

超导弱连接的电压磁场关系 (I)

张 裕 恒 王 军¹⁾

(中国科学技术大学物理系)

1983 年 7 月 11 日收到

提 要

本文理论计算了恒流源的 RSJ 模型下超导弱连接的量子衍射及其相应双结 SQUID 的量子干涉. 对双结 SQUID 给出了电压直流分量随磁场等幅振荡的解析关系.

一、引 言

在超导弱连接两端加电压时, 结中同时有超流电流和正常电流存在, 因此需要考虑结的正常电阻. 又由于电压和电流随时间变化, 则还要考虑超导结的电容和电感. 故在一般情况下, 对超导弱连接, 除了把它考虑成一个具有理想性质的结外, 还要考虑与其并联的电阻和电容以及串联的电感. 在此基础上, 用等效电路方法处理.

对于超导微桥、点接触和小尺寸($\sim \mu\text{m}^2$)的隧道结, 它们的电容很小, 可以忽略不计, 如果再不计其电感, 则等效电路中只有理想结与电阻并联, 这就是电阻分路结模型, 简称 RSJ 模型.

超导弱连接的阻抗比较低, 如果把结以外的其余部分电路视为电源模型, 则由于实际电源的内阻抗比弱连接高得多, 因而与恒流源相近. 实验上人们往往采用恒流源.

姚希贤^[1,2] 给出了 RSJ 模型在恒流外源下同时有辐射场照射超导结情况下的解析解.

本文理论计算了恒流源 RSJ 模型下超导弱连接的量子衍射及其相应双结 SQUID 的量子干涉. 对于双结 SQUID 给出了电压直流分量随磁场等幅振荡的解析关系.

二、电压随磁场的等幅振荡

1. 超导微桥、点接触及小尺寸隧道结

设通过理想结的超流电流为 $I_s = I_c \sin \varphi$, 流过与之并联的电阻的正常电流等于 V/R . 设外电源提供一个与时间有关的电流 $I(t)$, 则

$$I(t) = \frac{V}{R} + I_c \sin \varphi. \quad (1)$$

1) 中国科学技术大学物理系 82 级研究生.

上式中 V 可以换成 $\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}$, 于是(1)式变成 φ 的微分方程

$$I(t) = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi. \quad (2)$$

存在外加磁场时, 通过理想结的超流电流临界值将受到外磁场的调制. 如果理想结是微桥, 设磁场 H 垂直于桥长 w 的方向, 桥为窄结, 桥宽为 d , 桥长方向磁场穿透的宽度与桥长之和为 Λ , 即 $\Lambda = 2\lambda + w$, λ 为磁场对超导体的穿透深度. 利用磁通量子

$$\phi_0 = 2.07 \times 10^{-7} \text{Gs} \cdot \text{cm}^2,$$

定义 $x = \pi\Phi_J/\phi_0 = \pi\Lambda dH/\phi_0$, 则理想结的超流电流临界值为

$$I_c(H) = I_c \frac{\sin x}{x} = I_c \sin ux. \quad (3)$$

(2)式变成

$$I(t) = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c(H) \sin \varphi. \quad (4)$$

为了方便起见, 引入无量纲参量

$$\begin{aligned} \text{时间} \quad \tau &= \omega_c t, & \text{其中} \quad \omega_c &= \frac{2eR I_c(H)}{\hbar}, \\ \text{电流} \quad i &= \frac{I}{I_c(H)}, & \text{电压} \quad v &= \frac{V}{R I_c(H)} = \frac{d\varphi}{d\tau}. \end{aligned} \quad (5)$$

利用(5)式, 方程(4)化为

$$i(\tau) = \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi. \quad (6)$$

考虑常电流外源驱动下, $i(\tau) = i_0$. 当 $i_0 \leq 1$ 时, 方程(6)有一个明显解

$$i_0 = \sin \varphi, \quad (7)$$

其中 φ 等于由 i_0 决定的一个常数, 此时

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = v = 0. \quad (8)$$

以上两式表明, 在 $i_0 \leq 1$ 的情况下, 流过实际结的仅仅是超流电流.

现在研究 $i_0 > 1$ 时方程(6)的解, 令 $\theta = \varphi - \pi/2$ 代入(6)式, 分离变量, 得到

$$d\tau = \frac{d\theta}{i_0 - \cos \theta}. \quad (9)$$

积分(9)式得

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\bar{v}}{i_0 + 1} \text{tg} \frac{\bar{v}}{2} (\tau - \tau_0), \quad (10)$$

$$\bar{v} = \sqrt{i_0^2 - 1}, \quad (11)$$

式中 τ_0 为积分常数, 则超流电流

$$i_s = \cos \theta = \frac{i_0 \cos \bar{v} (\tau - \tau_0) + 1}{\cos \bar{v} (\tau - \tau_0) + i_0} \quad (12)$$

