第34卷 第5期　　物 理 学 报　　Vol. 34, No. 5
1985 年 5 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　May, 1985

小尺寸约瑟夫逊结的自场效应

张裕恒　沈秀玲[1)]
(中国科学技术大学物理系)

1984 年 4 月 13 日收到

提　　要

本文指出交叉膜型小尺寸的约瑟夫逊结在不对称地提供结电流时，存在明显的自场效应，不对称自场将改变直流超导隧道电流与磁场关系的对称性.

一、引　　言

在直流约瑟夫逊效应中，当结的尺寸 w(表示结的长和宽)小于约瑟夫逊穿透深度 λ_J 时，零压电流受磁场调制的关系[1,2]为

$$I(H)=I_c(0)\frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)}, \tag{1}$$

式中 $I_c(0)$ 是零场中约瑟夫逊结的临界电流，$\Phi_J=\Lambda L_y H$，H 是沿着 x 方向平行于结面的外加稳恒磁场，$\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+2d$，$\lambda_1$ 和 λ_2 分别是磁场在绝缘层两侧超导体中的穿透深度，$2d$ 是绝缘层厚度，L_y 是 y 方向结的长度 $2b$. (1) 式是典型的夫琅和费衍射关系.

而当结的尺寸大于约瑟夫逊穿透深度 λ_J 时，必须考虑由于抗磁的涡旋电流产生的磁场的影响. Owen 等人[3]对大结进行了理论计算，Goldman[4] 实验上测得了各种 w/λ_J 的电流与磁场的关系，他们都得到对 $H=0$ 不对称的衍射图，理论和实验值符合较好.

我们的理论指出在交叉模型小尺寸约瑟夫逊结中，不对称输入的均匀分布的约瑟夫逊电流产生的自场效应也将造成电流与磁场关系的不对称.

二、理　　论

1. 迭层隧道结中的自场

图 1 是一个典型的迭层结，我们把交迭部分称为结区. 由于电流从上膜条跨越结区到下膜条要连续通过，故在结区上下膜条中电流有如图 2 分布的形式. 上膜条中电流在上膜条的下面上产生的磁场是沿 x 轴的负方向；下膜条中电流在下膜条的上面上产生的磁场则是沿 x 轴的正向，所以电流在绝缘层内产生的磁场是反对称分布的，在结中心 $y=0$ 处磁场为零，由此沿 y 轴是反向对称增大的. 如图 3 所示. 即有 $h_x(-y)=-h_x(y)$，

1) 中国科学技术大学物理系82级研究生.

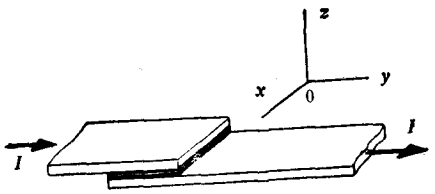

图 1　迭层隧道结

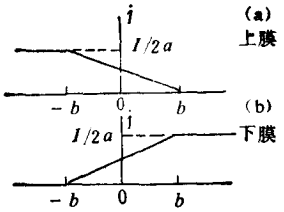

图 2　结区上、下膜条中电流的分布

因此电流产生的自场对约瑟夫逊电流

$$j_s = j_c \sin \varphi \tag{2}$$

中的位相 φ 没有贡献．如果沿 x 方向加一个稳恒磁场 $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{i}$，则(2)式变成

