

双桥结 SQUID 的 $\bar{V}-H$, $V-t$ 关系

张 裕 恒 高 怡 平¹⁾

(中国科学技术大学物理系)

1985 年 4 月 12 日收到

提 要

本文解出了真实的双桥结 SQUID 的平均电压-磁场关系,算出了在给定磁场下瞬时电压随时间的变化. 理论给出 $V-t$ 关系既不是等周期的,且 $V(t)$ 的幅值也不是常量. 同时对瞬时电压过程予以物理上的解释.

一、引 言

文献[1]用 RSJ 模型给出了在 $L = 0$ 的情况下双桥结 SQUID 的量子干涉现象的解析解,并在理论上计算出了 SQUID 端电压直流分量随磁场等幅振荡的关系,求出其振荡周期为 ϕ_0 ——磁通量子.

然而在双桥结 SQUID 中,由于两个弱连接和超导体构成了一个超导环路,这时环路的自感已不能再忽略.

实验上,人们早已测得恒流源下的平均电压随外磁场的变化关系^[2]. 但在理论上却一直未有较为完善的解释. 特别是以往理论上处理双桥结 SQUID 的问题时,大多采用恒压源近似模型. 这种近似实际上是不确切的. 我们知道,双桥结 SQUID 的结电阻很小,而外电路包括电源在内的电阻却远大于双桥结 SQUID 的结电阻,因而恒压源近似并不能满足,而应采用恒流源近似才与实际情况符合. 通常,在采用恒压源处理时,电压(或电流)-磁通量的关系要靠作图来确定^[2].

文献[3]的作者曾对由两个点接触所构成的 SQUID 在 $L \neq 0$ 的情况下从理论上进行了数值计算和讨论. 然而由于他们把位相只看作与时间 t 成线性关系,以致使方程的解不自洽,因而所求得的 $V-t$ 关系是错误的,而最终所得的 $\bar{V}-\Phi_0$ 关系也只是形状上相似而已.

本文从理论上推导了双桥结 SQUID 在恒流源下的方程组,完整地描述了恒流源下的双桥结 SQUID 的电压(平均电压)受外磁场调制的变化关系,并通过计算机处理,得出了由于计及迴路电感而产生的与文献[3]中完全不同的瞬态电压变化曲线,以及平均电压随外磁通量变化的周期性变化曲线. 同时对瞬态电压过程从物理上给出了解释,并计算了不同的电流偏置点 I_0 对 $\bar{V}-\Phi_0$ 曲线的影响.

1) 中国科学技术大学物理系 83 级研究生.

二、理论推导与计算

对于一个双桥结 SQUID, 当外加电流大于 SQUID 的临界电流 $I_{cd}(=2I_c$, 两弱连接等同) 时, 在弱连接超导结两端便会产生电压, 同时结中也出现正常电流 $I_n(=V(t)/R_n)$. 于是流过弱连接的电流应同时包含超导电流 I_s 和正常电流 I_n . 对于双桥结 SQUID 构成的迴路, 由于外加磁场的影响, 使得流过两弱连接体的电流是不对称的. 这样就必须考虑双桥结 SQUID 的迴路电感. 通常对于桥结、点接触以及小尺寸的结, 可以忽略其结电容. 这样在讨论时便可在等效电路中只计入理想结、正常电阻和迴路电感. 图 1 即

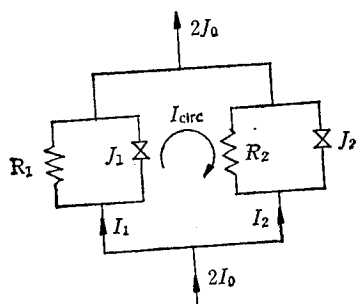


图 1

为双桥结的等效电路。

对于 SQUID 中的两个弱连接, 有

$$I_1(t) = I_{s1}(t) + V_1(t)/R_1 \quad (1)$$

$$I_2(t) = I_{s2}(t) + V_2(t)/R_2 \quad (2)$$

式中 I_1, I_2 分别为流过两个弱连接的电流, 包括超导电流 I_{s1}, I_{s2} 以及正常电流 $V_1(t)/R_1, V_2(t)/R_2$, 即 $I_{n1}(t)$ 和 $I_{n2}(t)$.

由于两个弱连接——超导桥是并联的, 因此由 London 方程可得

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\phi_0} \{ \Phi_e + \mathcal{L} I_{\text{circ}} \} + 2\pi l, \quad (3)$$

其中 $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$ 分别为两桥结的位相差, ϕ_0 是磁通量, $\mathcal{L}$ 为 SQUID 环的自感,

$$I_{\text{circ}} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2)$$

为绕环电流, Φ_e 为外磁场通量, l 为整数.

