

液晶混合光学双稳装置中的 分叉、混沌和暂态行为

王鹏业 戴建华 张洪钧

(中国科学院物理研究所)

1984年3月27日收到

提 要

本文以时延弛豫微分方程为出发点,计算和分析了具有反馈时间延迟(feedback time-delay) t_R 的液晶混合光学双稳系统中的分叉和混沌. 还发现在双稳区内存在一种周期为 t_R 的暂态振荡.

一、引 言

近年来,光学双稳中的不稳定性,即系统的输出随控制参数的改变,从稳态进入不稳定状态,并通过分叉走向混沌(Chaos)的行为受到了人们广泛的重视. 1979年, Ikeda^[1,2]从理论上指出,在含有非线性色散介质的环形腔中,由于反馈信号的时延,系统可以失稳,并随输入光强的增加将出现分叉和混沌. Gibbs^[3]和 Hopf 等人^[4]在以电光晶体为非线性介质的混合系统中证实了理论预言. 我们在液晶混合光学双稳装置中^[5,6],也观察到了这一现象.

本文通过液晶混合光学双稳系统的自治时延弛豫方程,分析了该系统的不稳定性、分叉和混沌. 得出不同条件下方程解的波形、频谱和相平面图. 计算了微分方程分叉图,与迭代方程结果比较,讨论了微分项的影响. 并发现一种周期近似为 t_R 的暂态振荡.

二、系 统 方 程

液晶混合光学双稳系统^[7]由正交偏振器中液晶介质和正比于输出光强的电压反馈回路组成. 在反馈回路中,引入时间延迟 t_R . 在我们的条件下,用 90° 扭曲向列液晶,起偏器和检偏器与液晶分子表面排列方向夹角为 45° , 透过率曲线 $T(V)$ 在总电压 $|V| \leq 2V_H$ 区域内,可近似地表示为

$$T(V) = H \sin^2(\pi V / 2V_H), \quad (1)$$

其中 H 为最大透过率, V_H 为相应于最大透过率的电压.

系统的输出满足弛豫方程

$$\tau \frac{dI_0(t)}{dt} = -I_0(t) + I_i T(V), \quad (2)$$

其中 τ 是液晶的弛豫时间, I_i 是输入光强. 电压 V 为反馈电压与固定偏压之和, 即

$$V(t) = V_B + KI_0(t - t_R), \quad (3)$$

其中 K 是反馈系统的光电转换因子. 采用线性反馈系统, 因此 K 为常数.

令 $x(t) = \frac{\pi K}{2V_H} I_0(t)$, $x_B = -\frac{\pi V_B}{2V_H}$, $A = \frac{\pi KH}{2V_H} I_i$, 由 (1) 和 (3) 式, 弛豫方程可写成

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + A \sin^2 [x(t - t_R) - x_B]. \quad (4)$$

可以看出, 这是一个具有时延 t_R 的自治微分方程, 它相当于一个无穷阶自治非线性常微分方程. 我们将通过这一方程对系统的行为进行分析.

三、定性分析

令 x^* 为方程 (4) 的定态解, 即

$$x^* = A \sin^2(x^* - x_B).$$

令 $y(t) = x(t) - x^*$, 代入方程 (4), 线性化后得到

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = A \sin(2x^* - 2x_B) y(t - t_R),$$

其本征方程为

$$(1 + \lambda) e^{\frac{t_R \lambda}{\tau}} = A \sin(2x^* - 2x_B), \quad (5)$$

其中 $\lambda = \tau \lambda'$, λ' 为本征值.