结上出现电压

$$v = \frac{d\theta}{d\tau} = i_0 - \cos \theta = \frac{\bar{v}^2}{\cos \bar{v}(\tau - \tau_0) + i_0}. \quad (13)$$

利用附录中的 Fourier 展开, 得到

$$i_s = i_0 - \bar{v} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\bar{v}(-1)^k}{(i_0 + \bar{v})^k} \cos k\bar{v}(\tau - \tau_0), \quad (14)$$

$$v = \bar{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\bar{v}(-1)^k}{(i_0 + \bar{v})^k} \cos k\bar{v}(\tau - \tau_0). \quad (15)$$

由于 v 对时间的平均值就是结上的直流电压, 则

$$\left\langle \frac{d\varphi}{d\tau} \right\rangle = \bar{v} = \sqrt{i_0^2 - 1}. \quad (16)$$

利用(5)式, 得到结上测量到的电压数值

$$\begin{aligned} \bar{V}(H) &= I_c(H)R \left\langle \frac{d\varphi}{d\tau} \right\rangle \\ &= R \sqrt{I_0^2 - I_c^2 \sin^2 x}. \end{aligned} \quad (17)$$

无外磁场时, $H = 0$, $x = 0$, $\sin ux = 1$, (17) 式变为

$$\bar{V}(0) = R \sqrt{I_0^2 - I_c^2}. \quad (18)$$

(18)式表示的是双曲线形式的伏安曲线, $\bar{V}$ 在 I_0 大时以 $\bar{V} = I_0 R$ 为渐近线, 见图 1.

磁场的作用改变了双曲线半实轴的值. 由 (17) 和 (18) 式, 可以得到施加外磁场时伏安曲线的改变为

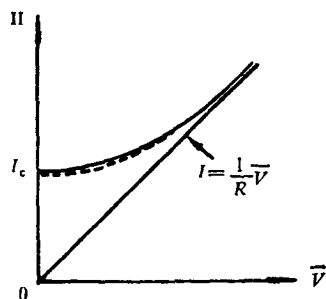


图 1 桥结在恒流源下的 I - $\bar{V}$ 曲线

——为零磁场;

-----为外加磁场后的修正

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}(H) &= \bar{V}(H) - \bar{V}(0) \\ &= RI_c^2 (1 - \sin^2 x) / \left(\sqrt{I_0^2 - I_c^2 \sin^2 x} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{I_0^2 - I_c^2} \right) \\ &\doteq RI_c \frac{I_c}{2\sqrt{I_0^2 - I_c^2}} (1 - \sin^2 x), \end{aligned} \quad (19)$$

变化幅度的相对值为

$$\frac{\Delta \bar{V}(H)}{\bar{V}(0)} = \frac{I_c^2}{I_0^2 - I_c^2} (1 - \sin^2 x). \quad (20)$$

对于一个典型的桥,

$$\Lambda \approx w = 2 \times 10^{-3} \text{cm}, \quad d = 2 \times 10^{-4} \text{cm}, \quad H_{\max} = 10 \text{Gs},$$

代入(20)式得到

$$\left(\frac{\Delta \bar{V}(H)}{\bar{V}(0)} \right)_{\max} = \frac{I_c^2}{I_0^2 - I_c^2} \times 6.6 \times 10^{-4}. \quad (21)$$

由(21)式可见, 只要 I_0 不是特别接近 I_c (这对通常实验是成立的), 伏安曲线的相对变化最大值也不过千分之一. 故外磁场影响甚小, 可以认为单结的伏安曲线没有改变.

2. 微桥双结 SQUID

设两个微桥相同, 外源所加的恒定电流为 $2I_0$, 则通过两个微桥的 Josephson 电流分别

为

$$I_{s1} = I_c \sin \varphi_1, \quad (22a)$$

$$I_{s2} = I_c \sin \varphi_2. \quad (22b)$$

由它们组成双结 SQUID, 则 φ_1 和 φ_2 之间关系为

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} + 2\pi l + lL, \quad (23)$$

其中 $\Phi_c = HS$ 为双结与超导连线构成的回路中的磁通量, l 为整数, L 为环路电感, I 为流过 SQUID 的电流. 设 $L = 0$, 则 (22b) 式为

$$I_{s2} = I_c \sin \left(\varphi_1 + 2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right). \quad (22c)$$

由(4)式, 对于 φ_1 和 φ_2 分别为

$$I_1(t) = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_c(H) \sin \varphi_1, \quad (24a)$$

$$I_2(t) = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_2}{dt} + I_c(H) \sin \varphi_2. \quad (24b)$$

因为 H 为稳恒场, 故由(23)式知

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (25)$$

因双结 SQUID 上施加的是强度为 $2I_0$ 的恒流, 故 $2I_0 = I_1(t) + I_2(t)$. 将 (24a) 与 (24b) 式相加则有

$$2I_0 = 2 \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_c(H) \left[\sin \varphi_1 + \sin \left(\varphi_1 + 2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) \right]. \quad (26)$$

