c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_{pe}^2(x) \right] v_1 = v_c \omega_{pe}^2 \frac{n_c}{n_0} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0)$$

里,由于 $v_{te}^2 \ll c^2$,可以略去低频女儿波中的热速度 v_{te}^2 项,这样使耦合后的 x 的四阶微分方程,简化成二阶微分方程,从而可以用解析的方法得到所讨论的参量不稳定性的阈值和增长率.上式里 $\mathbf{v}_0$ 和 $\mathbf{v}_1$ 分别为在泵浦场和高频女儿波的感应下,电子的振荡速度. n_c 为电子密度涨落, $\mathbf{e}_0$ 和 $\mathbf{e}_1$ 分别为在 $\mathbf{v}_0$ 和 $\mathbf{v}_1$ 方向上的单位矢量.但在有些情况下,例如两个模都是静电模时,热速度项并不能忽略,这时,这种近似就不再可行了.本文试图用另外一种方法来讨论不均匀等离子体里的参量不稳定性问题.我们的处理方法是,对整个方程作傅里叶变换,把 x 空间的四阶微分方程,变成 k 空间的二阶微分方程.用 WKB 近

1) 本工作的主要部份于 1981 年上半年完成.

似法解析解此二阶微分方程,得到参量不稳定性的阈值和增长率.

二、基本方程及其解析解

1. 基本方程

为了使问题的讨论具有一般性,我们不针对某一具体的物理问题来做,而是给出一个模型方程(这里所有的量都是无量纲的)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \epsilon_r^h(\omega - \omega_0) + \kappa_h x \right] \phi_- = E_0^* \phi_s, \quad (1)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + f \epsilon_r^s(\omega) + \kappa_s x \right] \phi_s = f E_0 \phi_-. \quad (2)$$

这里已略去了线性阻尼,所以只取 ϵ_r , 而略去了 ϵ_i . 令

$$\epsilon_r^h(\omega - \omega_0) = (\omega - \omega_0)^2 - 1, \quad \epsilon_r^s(\omega) = \frac{\omega^2}{\beta^2} - 1.$$

角标“h”表示高频模,“s”表示低频模. $\beta^2 \ll 1$, 但若所讨论的两个女儿波的频率同量级时,则 $\beta^2 \sim O(1)$. $f = 1$ 表示两个女儿波的群速度相反, $f = -1$ 表示其群速度相同. 因为我们的兴趣是讨论绝对不稳定性,要求两个女儿波的群速度相反,所以下面我们取 $f = 1$. κ_h, κ_s 与空间不均匀性的尺度以及波矢随空间的变化有关.

将(1),(2)式耦合后,作傅里叶变换,并令 $\lambda = \kappa_s/\kappa_h$, 得到

$$\left[\frac{d^2}{dk^2} + 2g_s(k) \frac{d}{dk} + b_s(k) \right] \hat{\phi}_s(k) = 0,$$

其中

$$g_s(k) = - \frac{i[(\epsilon_r^s + \lambda \epsilon_r^h) - k^2(\lambda + 1)]}{2\lambda \kappa_h},$$

$$b_s(k) = - \frac{1}{\lambda \kappa_h^2} [k^4 - (\epsilon_r^h + \epsilon_r^s)k^2 + \epsilon_r^s \epsilon_r^h - 2i\kappa_h k - |E_0|^2].$$

作变换 $Y_s = \hat{\phi}_s(k) \exp \int_0^k g_s(k') dk'$, 得到

$$\left[\frac{d^2}{dk^2} + Q_s(k, \omega) \right] Y_s(k) = 0, \quad (3)$$

其中

$$Q_s(k, \omega) = \frac{1}{4\lambda^2 \kappa_h^2} \{ [k^2(1 - \lambda) + (\lambda \epsilon_r^h - \epsilon_r^s)]^2 + 4i\lambda(1 - \lambda)\kappa_h k + 4\lambda |E_0|^2 \}. \quad (4)$$

同样也可以得到

$$\left[\frac{d^2}{dk^2} + Q_-(k, \omega) \right] Y_-(k) = 0,$$

其中

$$Q_-(k, \omega) = \frac{1}{4\lambda^2 \kappa_h^2} \{ [k^2(1 - \lambda) + (\lambda \epsilon_r^h - \epsilon_r^s)]^2 - 4i\lambda(1 - \lambda)\kappa_h k + 4\lambda |E_0|^2 \}.$$

比较 Q_- 和 Q_+ 可以看到, $Q_+(-k, \omega) = Q_-(k, \omega)$.