$$j_s = j_c \sin\left(-\frac{2e\Lambda}{\hbar} Hy + \varphi_0\right). \tag{3}$$

将(3)式对结面积积分，则得到方程(1)的夫琅和费衍射．

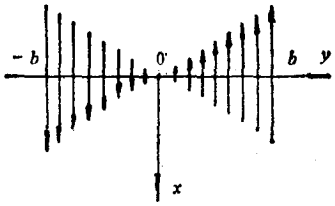

图 3　结中自场的分布

2. 交叉膜隧道结的自场效应

图 4 是一个典型的交叉膜隧道结，设上膜条宽度为 $2b$，下膜条宽度为 $2a$，绝缘层的厚度为 $2d$，以 (x', y', z') 表示电流的空间点；(x, y, z) 表示场点．坐标原点取在结中心．设电流从上膜进入，跨越绝缘层从下膜右支流出．为了计算这个电流在结平面中产生的场，我们把交叉膜分成四个区域：上膜条 $x' \geqslant a$ 为第 I 区，并设膜条为半无限长，即 $a \leqslant x' < \infty$；$-a \leqslant x' \leqslant a$ 的上膜条为第 II 区；下膜条中 $-b \leqslant y' \leqslant b$ 为第 III 区；$b \leqslant y' < \infty$ 为第 IV 区．在 II 区中电流要跨越势垒流入 III 区，设 II，III 区中电流分布分别有图 5(a)

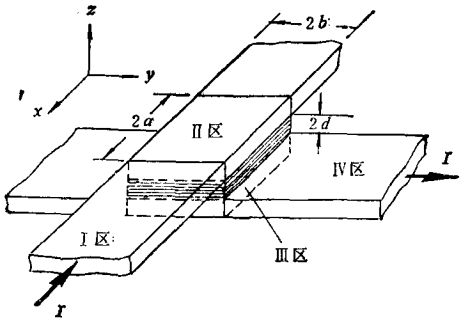

图 4

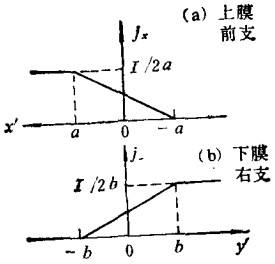

图 5　交叉膜的结区上、下膜条中的电流分布

和(b)的形式.

在膜中的电流密度为

$$\boldsymbol{j}_{x_1} = -\frac{I}{2b}\boldsymbol{i} \qquad \text{I 区 } s_1,\ a \leqslant x' < \infty,\ -b \leqslant y' \leqslant b;$$

$$\boldsymbol{j}_{x_2} = -\frac{I}{4ab}(x'+a)\boldsymbol{i} \qquad \text{II 区 } s_2,\ -a \leqslant x' \leqslant a,\ -b \leqslant y' \leqslant b;$$

$$\boldsymbol{j}_{x_3} = \frac{I}{4ab}(y'+b)\boldsymbol{j} \qquad \text{III 区 } s_3,\ -a \leqslant x' \leqslant a,\ -b \leqslant y' \leqslant b;$$

$$\boldsymbol{j}_{x_4} = \frac{I}{2a}\boldsymbol{j} \qquad \text{IV 区 } s_4,\ -a \leqslant x' \leqslant a,\ b \leqslant y' < \infty,$$

则

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{s_1+s_2}\frac{j_{x_1}+j_{x_2}}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(d-z)^2}}dx'dy' \\ &= -\frac{\mu_0 I}{8\pi b}\iint_{s_1}\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(d-z)^2}}dx'dy' \\ &\quad -\frac{\mu_0 I}{16\pi ab}\iint_{s_2}\frac{x'+a}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(d-z)^2}}dx'dy', \end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\iint_{s_4}\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(d-z)^2}}dx'dy' \\ &\quad +\frac{\mu_0 I}{16\pi ab}\iint_{s_3}\frac{y'+b}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(d-z)^2}}dx'dy', \end{aligned} \tag{4b}$$

$$A_z = 0. \tag{4c}$$

由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，并计算积分求得

$$\begin{aligned} B_x = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\Bigg[&\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{d+z} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{d+z} \\ &+\frac{d+z}{2b}\ln\frac{\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+(d+z)^2}+(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(d+z)^2}+(a-x)} \\ &-\frac{d+z}{2b}\ln\frac{\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(d+z)^2}-(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+(d+z)^2}-(a+x)} \\ &+\frac{y-b}{2b}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-y}{d+z}\cdot\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(d+z)^2}} \\ &-\frac{y-b}{2b}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-y}{d+z}\cdot\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+(d+z)^2}} \\ &+\frac{y+b}{2b}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b+y}{d+z}\cdot\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+(d+z)^2}} \\ &-\frac{y+b}{2b}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b+y}{d+z}\cdot\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(d+z)^2}}\Bigg], \end{aligned} \tag{5a}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{8\pi b}\Bigg[\mathrm{tg}^{-1}\frac{b-y}{d-z} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{b+y}{d-z}$$