为了方便起见, 设两个超导桥是完全相同的, 即有: $R_1 = R_2, I_{c1} = I_{c2} = I_c$, 则两桥结的超导电流写作: $I_{s1} = I_c \sin \Delta\varphi_1; I_{s2} = I_c \sin \Delta\varphi_2$.

计及迴路电感产生的感生电动势 $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ 对桥结两端的电压的影响, 有

$$V_1(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \Delta\varphi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mathcal{L}}, \quad (4)$$

$$V_2(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \Delta\varphi_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mathcal{L}}. \quad (5)$$

其中 $\varepsilon_{\mathcal{L}} = -\mathcal{L} \frac{d}{dt} I_{\text{circ}}$

由(5)式减去(4)式有

$$V_2 - V_1 = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \{ \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 \} + \varepsilon_{\mathcal{L}}. \quad (6)$$

把(3)式和 $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ 代入(6)式

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= \frac{\hbar}{2e} \cdot \frac{2\pi}{\phi_0} \frac{d}{dt} \{ \Phi_c + \mathcal{L} I_{\text{circ}} \} - \mathcal{L} \frac{dI_{\text{circ}}}{dt} \\ &= \frac{d\Phi_c}{dt} + \mathcal{L} \frac{dI_{\text{circ}}}{dt} - \mathcal{L} \frac{dI_{\text{circ}}}{dt} = \frac{d\Phi_c}{dt}. \end{aligned}$$

当外加磁场给定后, 外磁通是一定值.

$$\text{故} \quad V_2 - V_1 = 0. \quad (7)$$

即 $V_1(t) = V_2(t)$. 两桥结的瞬时端电压相等.

把方程(1)和(2)中的 I_1 , V_1 , V_2 等各项用 $\Delta\varphi$ 的关系写出并与(3)式联立, 得

$$I_1 = \frac{\hbar}{2eR} \cdot \frac{d\Delta\varphi_1}{dt} - \frac{1}{2R} \varepsilon_x + I_c \sin \Delta\varphi_1, \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{\hbar}{2eR} \cdot \frac{d\Delta\varphi_2}{dt} + \frac{1}{2R} \varepsilon_x + I_c \sin \Delta\varphi_2, \quad (9)$$

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} + 2\pi \frac{\mathcal{L} I_{\text{circ}}}{\phi_0} + 2\pi l. \quad (10)$$

化简上述各式, 由(8)式加(9)式得

$$I_1 + I_2 = \frac{\hbar}{2eR} \cdot \frac{d}{dt} \{ \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \} + I_c (\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2). \quad (11)$$

由(8)式减(9)式得

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{1}{R} (V_1 - V_2) + I_c (\sin \Delta\varphi_1 - \sin \Delta\varphi_2) \\ &= I_c (\sin \Delta\varphi_1 - \sin \Delta\varphi_2). \end{aligned} \quad (12)$$

由(10)式并计入 $I_{\text{circ}} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2)$, 则

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} + 2\pi \frac{\mathcal{L}}{\phi_0} \cdot \frac{1}{2} I_c (\sin \Delta\varphi_1 - \sin \Delta\varphi_2) + 2\pi l \quad (13)$$

对于(11)式, $I_1 + I_2$ 正好为外加恒流源的电流, 记为 $2I_0$, 故

$$2I_0 = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d}{dt} \{ \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \} + I_c \{ \sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2 \}. \quad (14)$$

$$\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\phi_0} \left\{ \Phi_c + \frac{1}{2} \mathcal{L} I_c (\sin \Delta\varphi_1 - \sin \Delta\varphi_2) \right\} + 2\pi l. \quad (15)$$

为进一步化简, 设

$$x = \frac{1}{2} (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2); \quad y = \frac{1}{2} (\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1).$$

利用三角函数的和差化积公式, 代入(14)式和(15)式有

$$I_0 = \frac{\hbar}{2eR} \frac{dx}{dt} + I_c \sin x \cdot \cos y. \quad (16)$$

$$y = \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} - \pi \frac{\mathcal{L} I_c}{\phi_0} \cdot \cos x \cdot \sin y + \pi l. \quad (17)$$

$$\text{记: } a = \frac{2eR}{\hbar} I_0; \quad b = \frac{2eR}{\hbar} I_c; \quad c = \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} + \pi l; \quad d = \pi \cdot \frac{\mathcal{L} I_c}{\phi_0}.$$

最后,我们推得如下联立方程组:

$$\frac{dx}{dt} = a - b \cdot \sin x \cdot \cos y, \quad (18)$$

$$y = c - d \cdot \cos x \cdot \sin y. \quad (19)$$

对以上推出的联立方程组,我们通过自编的计算机 FORTRAN 程序,对其进行数值求解,得出一些与文献[3]不同的结果.下面详细说明我们的计算.