2. 解的渐近行为

假如 $\hat{\phi}_s(k)$ 在 $k \rightarrow \pm\infty$ 处是衰减的, 并具有 $\text{Im } \omega = \omega_i > 0$ 的本征值, 这时所激发的参量不稳定性是绝对不稳定性.

为此, 先看 Y_s 的渐近行为. 由(4)式知, 当 $k \rightarrow \pm\infty$ 时,

$$Q_s(k, \omega) \rightarrow \frac{1}{4\lambda^2\kappa_h^2} [k^4(1-\lambda)^2 + 2k^3(1-\lambda)(\lambda\epsilon_r^h - \epsilon_r^s)]. \quad (5)$$

所以当 $k \rightarrow \pm\infty$ 时的衰减解为

$$Y_s = \begin{cases} \exp\left[-i\frac{(1-\lambda)}{6\lambda\kappa_h}k^3 - \frac{\omega_i(\omega_r + \lambda\beta^2\omega_0)}{\lambda\kappa_h\beta^2}k\right] & \text{当 } k \rightarrow +\infty; \\ \exp\left[i\frac{(1-\lambda)}{6\lambda\kappa_h}k^3 + \frac{\omega_i(\omega_r + \lambda\beta^2\omega_0)}{\lambda\kappa_h\beta^2}k\right] & \text{当 } k \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6)$$

相应的 $\hat{\phi}_s(k)$ 的渐近行为为

$$\hat{\phi}_s(k) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{ik^3}{3\kappa_h} + \frac{2\omega_i\omega_0k}{\kappa_h}\right] & \text{当 } k \rightarrow -\infty \text{ 时}; \\ \exp\left[-\frac{ik^3}{3\lambda\kappa_h} - \frac{2\omega_i\omega_rk}{\lambda\kappa_h\beta^2}\right] & \text{当 } k \rightarrow +\infty \text{ 时}. \end{cases}$$

所以, 只要找到 $\text{Im } \omega > 0$ 的本征值, 则相应于此本征值的解在无穷远处一定是衰减的.

3. 参量不稳定性的阈值和增长率

以下我们试图从(3)式出发, 用解析的办法(在一定的条件下), 得到参量不稳定性的阈值和增长率.

我们对 Q_s 取抛物近似¹⁾ (parabolic approximation), 即令

$$Q_s(k, \omega) \simeq Q_s(k_0, \omega) + \frac{1}{2} Q_s''(k_0, \omega)(k - k_0)^2, \quad (7)$$

由 $Q_s'(k_0, \omega) = 0$ 定出 k_0 . 一般来讲 k_0 为复数. 若令 $\alpha = \lambda\epsilon_r^h - \epsilon_r^s$, 从(4)式可知

$$Q_s(k_0, \omega) = \frac{1}{4\lambda^2\kappa_h^2} \{ [k_0^3(1-\lambda) + \alpha]^2 + 4i\lambda(1-\lambda)\kappa_h k_0 + 4\lambda|E_0|^2 \}, \quad (8)$$

$$Q_s'(k_0, \omega) = \frac{1}{\lambda^2\kappa_h^2} \{ k_0^3(1-\lambda)^2 + k_0(1-\lambda)\alpha + i\lambda(1-\lambda)\kappa_h \}, \quad (9)$$

$$Q_s''(k_0, \omega) = \frac{(1-\lambda)}{\lambda^2\kappa_h^2} [3k_0^2(1-\lambda) + \alpha]. \quad (10)$$

由 $Q_s'(k_0, \omega) = 0$, 可以得到

$$k_0[k_0^2(1-\lambda) + \alpha] = -i\lambda\kappa_h. \quad (11)$$

1) 取了抛物近似后, 使得原来的四个转折点只剩下两个转折点. 但由第三节的数值计算给出的 anti-stokes 线的行为可以看出, 只在此两个转折点之间近似有一条 anti-stokes 线, 所以另外两个转折点对本征值的计算是不重要的.