$$+\frac{d-z}{2a}\ln\frac{\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+(d-z)^2}+(b-y)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(d-z)^2}+(b-y)}$$

$$-\frac{d-z}{2a}\ln\frac{\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(d-z)^2}-(b+y)}{\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+(d-z)^2}-(b+y)}$$

$$+\frac{x-a}{2a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{d-z}\cdot\frac{(b-y)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(d-z)^2}}$$

$$-\frac{x-a}{2a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-x}{d-z}\cdot\frac{(b+y)}{\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+(d+z)^2}}$$

$$+\frac{x+a}{2a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{d-z}\cdot\frac{(b-y)}{\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+(d-z)^2}}$$

$$-\frac{x+a}{2a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a+x}{d-z}\cdot\frac{(b+y)}{\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(d-z)^2}}\Bigg]. \tag{5b}$$

在(5a)和(5b)式可以算出在 $z=0$ 的平面中任意点 (x, y) 的磁场 B_x 和 B_y. 取 $2a=0.2\mathrm{mm}$, $2b=0.2\mathrm{mm}$, $2d=20\text{Å}$, 算出结平面中磁场的分布，我们发现除了离边缘 1/20 的窄条内磁场值发生畸变外，结中绝大部分区域中各点的磁场皆为恒定值，且正比于电流 I. 在上述给定的尺寸下，(5a)和(5b)式近似为

$$B_x=CI, \tag{6a}$$

$$B_y=DI. \tag{6b}$$

(6)式中 C 和 D 皆为常数，$C=-D=15.596$.

如果沿 x 方向加一个外磁场 $\boldsymbol{H}=H\boldsymbol{i}$，那么方程(2)将变为

$$j_s(x,y)=j_c\sin\left[\frac{2e\Lambda}{\hbar}DIx-\frac{2e\Lambda}{\hbar}(CI+H)y+\varphi_0\right], \tag{7}$$

则流过约瑟夫逊结的电流为

$$I=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}j_s(x,y)dxdy$$

$$=-I_c(0)\frac{\sin\left(\frac{2e\Lambda}{\hbar}DIa\right)}{\frac{2e\Lambda}{\hbar}DIa}\cdot\frac{\sin\left[\frac{2e\Lambda}{\hbar}(CI+H)b\right]}{\frac{2e\Lambda}{\hbar}(CI+H)b}\cdot\sin\varphi_0, \tag{8}$$

其中 $I_c(0)=4abj_c$，取 I 的最大值，就得到临界电流随外磁场的变化关系.

$$I(H)=I_c(0)\left|\frac{\sin\left[\frac{2e\Lambda}{\hbar}DI(H)a\right]}{\frac{2e\Lambda}{\hbar}DI(H)a}\cdot\frac{\sin\left\{\frac{2e\Lambda}{\hbar}[CI(H)+H]b\right\}}{\frac{2e\Lambda}{\hbar}[CI(H)+H]b}\right|. \tag{9}$$

取 $\Lambda\approx10^{-5}\mathrm{cm}$, $I_c(0)=26.61\mathrm{mA}$，对(9)式进行数值计算，就得到在小结中 $I(H)$-H 不对称的衍射图，见图 6.

为了求出 $I(H)$ 随 H 变化的最大值和其相应的磁场值，将(9)式对 H 求偏微商，并令 $\frac{\partial I}{\partial H}=0$，得到

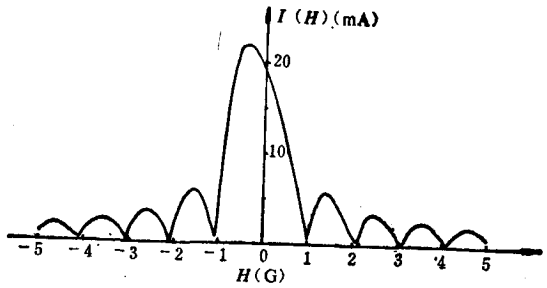

图 6 在小尺寸约瑟夫逊结中，自场引起的 $I(H)$-H 不对称的衍射图

$$\frac{2e\Lambda}{\hbar}(CI+H)b=\mathrm{tg}\left[\frac{2e\Lambda}{\hbar}(CI+H)b\right]. \tag{10}$$