把 λ 写成 $\lambda = \alpha + i\beta$, 代入 (5) 式, 得

$$\alpha + 1 + \beta \operatorname{ctg} \frac{t_R}{\tau} \beta = 0, \quad (6a)$$

$$(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = A^2 \sin^2(2x^* - 2x_B) e^{-\frac{2t_R}{\tau} \alpha}. \quad (6b)$$

当 $\alpha < 0$, x^* 是稳定的; 反之, 当 $\alpha > 0$, x^* 是不稳定的. 由此得稳定条件

$$A^2 \sin^2(2x^* - 2x_B) < 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t_R}{\tau} \beta. \quad (7)$$

为了得出临界条件 (即在稳定与不稳定的临界点处, 系统参数所满足的条件), 令 $\alpha \rightarrow 0^-$, 由 (6a) 式得

$$\beta + \operatorname{tg} \frac{t_R}{\tau} \beta = 0. \quad (8)$$

再将上式代入 (7) 式, 得稳定条件

$$A^2 \sin^2(2x^* - 2x_B) < 1 + \beta^2. \quad (9)$$

反之, 则为失稳的条件

$$A^2 \sin^2(2x^* - 2x_B) > 1 + \beta^2. \quad (10)$$

令 $\beta' = \frac{t_R}{\tau} \beta$, 代入(8)式, 得

$$\frac{\tau}{t_R} \beta' = -\operatorname{tg} \beta'. \quad (11)$$

用图解法求解这一超越方程, 如图 1 所示, β' 为横坐标, 直线 $\frac{\tau}{t_R} \beta'$ 和曲线 $-\operatorname{tg} \beta'$ 之交点即为(11)式的解. 显然, 由于正切函数的周期性, 满足(11)式的解有无穷多个, 图 1 中仅画出了三个, P^* 点的解与 P 点的解等价, 只是符号相反.

当仅 0 点的解满足(10)式时, 由于此点 $\beta = 0$, 所以不会产生振荡, $x(t)$ 只是将随时间单调地远离 x^* . 若 P 点的解满足(10)式, 由于此时 $\beta \neq 0$, $x(t)$ 将随时间作周期振荡, 其圆频率为

$$\omega = \operatorname{Im}(\lambda') = \beta/\tau = \beta'/t_R, \quad (12)$$

相应的周期为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi t_R/\beta'. \quad (13)$$

考虑极限情况 $\tau/t_R \ll 1$, 这时图 1 中的直线趋于 β' 轴, P 点趋于 Q 点. 由于 $-\operatorname{tg} \beta'$ 在 Q 点的切线与 β' 轴交成的锐角为 $\pi/4$, 因此由简单的几何关系不难得出 P 点的横坐标为

$$a \approx \frac{\pi}{1 + \tau/t_R}.$$

由(13)式, 振荡的周期为

$$T = 2\pi t_R/a \approx 2(t_R + \tau).$$

若进一步取极限 $\tau/t_R \rightarrow 0$, 则 $T \approx 2t_R$, 这时稳定条件(9)式变为

$$A^2 \sin^2(2x^* - 2x_B) < 1.$$

可以看出, 在这极限情况下, 稳定性判据与不考虑微分项时的迭代方程相一致

$$\left(\left| \frac{d}{dx^*} A \sin^2(x^* - x_B) \right| < 1 \right).$$

另外, 我们注意到, 在 $t_R \gg \tau$ 的情况下, 系统自脉冲振荡的基本周期为 $2(t_R + \tau)$, 而不是严格的 $2t_R$. 通过这一关系, 可望能够较精确地测量出液晶的弛豫时间 τ . 还可以看到, t_R 越大越容易产生不稳定性, 满足失稳条件(10)式的 β 解也越多, 这时失稳后往往产生多模振荡, 而 t_R 较小时, 振荡模式将变简单. 若仅使图 1 中的 P 点(0点除外)满足(10)式, 即可能产生单模振荡. 当 $t_R \rightarrow 0$, 这时仅有 0 点有可能使(10)式满足, 所以不可能产生振荡.

以上关系是 $\alpha \rightarrow 0$ 的情况, 即稳定与非稳定的临界状态, 在分叉图上即位于分叉点处. 这正如我们看到的, 对于 $\tau/t_R \rightarrow 0$ 的情况, 在刚开始分叉时, 总是出现 $T \approx 2t_R$ 的振荡.