由此可以定出 k_0 。但这是一个三次方程,我们不想进行一般性的讨论,为了简单并便于讨论,仅考虑一种特殊情况,即假设 $|k_0^2(1-\lambda)| \ll |\alpha|$, 这种情况在物理上相当强泵浦场的情况。这时(11)式可近似为 $k_0\alpha = -i\lambda\kappa_h$, 所以

$$k_0 = -\frac{i\lambda}{\alpha}\kappa_h. \quad (12)$$

在此条件下,(10)式和(8)式分别可近似为

$$Q_s''(k_0, \omega) = \frac{(1-\lambda)\alpha}{\lambda^2\kappa_h^2}, \quad (13)$$

$$Q_s(k_0, \omega) = \frac{1}{4\lambda^2\kappa_h^2} \{ \alpha^2 + 2\alpha k_0^2(1-\lambda) + 4i\lambda(1-\lambda)\kappa_h k_0 + 4\lambda|E_0|^2 \}. \quad (14)$$

将(7)式代入(3)式,得到

$$\left[\frac{d^2}{dk^2} + Q_s(k_0, \omega) + \frac{1}{2} Q_s''(k_0, \omega)(k - k_0)^2 \right] Y_s(k) = 0. \quad (15)$$

令 $t = (k - k_0)/A$, 则(15)式可写成

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + A^2 Q_s(k_0, \omega) + \frac{1}{2} A^4 Q_s''(k_0, \omega)t^2 \right] Y_s = 0. \quad (16)$$

若令 $\frac{1}{2} A^4 Q_s''(k_0, \omega) = -1$, 则

$$A^2 = \pm \sqrt{-\frac{2}{Q_s''(k_0, \omega)}}. \quad (17)$$

在(17)式中,符号的选取是取决于衰减区必须包括 k 实轴。当 $\lambda \leq 1$ 时,应取“+”号;当 $\lambda > 1$ 时,应取“-”号。这时(16)式可写成

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + A^2 Q_s(k_0, \omega) - t^2 \right] Y_s = 0.$$

不难看出,此方程的本征值为 $A^2 Q_s(k_0, \omega) = 2n + 1$, 其中 n 为任意整数。下面我们取 $n = 0$ ¹⁾, 所以

$$Q_s(k_0, \omega) = 1/A^2. \quad (18)$$

令 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, 且 $|\alpha_1| \ll |\alpha_0|$. 若略去二级小量,则(14)式可写成

$$Q_s(k_0, \omega) \simeq \frac{1}{4\lambda^2\kappa_h^2} [\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 + 2\alpha_0 k_0^2(1-\lambda) + 4i\lambda(1-\lambda)\kappa_h k_0 + 4\lambda|E_0|^2]. \quad (19)$$

若令 $\alpha_0^2 + 4\lambda|E_0|^2 = 0$, 则 $\alpha_0 = \pm 2i\sqrt{\lambda}|E_0|$. 从下面对增长率的计算可知,为了得到增长率,上式的右端要取负号,即

$$\alpha_0 = -2i\sqrt{\lambda}|E_0|. \quad (20)$$

将(19),(17),(12),(13)以及(20)式代入(18)式可以得到

$$\alpha_1 = \mp e^{-i\pi/4} \frac{\lambda^{3/4}(1-\lambda)^{1/2}|\kappa_h|}{|E_0|^{1/2}} + \frac{\lambda(1-\lambda)\kappa_h^2}{4|E_0|^2}. \quad (21)$$

1) 一般来讲, $n = 0$ 相应于最不稳定的模。

当 $\lambda < 1$ 时, 上式右端第一项取“ $-$ ”号; 而 $\lambda > 1$ 时, 取“ $+$ ”号. 所以

$$\begin{aligned} e_r^s - \lambda e_r^h &= -\alpha = -(\alpha_0 + \alpha_1) \\ &= 2i\sqrt{\lambda}|E_0|\left[1 \mp e^{i\pi/4} \frac{\lambda^{1/4}(1-\lambda)^{1/2}|\kappa_h|}{2|E_0|^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\pi/2} \frac{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)\kappa_h^2}{8|E_0|^2} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