这里的 I 相应于衍射图中各个极值 I_{max}，而 H 则是对应于极值点的磁场 H_m (10) 式有无限多个分立解，相应于 I 最大值的解为

$$CI_{max}+H_m=0. \tag{11}$$

将(11)式代入(9)式，即得不对称的衍射图中的最大电流值

$$I_{max}=I_c(0)\left|\frac{\sin\left(\frac{2e\Lambda}{\hbar}DaI_{max}\right)}{\left(\frac{2e\Lambda}{\hbar}DaI_{max}\right)}\right|. \tag{12}$$

由(12)式数值求解得 $I_{max}=21.997\mathrm{mA}$. 将这个值代入(11)式则得到 $H_m=-0.3453\mathrm{G}$.

由(9)式可以得出在 $H=0$ 的情况下，由于自场的影响零压电流变为 $I(0)=19.67$ mA，它只有临界电流的 74%.

因此，我们得到结论：对小的交叉结，在临界电流较大（$I_c(0)\approx 20\mathrm{mA}$）的情况下，自场效应不能忽略，自场不仅改变了夫琅和费衍射图的对称性，而且明显地降低了零场中的零压电流.

三、讨 论

1. 关于跨越结的电流产生的磁场

我们解出了跨越结的电流在结区产生的涡旋磁场的表示式，但这个场值只有 (5a) 和 (5b) 式计算的值的千分之几. 故可忽略.

2. 关于量子衍射的实验结果

Rowell[5], Mereereau[6] 实验上测得的都是很好的夫琅和费量子衍射，但他们的 $I_c(0)$ 都很低，分别是 0.18mA 和 0.64mA，因而自场可以忽略；Langenberg 等人[7]的交叉膜结的 $I(H)$-H 关系，其 $I(0)$ 大约是 27.4mA，自场不能忽略，但他们的实验结果只做了 $H>0$ 的情况，从他们的实验结果明显地看到 $H=0$ 的 $I(0)$ 不是 I_{max}，实验在负的磁场区中将有明显地上升趋势；Fiske 和Giaever[8] 的 $I_c(0)$ 约为 14mA，但测到很好的对称曲线，不过他们未报道测量方法，事实上如果对称地提供结电流[9]，即电流从上膜条两端输入，跨结后从下膜条两端输出，则可完全消除自场效应而得到对称的夫琅和费衍射.

参　考　文　献

[1] M. D. Fiske, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 221.
[2] P. K. Hansma, G. I. Rochlin and J. N. Sweet, *Phys. Rev.*, **B4**(1971), 3003.
[3] C. S. Owen and D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **164**(1967), 538.
[4] A. M. Goldman, *Phys. Rev.* **164** (1967), 543.
[5] J. M. Rowell, *Phys. Rev. Lett.*, **11** (1963), 200.
[6] J. E. Mereereau, in Tunneling Phenomena in *Solid*, (1969),
[7] D. N. Langenberg, D. L. Scalapino and B. N. Taylor, *Proc. IEEE*, **54** (1966), 560.
[8] M. D. Fiske and I. Giaever, *Proc. IEEE*, **52**(1964), 1155.
[9] R. V. Coleman, Methods of Experimental Physics, Academic Press New York and London, Vol. II (1974), p. 253.

THE SELF-FIELD EFFECT OF JOSEPHSON JUNCTION WITH SMALL DIMENSION

ZHANG YU-HENG　SHEN XIU-LING
(Department of Physics University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

It is pointed out in this paper that there is obviously a self-field effect in small dimension Josephson junction consisting of crossed thin films when the current in the junction is asymmetrically supplied. The symmetries of $I(H)$-H curves would be changed by the asymmetrical self-field.