利用和差化积, 有

$$I_0 = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_c \sin u \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \cos \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \sin \left(\varphi_1 + \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right). \quad (27)$$

定义双结 SQUID 的临界电流为

$$I_{cd}(H) = I_c \sin u \left(\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) \cos \left(\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right), \quad (28)$$

位相差为

$$\varphi_d = \varphi_1 + \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} = \varphi_2 - \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0}, \quad (29)$$

则新的约化量为

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_{cd} t, & \omega_{cd} &= \frac{2eR I_{cd}(H)}{\hbar}, \\ i_{od} &= \frac{I_0}{I_{cd}(H)}, & v_d &= \frac{V}{R I_{cd}(H)} = \frac{d\varphi_d}{d\tau}. \end{aligned} \quad (30)$$

由(28), (29)和(30)式, (27)式变成

$$i_{od} = \frac{d\varphi_d}{d\tau} + \sin \varphi_d. \quad (31)$$

利用本节第一部分的结果,

$$\left\langle \frac{d\varphi_d}{d\tau} \right\rangle = \bar{v}_d = \sqrt{I_{0d}^2 - 1}, \quad (32)$$

所以

$$\bar{V}_d(H) = R \sqrt{I_0^2 - I_c^2 \sin^2 \pi \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \cos^2 \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}}. \quad (33)$$

在 Φ_c/Φ_0 等于整数的位置上, (33) 式变为

$$\bar{V}_d(H) = R \sqrt{I_0^2 - I_c^2 \sin^2 \pi x} = \frac{R}{2} \sqrt{(2I_0)^2 - (2I_c)^2 \sin^2 \pi x}. \quad (33a)$$

与(17)式比较, 此时双桥结 SQUID 等价于一个单结情况, 其电阻等价于两个结电阻简单的并联; 临界电流为两个单结的临界电流直接相加; 外电流等于流过两个结的外流之和.

从(33)式可得

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}_d &= \bar{V}_d(H) - \bar{V}_d(0) \\ &= R \frac{I_c^2}{\sqrt{I_0^2 - I_c^2} + \sqrt{I_0^2 - I_c^2 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}}} \left(1 - \sin^2 \pi x \cos^2 \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

对于微桥双结 SQUID, $\sin \pi x \doteq 1$, 所以(34)式可写为

$$\Delta \bar{V}_d = R \frac{I_c^2}{\sqrt{I_0^2 - I_c^2} + \sqrt{I_0^2 - I_c^2 \cos^2 \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}}} \sin^2 \pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}. \quad (34a)$$

从(34a)式看到, 当 Φ_c/Φ_0 从自然数 n 变到 $(2n+1)/2$ 时, $\Delta \bar{V}_d$ 的振幅变化为

$$RI_c^2 / \left(I_0 + \sqrt{I_0^2 - I_c^2} \right),$$

因此(34a)式给出在恒流源下, 电压的直流分量随磁场以 Φ_0 为周期的等幅振荡, 见图 2 (由于其图形以 $\Delta \bar{V}_d$ 轴对称, 故只画了 $\Phi_c > 0$ 的部分).

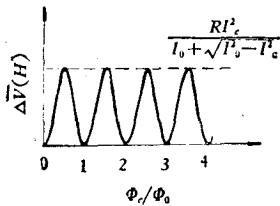


图 2 双桥结 SQUID 在恒流源驱动下, 电压直流分量随磁场的等幅振荡

三、讨 论

1. 关于恒压源与恒流源

对于电压源模型, 当外加的电流强度超过结的临界电流 I_c 时, 超流电流就变成随时间交变的形式, 其时间平均值为零. 而在恒流源模型时则完全不同, 当 $I_0 > I_c$, 结中电流不仅存在着由以 I_0 决定的频率交变的振荡部分, 而且存在着超流直流分量, 其数值由实验条件和结特性来决定, 换句话说, 电流源模型在电阻-超导态时的结, 仍然具有无阻负载直流电流的能力, 而电压源模型的结则不具备此能力.

2. 对于双结 SQUID, 一般说自感不能忽略, 关于 $L \neq 0$ 的情况我们将另文讨论.