令 $\omega = \omega_r + i\omega_i$, 并 $\omega_i \ll \omega_r$, 代入(22)式, 则可解出

$$\omega_i = -\frac{\sqrt{\lambda}|E_0|}{\left[\frac{\omega_r}{\beta^2} + \lambda(\omega_0 - \omega_r)\right]} \left[1 - \frac{\lambda^{1/4}|1-\lambda|^{1/2}|\kappa_h|}{2\sqrt{2}|E_0|^{3/2}}\right], \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_r &= \beta[\sqrt{a + \lambda^2\beta^2\omega_0^2} - \lambda\beta\omega_0]/(1 - \beta^2\lambda), \\ a &= (1 - \beta^2\lambda) \left[1 + \lambda(\omega_0^2 - 1) \pm \frac{\lambda^{3/4}|1-\lambda|^{1/2}|\kappa_h|}{\sqrt{2}|E_0|^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda(1-\lambda)\kappa_h^2}{4|E_0|^2} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

当 $\lambda < 1$ 时, 取“ $+$ ”号; 当 $\lambda > 1$ 时, 取“ $-$ ”号. 从(23)式可以看到: 若 $|\kappa_h|$ 增加, 即等离子体的不均匀性增加, 增长率下降. 若泵浦波的强度 $|E_0|$ 增加, 则增长率增加.

有趣的是, 从(23)式, 如令 $\omega_i = 0$, 可得到阈值

$$|E_0|_c = \frac{\lambda^{1/6}|1-\lambda|^{1/3}|\kappa_h|^{2/3}}{2}. \quad (25)$$

但是, 从(23)式得到的阈值条件(25)式不自洽于我们一开始所做的强泵浦波的假设

$$|k_0^2(1-\lambda)| \ll |\alpha|.$$

因为此假设要求 $|E_0|_c > \lambda^{1/6}|1-\lambda|^{1/3}|\kappa_h|^{2/3}/2$. 然而, 从第三节的数值计算可知, (25)式和数值计算的结果相当符合. 所以, 尽管不自洽, (25)式对计算阈值仍有一定的参考意义.

4. 转折点

在抛物近似下, 不难得到(3)式的转折点. 由

$$Q_s(k_t, \omega) = Q_s(k_0, \omega) + \frac{1}{2} Q_s''(k_0, \omega)(k_t - k_0)^2 = 0,$$

可得到转折点 k_t 为

$$k_t = k_0 \pm i \sqrt{\frac{2Q(k_0, \omega)}{Q''(k_0, \omega)}}. \quad (26)$$

对我们所考虑的强泵浦场的特殊情况, 利用(12)–(14)式以及(22)式, 可以得到

$$k_t = \frac{\sqrt{\lambda}\kappa_h}{2|E_0|} \left[1 \pm \frac{2|E_0|^{3/4}e^{-i\pi/8}}{\lambda^{1/8}|\kappa_h|^{1/2}(1-\lambda)^{1/4}}\right]. \quad (27)$$

三、数值计算的方法和结果

由于上节所用的抛物近似只在强泵浦场下才成立,为了对方程(3)的性质有更清楚的了解,我们还用文献[4]的方法对(3)式在更广泛的参数空间作了数值计算. 计算方法简要概述如下.