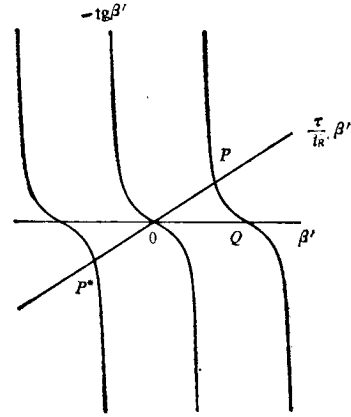


图 1 (11)式图解

四、方程的分叉和混沌解

通过定性分析,可以看到由方程(4)描述的系统在一定的条件下是不稳定的,并可产生周期振荡.为了观察这种不稳定性随系统参数变化的过程,利用计算机求出方程(4)的数值解.进而通过相平面图和功率谱对分叉和混沌作细致分析.数值计算采用了 Euler 法,为了验证方法和精度,也用 Runge-Kutta 法,并用高精度作了验算,得出一致的结果.

令步长 $\Delta t = t_R/N$, 由(4)式得

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{\tau} \{-x(t) + A \sin^2 [x(t - t_R) - x_B]\},$$

令 $x_n = x(n\Delta t)$, 即得

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{\tau} [-x_n + A \sin^2 (x_{n-N} - x_B)]. \quad (14)$$

(14) 式是以间隔 $\Delta t = t_R/N$ 在 $[t, t + t_R]$ 内对 $x(t)$ 作 $N + 1$ 次抽样的结果, 波形 $x(t)$ 可通过这 $N + 1$ 个抽样点近似表示出来.

取 $N = 100$, $t_R/\tau = 10$, 对(14)式迭代求解, 由于方程中存在时间延迟, 必须在 $[0, t_R]$ 内给出初值, 即给出一个定义在 $[0, t_R]$ 内的初始函数. 方程的稳态周期解将不依赖初始状态(单个周期吸引子情况), 这时初始函数可任意给出. 下面介绍当 $x_B = 3$, $t_R/\tau = 10$, 以 A 为控制参数, 系统经倍周期分叉发展到混沌的过程.

1. $A = 2.05$, 这时取任何初始函数, 都得到如图 2(a) 所示的 $x(t)$ 波形、相应的相平面图 ($\dot{x}-x$) 和频谱. 自脉冲振荡的周期近似为 $T \approx 2t_R$ (实际上更接近 $T = 2t_R + 2\tau$, 与定性分析结果完全一致). 在相平面图上(横座标为 $\dot{x}$, 纵座标为 x) 表现为一个封闭稳定环. 在频谱上, 高峰为基频 $f_1 \approx 1/2t_R$. 从波形可以看出, 微分方程与迭代方程(不考虑微分项时得到的系统方程)描述的情况是不相同的. 由迭代方程得出的是 $T = 2t_R$ 的严格方波, 而用更为接近实际系统的时延微分方程来描述时, 其输出自脉冲的上升沿和下降沿都比方波圆滑. 其不同点从频谱上偶次分量不为零也可看出. 当 τ/t_R 越小, 输出越接近方波, 频谱上的偶次分量也越小.

2. $A = 2.20$, 同样对任何初函数得到的稳态波形、相平面图和频谱如图 2(b) 所示, 显然这时已出现周期 $T = 4t_R$ 分频, 在相平面上的轨迹表现为由两个环组成的稳定封闭环. 在频谱上主峰仍为 f_1 , 但在 $f_1/2$ 处又出现了一个较大的尖峰.

3. $A = 2.22$, 如图 2(c) 所示, 这时的周期为 $T \approx 8t_R$, 相平面图上出现由四个大环组成的稳定封闭环, 频谱上在 $f_1/4$ 处又出现了一个尖峰, 表明又出现了分频. 同时, 高频分量也变得更为丰富. 波形的细致结构与从迭代方程得到的结果完全不同, 而是更为复杂.

4. $A = 3.00$, 如图 2(d) 所示, 这时周期性已不存在. 在相平面上亦不存在闭合轨迹, 只要时间足够长, 相点可到达相平面上某区域内的任何一点. 在频谱上观察到的是类似于噪声的连续谱. 这说明系统已进入了混沌区.