四、结 论

利用恒流源的 RSJ 模型, 我们理论上给出超导弱连接的电压直流分量随外磁场变化

的量子衍射关系。由于点接触和超导桥上施加的外场最大值为 10Gs 左右,它引起量子衍射电压变化的相对值不过千分之一,因此实验上观测不到。

对于微桥双结 SQUID, 本文理论给出的电压磁场解析式表明: 其周期为 ϕ_0 ; 振幅是等幅的, 振幅的大小由结的性质和实验条件决定。

本工作得到姚希贤副教授的帮助, 在此表示感谢。

附 录

(14)式和(15)式的 Fourier 展开

(15)式的 Fourier 展开是姚希贤副教授做的。

根据(13)式, 进行 Fourier 展开的是函数

$$f(\theta) = \frac{\bar{v}^2}{i_0 + \cos\theta}, \quad (\text{A} \cdot 1)$$

其中 $i_0 > 1$, $\bar{v} = \sqrt{i_0^2 - 1}$, $\theta = \bar{v}(\tau - \tau_0)$, $f(\theta)$ 是周期为 2π 的函数, 而且是偶函数, 所以根据 Fourier 级数展开式, 有

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta, \quad (\text{A} \cdot 2)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta \quad k \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

积分可以利用留数定理得出, 首先积分(A·3)的第一式, 有

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{v}^2}{i_0 + \cos\theta} d\theta. \quad (\text{A} \cdot 4)$$

对上述积分作如下变换, 令

$$z = e^{i\theta}, \quad (\text{A} \cdot 5)$$

则(A·4)式化为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\bar{v}^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{i_0 + \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} \\ &= \frac{\bar{v}^2}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{-2jdz}{z^2 + 2i_0z + 1}. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 6)$$

(A·6) 式积分是在复平面上进行的, 积分回路是 $|z| = 1$ 的单位圆。注意到

$$z^2 + 2i_0z + 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad (\text{A} \cdot 7)$$

其中

$$z_1 = -i_0 + \sqrt{i_0^2 - 1}, \quad z_2 = -i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1}, \quad (\text{A} \cdot 8)$$

则 z_1 在单位圆内, z_2 在单位圆外。因此 (A·6) 式中的被积函数有两个极点, 但只有 $z = z_1$ 的极点在单位圆内, 并且是一阶极点。根据留数定理,

$$a_0 = 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{-2j\bar{v}^2}{2\pi(z^2 + 2i_0z + 1)} = \frac{2\bar{v}^2}{z_1 - z_2} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

或者

$$a_0 = \bar{v}^2 = \sqrt{i_0^2 - 1}. \quad (\text{A} \cdot 10)$$

下面计算(A·3)式中 $k \neq 0$ 的积分。由于

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\bar{v}^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\theta}{i_0 + \cos\theta} d\theta \\ &= \frac{\bar{v}^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\theta + j \sin\theta}{i_0 + \cos\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 11)$$

这里加上的一项为奇数,因此积分后的值为零.在对积分变数作(A·5)式的交换后,(A·11)式变为

$$a_k = \frac{\bar{v}^2}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{-2jz^k}{z^2 + 2i_0z + 1} dz. \quad (\text{A} \cdot 12)$$

根据留数定理

$$\begin{aligned} a_k &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{-2j\bar{v}^2 z^k}{\pi(z^2 + 2i_0z + 1)} \\ &= \frac{4\bar{v}^2 z_1^k}{z_1 - z_2} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

或

$$a_k = 2\bar{v}(-1)^k (i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1})^k. \quad (\text{A} \cdot 14)$$

注意到

$$i_0 - \sqrt{i_0^2 - 1} = \frac{1}{i_0 + \sqrt{i_0^2 - 1}}, \quad (\text{A} \cdot 15)$$

于是

$$a_k = 2\bar{v}(-1)^k / (i_0 + \bar{v})^k. \quad (\text{A} \cdot 16)$$

把(A·10)和(A·16)式代入(A·2)式,求得

$$\frac{\bar{v}^2}{i_0 + \cos\theta} = \bar{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\bar{v}(-1)^k}{(i_0 + \bar{v})^k} \cos k\theta. \quad (\text{A} \cdot 17)$$

对于(14)式,可直接由(6)式

$$\sin\varphi = i_0 - \frac{d\varphi}{d\tau} = i_0 - \bar{v}, \quad (\text{A} \cdot 18)$$

将(15)式代入上式

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{i_0 \cos\theta + 1}{\cos\theta + i_0} \\ &= i_0 - \bar{v} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\bar{v}(-1)^k}{(i_0 + \bar{v})^k} \cos k\theta. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 19)$$

(A·19)式就是(14)式.

参 考 文 献

- [1] 姚希贤,物理学报, **27**(1978), 559.
- [2] 姚希贤,物理学报, **28**(1979), 416.

THE RELATIONS BETWEEN VOLTAGE AND MAGNETIC FIELD OF SUPERCONDUCTING WEAKLINK(I)

ZHANG YU-HENG WANG JUN

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

The quantum diffraction of the superconducting weaklink and the quantum interference of the dc-SQUID have been calculated theoretically based on the constant current source RSJ model. An analytical expression describing the constant amplitude oscillation of the dc voltage component with magnetic field for double junction dc-SQUID has been obtained.