若要解的本征方程为

$$\phi'' + Q(\omega, x)\phi = 0,$$

令 $\phi = \phi_0 + \phi_1$, $\omega = \omega_0 + \omega_1$, 并令

$$\phi_0'' + Q(\omega_0, x)\phi_0 = 0. \quad (28)$$

这样,一级方程为

$$\phi_1'' + Q(\omega_0, x)\phi_1 + \frac{\partial Q}{\partial \omega} \omega_1 \phi_0 = 0. \quad (29)$$

(29)式乘 ϕ_0 , 并从 $-\infty$ 到 ∞ 积分, 利用解 ϕ 在 $\pm\infty$ 处衰减的条件可得

$$\omega_1 = \frac{\phi_0^+(0)[\phi_0^-(0) - \phi_0^{+'}(0)]}{\int_{-\infty}^0 \frac{\partial Q}{\partial \omega} \phi_0^- \phi_0^- dx + \int_0^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial \omega} \phi_0^+ \phi_0^+ dx}. \quad (30)$$

由于我们的 $Q(\omega, x)$ 不是 x 的对称函数, 所以一般来讲 ϕ 也不是 x 的对称函数. 这里 ϕ_0^- 代表 $x < 0$ 的零级解, ϕ_0^+ 代表 $x > 0$ 的零级解. 函数 ϕ^+ , ϕ^- 不仅要满足无穷远处衰减的条件, 而且要满足在零点的联接条件: $\phi^+(0) = \phi^-(0)$, $\phi^{+'}(0) = \phi^{-'}(0)$. 任给一个初值 $\omega_0 = \omega_0^{(1)}$ 用数值方法由(28)式解出 ϕ_0^+ , ϕ_0^- , 并让其在 $x = 0$ 处相等. 由(30)式求出 $\omega_1 = \omega_1^{(1)}$, 令新的 $\omega_0 = \omega_0^{(1)} + \omega_1^{(1)}$, 代回(28)式. 如此迭代下去, 直到收敛为止.

由于要求解 $\phi(x)$ 在 $\pm\infty$ 处衰减, 而实际计算时总是要在一个有限的空间来做. 从第二节 Y_s 的渐近行为可知, 当 $\omega_i > 0$ 时, Y_s 在 $\pm\infty$ 处确实衰减, 但 Y_s 在 k 为实数的轴上衰减很慢, 这样我们的计算边界要选得相当远. 为便于计算, 将 k 延拓到整个复平面, 在 k 的复平面上进行计算. 为确定计算区域, 首先需给出 anti-stokes 线的渐近行为, 以决定哪些区域是 dominat 区, 哪些区域是 subdominat 区. 令 $k = |k|e^{i\theta_h}$, 这里 θ_h 为 anti-stokes 线和实轴的夹角. 按照 anti-stokes 线的定义 $\text{Im} \int_{k_t}^k Q_s^{1/2} dk = 0$, 并把 $Q_s(k, \omega)$ 的渐近表达式(5)式代入, 可以得到其渐近行为为

$$\sin 3\theta_h \simeq \frac{6\omega_i(\omega_r + \lambda\beta^2\omega_0)}{\beta^2(1 - \lambda)|k|^2}. \quad (31)$$

当 $\omega_i > 0$, $\lambda < 1$ 时, $\theta_h \rightarrow 0^+$, $\pm\pi/3$, $\pm 2\pi/3$, π^+ . 因此实轴和 $-\pi/3$ 之间的区域以及 $2\pi/3$ 和 π^+ 之间的区域为 subdominat 区. 所以我们将 k 轴顺时针转一个小于 $\pi/3$ 的角度, 比如将 k 轴转到 $-\pi/4$ 处, 这样可使数值计算的边界大大缩短, 并确保所选的边界点一定位于 subdominat 区, 从而得到真正的衰减解. 当 $\omega_i = 0$ 时, 在无穷远处实轴是一条 anti-stokes 线, 即解沿实轴在无穷远处是振荡的. 当 $\lambda > 1$, $\omega_i > 0$ 时, $\theta_h \rightarrow 0^-$, $\pm\pi/3$, $\pm 2\pi/3$, π^- . 这时需将 k 轴转到 $\pi/4$ 处来做.

数值计算结果见图 1—3. 本文计算所用的参数为 $\beta = 0.1$, $\omega_0 = 1.15$.