为了综观方程解的情况, 我们计算了微分方程 (4) 的分叉图, 如图 3 所示. 取

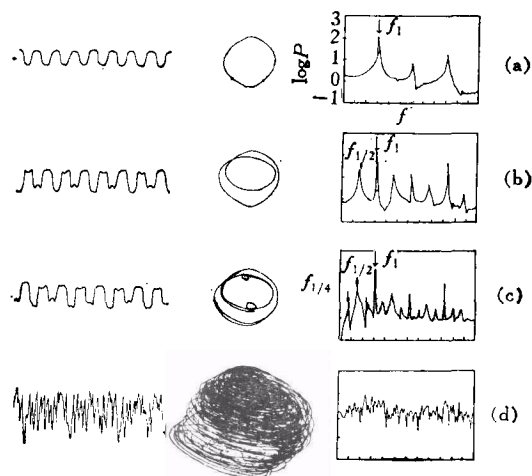


图2 波形、相平面图和频谱

$t_R/\tau = 10, x_B = 3, A$ 为控制参数(横轴), 纵轴为稳态解, 抽样作图时间间隔为 $t_R/2$. 从图中可明显看出双稳、倍周期分叉和混沌, 但难以观察到高于 $8t_R$ 的分叉及窗口. 这与迭代方程的分叉图能清晰地看到高分叉和窗口形成鲜明的对比. 说明考虑了微分项 $\tau \frac{dx}{dt}$ 后, 对倍周期分叉产生了很大的影响. 这也许是实验中难以观察到高于 $8t_R$ 的分叉和窗口的原因之一. 因为对于实际系统, 弛豫时间 τ 总是存在, 因此用微分方程描述系统比忽略 $\tau \frac{dx}{dt}$ 后得到的迭代方程更为符合实际情况.

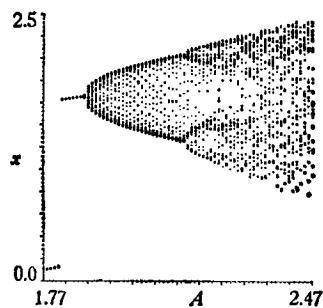
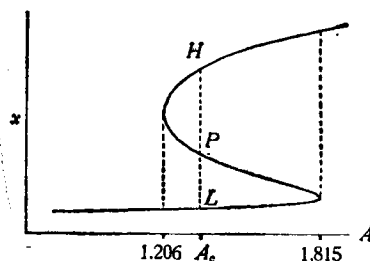


图3 微分方程分叉图

图4 $x_B = 3$ 的双稳区

五、周期近似为 t_R 的暂态振荡

如果把参数 A 取在双稳区内, 如图4所示. 这时若把初值取为 $[0, t_R]$ 内的定值函数 x_0 , 则当 $x_0 > x_P$ (x_P 为非稳定不动点 P 处的值), 方程的解将单调地趋于高态稳定不动点 H (若高态是分叉状态, 将趋于高态吸引子). 当 $x_0 < x_P$, 方程的解将单调地趋于低态稳定不动点 L . 但如果令 $[0, t_R]$ 内初值为按某一规律变化的函数, 这时趋向高态或低态的

暂态过程将不同。当初值在 $[0, t_R]$ 内取为线性函数值时,由(14)式计算表明,这时的暂态过程不再是单调的,而是周期近似为 t_R 的振幅衰减振荡过程,最后趋向的定态是高态还是低态与初始函数值和参数都有关。

为了便于分析,仍在 $x_B = 3$, $t_R/\tau = 10$ 条件下,取初始函数为 $[0, t_R]$ 上的线性增函数,函数值的变化范围为 $[0, 0.9]$ 。这时状态由参数 A 决定。计算结果表明,对 A 存在一个临界参数值 $A_c \approx 1.3350625$,当 $A > A_c$,最后状态趋向高态;当 $A < A_c$,最后状态趋向低态,并且这一暂态过程表现为周期 $T \approx t_R$ 的振幅衰减振荡。当 A 接近 A_c 时,振荡维持时间越来越长,波形的一段如图 5(a) 所示,图 5(b) 是它的频谱。可以看出,在频谱上 $f \approx 1/t_R$ 处有一尖峰,并且在极低频区还存在一峰值,这是由振幅慢变引起的。当 $|A - A_c|$ 较大时,即 A 离 A_c 较远时,最后状态为高态和低态的整个暂态波形分别如图 6(a) 和图 6(b) 所示。不同条件下的相平面图如图 6(c) 和图 6(d) 所示,其中