首先,为了更便于求解,对方程组进行一些初步的数学分析.

1. 方程组是 c (即 Φ_c) 的周期函数方程

设 $c' = c + 2\pi$, 由(19)式得

$$y = c + 2\pi - d \cdot \cos x \cdot \sin y$$

$$\text{即} \quad y - 2\pi = c - d \cdot \cos x \cdot \sin(y - 2\pi).$$

取 $y' = y - 2\pi$, 则有

$$y' = c - d \cdot \cos x \cdot \sin y'.$$

方程的形式不变,这时对于(18)式,把(19)式中的 $y' = y - 2\pi$ 代入(18)式,仍有

$$\cos(y - 2\pi) = \cos y.$$

即(18)式仍为

$$\frac{dx}{dt} = a - b \sin x \cdot \cos y.$$

因此,方程组(18),(19)是关于 c 为周期的,周期为 2π .

2. 对于方程(19)求解是多值的

方程(19)为

$$y = c - d \cdot \cos x \cdot \sin y,$$

$$\text{即} \quad c - y = d \cdot \cos x \cdot \sin y.$$

当 x 取定某一值 x_0 时,有

$$c - y = d' \cdot \sin y.$$

其中 $d' = d \cdot \cos x_0$.

由图2示出的根的情况可见,直线 $c-y$ 与曲线 $d' \sin y$ 有多个交点.当直线 $c-y$ 关于 c 以 2π 为周期变化时,它与曲线 $d' \sin y$ 的等交点,即 $f(y)$ 相同的交点也以 2π 为周期进行平移.这样,直线 $c-y$ 与曲线 $d' \sin y$ 在任一 2π 区域中的交点都可通过 $n \cdot 2\pi$ 的平移而移到主值区域中.亦即任意一个根,只要通过 $n \cdot 2\pi$ 的平移,在主值区域中都有一个解与它对应.于是,只要讨论主值区域中的情况即可.

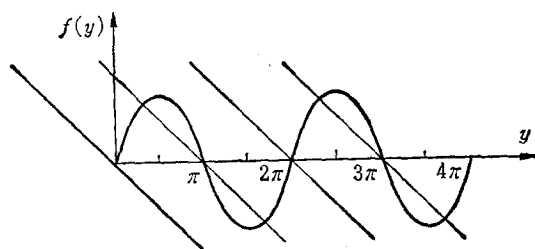


图 2

三、计算结果

数值求解联立方程组(18), (19), 可得 x, y 随 t 的变化关系, 并可求出 dx/dt 随 t 的变化关系, 进而求出 dx/dt 对时间 t 的平均值, 最后便可求出 $\bar{V}$ 随 Φ_e 的变化关系。