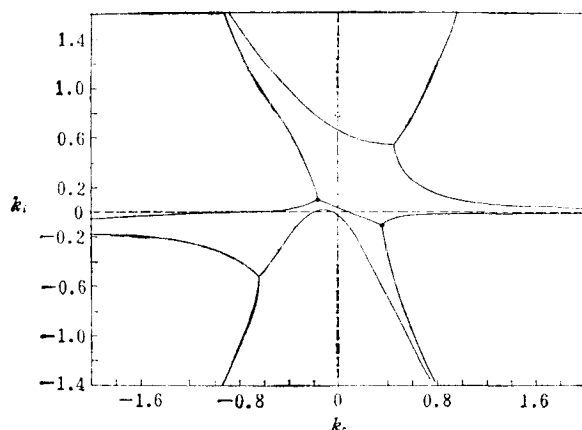


图 1 $\lambda = 0.5$; $|E_0|^2 = 0.12$; $\kappa_h = 0.03$

图 1 为在强泵浦场下, 方程(3)转折点的数值计算结果及 anti-stokes 线数值计算结果的示意图. 从图中可清楚地看到, 方程(3)确实有四个转折点, 并在离原点较近的两个转折点之间有一条 anti-stokes 线. 而此两个转折点正是抛物近似下保留的两个转折点 (图中的圆点 ● 为由 (27) 式得到的转折点的位置), 也正是求本征值时所要用的两个转折点. 另外两个转折点在抛物近似下被扔掉了, 但并不影响本征值的计算.

图 2 给出了对某一固定的 κ_h ($= 0.03$), 不同的 λ 时, 增长率 ω_i 随 $|E_0|$ 的变化图. 为了和解析结果(23)式进行比较, 我们把从 (23) 式得到的结果也画在同一图上, 用虚线表示, 实线为数值解. 我们发现二者符合得相当好¹⁾.

图 3 给出了对某一固定的 λ ($= 0.5$), 阈值 $|E_0|$ 随 κ_h 的变化图. 图 3 取的是对数坐标. 实线为数值计算结果, 虚线为 (25) 式得到的结果. 二者在绝大部分区域符合得相当好.

由于在转折点 k_1-k_2 之间明显存在一条 anti-stokes 线, 我们又用 WKB 法数值计算了本征值方程

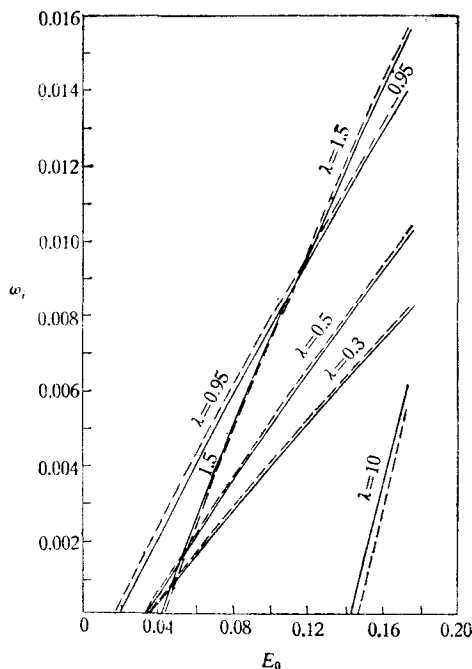


图 2

1) $\lambda = 10$ 时, 解析解和数值解的结果有些差别, 原因是所取的 $|E_0|$ 过小于强场近似的要求. 强场近似要求 $|E_0| \geq 0.63$.

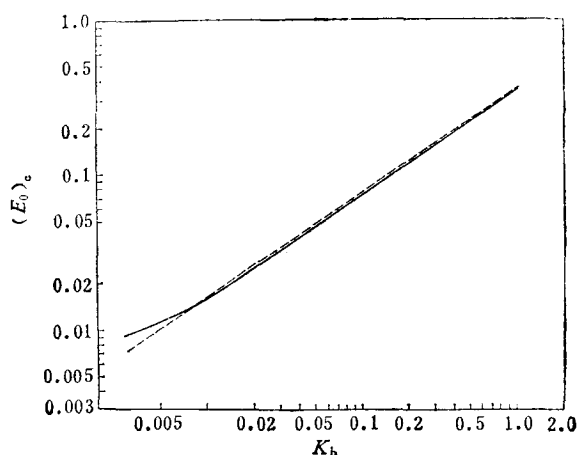


图 3

$$\int_{k_1}^{k_2} \sqrt{Q_s} dk = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

取 $n = 0$. 得到的本征值和本节所用的计算方法的数值解以及第二节的解析解符合得都很好. 从而也说明了我们的数值解确实是最不稳定的解.