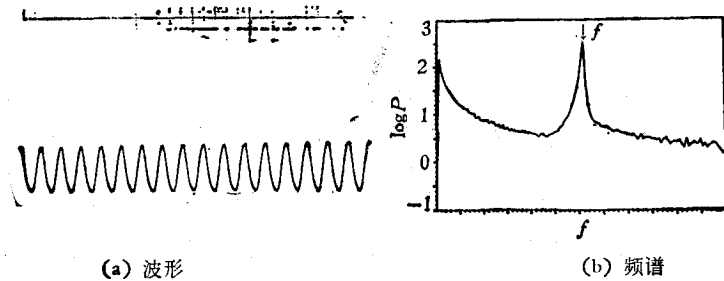


图 5 $T \approx t_R$ 振荡

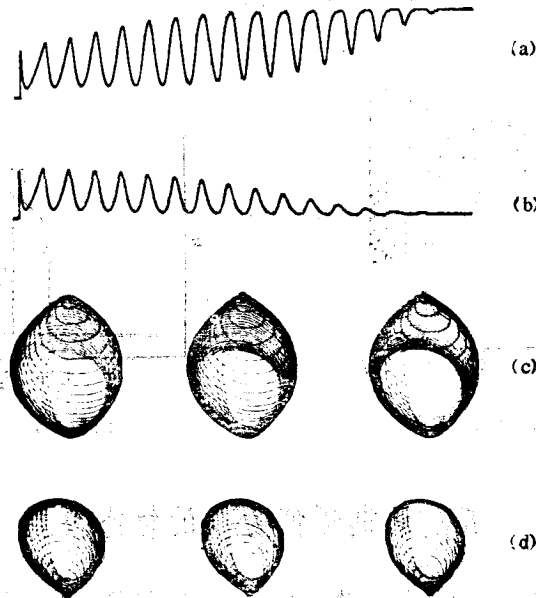


图 6 $T \approx t_R$ 暂态过程

- (a) 最后高态波形; (b) 最后低态波形;
 (c) 最后高态相平面图;
 (d) 最后低态相平面图

图 6(c) 是最后趋于高态的情况, 图 6(d) 为最后趋向低态的情况. $|A - A_c|$ 越小, 振荡维持时间越长, 这类似于相变中的临界慢化现象.

六、结 论

通过液晶混合光学双稳系统的弛豫方程, 对系统的稳定性进行了定性分析, 得出了当 $t_R \gg \tau$ 时基本周期为 $2(t_R + \tau)$ 的自脉冲振荡以及经倍周期分叉发展到混沌的解. 计算了微分方程分叉图, 并由此看出, 对满足这一时延弛豫微分方程的非线性动力学系统, 不易观察到很高的分频和窗口. 在一定条件下, 发现系统在双稳区内可产生周期近似为 $T \approx t_R$ 的暂态振幅衰减自脉冲振荡, 并且具有类似相变现象中的临界慢化现象.

参 考 文 献

- [1] K. Ikeda, *Opt. Commun.*, **30** (1979), 257.
- [2] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980), 709.
- [3] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan and R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.*, **46** (1981), 474.
- [4] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs and R. L. Shoemaker, *Phys. Rev.*, **A25** (1982), 2172.
- [5] 张洪钧、戴建华、王鹏业、金朝鼎, *物理学报*, **33**(1984), 1024.
- [6] Z. Hong-Jun, D. Jian-Hua, W. Peng-Ye and J. Chao-Ding, in "Laser Spectroscopy VI", Springer Ser. Opt. Sci., **40** (1983), 322.
- [7] 张洪钧、戴建华、杨君慧、高存秀, *物理学报*, **30**(1981), 810.

BIFURCATION, CHAOS AND TRANSIENT BEHAVIOR IN LIQUID CRYSTAL HYBRID OPTICAL BISTABLE DEVICES

WANG PENG-YE DAI JIAN-HUA ZHANG HONG-JUN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Bifurcation and chaos behavior in liquid crystal hybrid optical bistable devices is calculated and analysed based on the relaxation equation with time-delayed feedback. We also find that there is a transient oscillation with period t_R within the bistable region.