四、应用举例

我们用本文的方法处理了文献[3]中有关在 $1/4$ 临界密度处的 Raman 散射问题. 从文献[3]的(49)和(51)式出发

$$\frac{\partial^2 n_c}{\partial t^2} + \left[\omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{x}{L} \right) - \delta v_e^2 \nabla^2 \right] n_c = \nabla^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) n_0, \quad (32)$$

$$\left[c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{x}{L} \right) \right] \mathbf{v}_1 = v_0 \omega_{pe}^2 \frac{n_c}{n_0} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_0). \quad (33)$$

在(32)式里我们比文献[3]的(49)式多引进一个人为因子 δ , 其目的是为了比较我们的作法和文献[3]的作法的异同. 当 $\delta = 0$, 即为文献[3]所处理的情况, $\delta = 1$, 即为我们所处理的情况.

对(32),(33)式进行无量纲化后, 并令 $b = L^2 \omega_{pe}^2 / v_e^2$, $a = L^2 \omega_{pe}^2 / c^2$, $E_0^2 = ab \tilde{k}^2 v_0^2 / \omega_{pe}^2$, $\kappa_h = -a$, $\kappa_s = -b$, $\lambda = b/a = c^2 / v_e^2 \gg 1$, $\epsilon_r^s = b(\tilde{\omega}^2 - 1)$, $\epsilon_r^h = a[(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0)^2 - 1]$. 其中 $\tilde{\omega} = \omega / \omega_{pe}$, $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 / \omega_{pe}$, $\tilde{k}$ 为低频模的波矢. 这样从(32)和(33)式就可得到和我们的模型方程同样形式的方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \epsilon_r^h + \kappa_h x \right) \left(\delta \frac{d^2}{dx^2} + \epsilon_r^s + \kappa_s x \right) n_c = E_0^2 n_c.$$

作傅里叶变换, 变到 k 空间, 最后得到本征方程为

$$\left[\frac{d^2}{dk^2} + Q_s(k, \omega) \right] Y_s = 0,$$

其中

$$Q_s = \frac{1}{4\lambda^2\kappa_h^2} \{ [k^2(\delta - \lambda) + (\lambda e_r^h - e_i^s)]^2 + 4i\lambda(\delta - \lambda)\kappa_h k + 4\lambda|E_0|^2 \}. \quad (34)$$

比较(34)式和(4)式可知, 若一开始就略去低频模的 d^2/dx^2 项 (即令 $\delta = 0$, 正如文献[3]中所做), 相当于令(4)式中的 $1 - \lambda = -\lambda$. 当 $|\lambda| \gg 1$ 时, 两者是近似等价的. 但当 $\lambda \sim O(1)$ 时, 两者就不等价了. 有了(34)式, 就可以套用第二节的方法和结果. 从(22)式出发, 将 e_r^s 和 e_i^h 的表示式代入, 并令 $\hat{\omega} = \hat{\omega}_r + i\hat{\omega}_i$, 可得

$$\hat{\omega}_i = \frac{\sqrt{\lambda} E_0}{b\hat{\omega}_0} \left[1 - \frac{\lambda^{1/4}(\lambda - \delta)^{1/2}|\kappa_h|}{2\sqrt{2} E_0^{3/2}} \right], \quad (35)$$

$$\hat{\omega}_r = \frac{1}{2b\hat{\omega}_0} \left[b\hat{\omega}_0^2 - \frac{\lambda^{3/4}(\lambda - \delta)^{1/2}|\kappa_h|}{\sqrt{2}|E_0|^{1/2}} \right]. \quad (36)$$

在 $\lambda \gg 1$ 的条件下, 将(35), (36)式换回到有量纲的量, 并利用 $1/4$ 临界密度处的 Raman 散射的条件,

$$\omega_0 = 2\omega_{pe}, \quad \tilde{k} = \tilde{k}_0 = \frac{\sqrt{3}}{c} \omega_{pe},$$

可以得到

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right) \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2} \times 3^{1/4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^{3/2} k_0 L} \right],$$

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1}{2} - \frac{3^{1/4}}{8\sqrt{2} \left(\frac{v_0}{c} \right)^{1/2} k_0 L}.$$

这和文献[3]的(58)式相同.

五、讨 论

在不均匀等离子体里, 由于相匹配条件仅在局部成立, 所以参量共振相互作用仅在局部发生, 一旦波流出了这个区域, 波就不再增长, 因此一般来讲, 在不均匀等离子体里, 参量不稳定性是对流不稳定性, 除非波数失谐 η' 是可以忽略地小或泵浦波仅在有限范围内存在. 这里 $\eta' = \frac{d}{dx} [k_{0x} - k_{1x} - k_{2x}]$. k_0 为泵浦波的波矢, k_1, k_2 为两个女儿波的波矢.

在本文讨论的模型方程(1), (2)里, 为什么会出现绝对不稳定性呢? 我们认为这是由于两个参量耦合方程的每一个方程都有一个转折点. 比如(1)式的转折点 $x_1 = -e_r^h/\kappa_h$, (2)式的转折点 $x_2 = -fe_i^s/\kappa_s = -fe_i^s/\lambda\kappa_h$. 当 $f > 1$ 时, 在我们所取的参数下, x_1 与 x_2 同号, 即两个转折点在相匹配条件严格成立的 $x = 0$ 的点的同一边. 转折点存在与否, 对不稳定的性质影响很大. 因为通常所说的三波相互作用, 是指在相互作用区里三个波同时存在, 泵浦波是均匀分布在全空间, 处处都有, 但由于不均匀性存在, 相互作用区是有限的, 因此只有在相互作用区域内, 两个女儿波才会被激发并慢慢长大 ($\sim e''$), 但波一旦流出了相互作用区, 相匹配条件既不满足, 三波就不互相作用, 两个女儿波也就不再长大了, 若波没有转折点, 就不会得到绝对不稳定性, 而只能得到对流不稳定性. 但若有转折

点,波可以反射回来重新进入相互作用区,由于泵浦波永远存在,此长大的女儿波和泵浦波作用又可激发另一个女儿波,如此往返下去,使波不断长大,从而得到绝对不稳定性.需要指出的是,两个波的转折点在相匹配条件严格成立的 $x = 0$ 的点的同一边很重要,若两个波的转折点在 $x = 0$ 的两边,即两个转折点的符号相反,则两个女儿波各被反射一次后,就再也碰不到转折点,因此就不再被反射回相互作用区而向无穷远流去.所以波就不能不断长大,这时也得不到绝对不稳定性.

本文的结论是,在弱不均匀等离子体里,当两个参量耦合方程的每一个方程都有一个线性转折点,且此两线性转折点符号相同时,则此参量不稳定性是绝对不稳定性.

参 考 文 献

- [1] M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, **29**(1972), 565.
- [2] J. F. Drake and Y. C. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 1197
- [3] C. S. Liu, M. N. Rosenbluth and R. B. White, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 1211.
- [4] T. Watanabe, T. Tange, C. Ueno, H. Irie, H. Hojo and K. Nisihkawa, "New Numerical Method for Solving Eigenvalue Problems Described by Coupled Second-Order Differential Equations", Institute for Fusion Theory Hiroshima University Research Report HIFT-23, Feb. (1980).

ABSOLUTE PARAMETRIC INSTABILITIES WITH TWO LINEAR TURNING POINTS

ZHOU YU-MEI ZHANG CHUN-YUAN SHEN JIE-WU CAI SHI-DONG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

CHEN LIU

(Plasma Physics Laboratory, Princeton University, U.S.A.)

ABSTRACT

We show that, in weakly inhomogeneous plasmas, there exist absolute parametric instabilities if each of the two decay waves has a linear turning point and the two turning points are of the same sign. Corresponding expressions for the threshold condition and growth rate are also obtained in analytical form, they agree very well with numerical results.