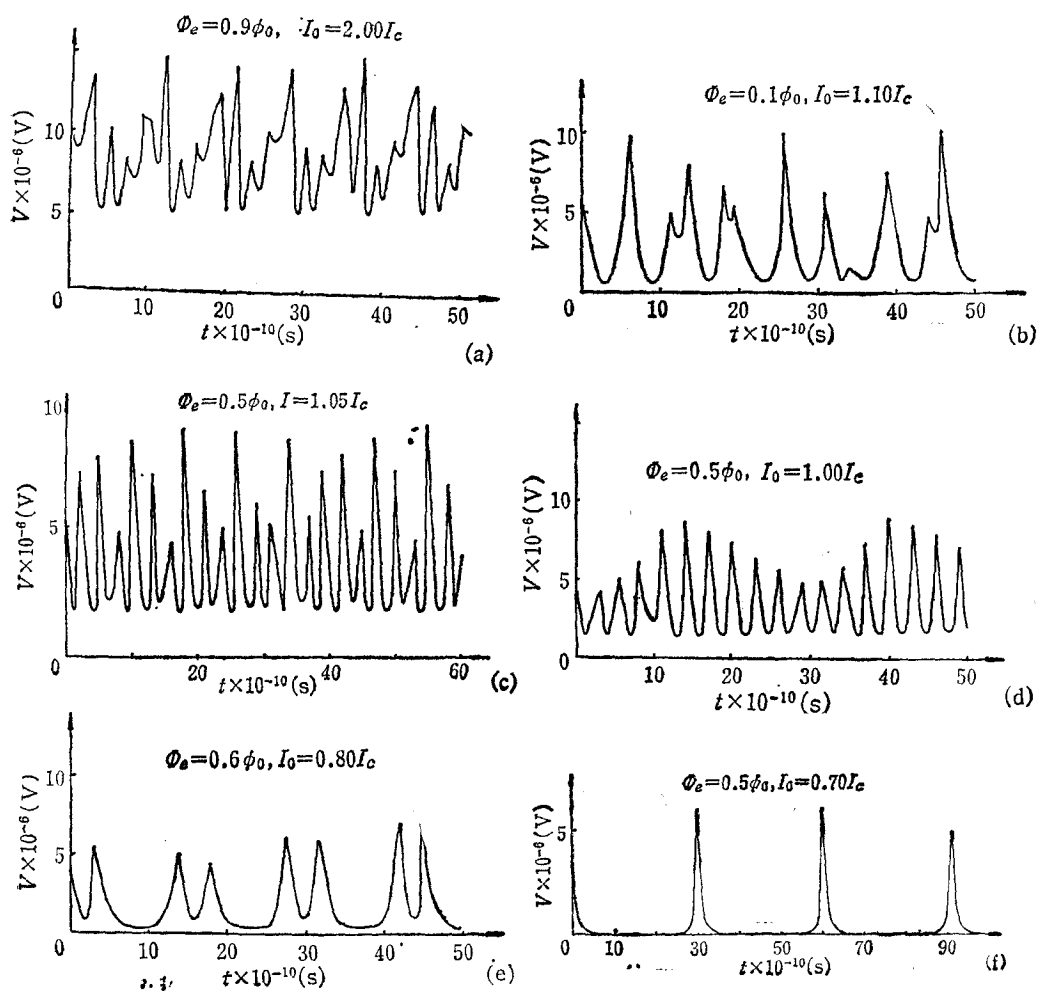


图 3

1. $V-t$ 曲线的计算

计算瞬时电压 $V(t)$ 随时间 t 的变化关系,我们得出了与文献[3]完全不同的瞬时电压 $V-t$ 曲线. 理论计算结果不是像文献[3]给出的那样具有十分好的周期性,也不是等幅振荡. 图3中给出了一些计算结果.

2. $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线的计算

对给定的 Φ_c 得到一个对应的 $V-t$ 关系,当 Φ_c 取不同的值时,便求得一系列 $V-t$ 曲线. 再由这些 $V-t$ 曲线对时间 t 求平均,就可求出一条 $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线. 如果改变偏置电流,则对应可求出一系列 $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线. 关于各种 $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线,见图4. 由图4可见,这些 $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线是明显以 Φ_0 为周期的. 图4中外磁场对 $\bar{V}$ 的调制幅值为 $\Delta\bar{V} \sim 4.6 \times 10^{-6}$ V. 与文献[4]给出的数据是符合的. 由此可见,前面推证的联立方程组的确较为准确地表示了双桥结 SQUID 的 $\bar{V}-\Phi_c$ 关系. 从计算结果看,是比较令人满意的,其 $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线也比文献[3]给出的结果更符合实验^[2].

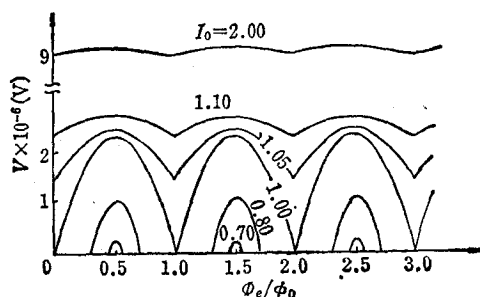


图 4

3. 不同电流偏置点 I_0 的影响

由图4看出,当选取不同的电流偏置点 I_0 时, $\bar{V}-\Phi_c$ 曲线呈现出较大的差异. 从电压 $\bar{V}$ 的幅度变化上看,当 $I_0 \gg I_c$ 时, $\Delta\bar{V} \rightarrow 0$; 当 $I_0 \ll I_c$ 时, $\Delta\bar{V} \rightarrow 0$; 只有当 $I_0 = I_c$ 时, $\Delta\bar{V}$ 才出现一个具有极大值的变化幅值. 这些结论与文献[4]的实验曲线也是相符的.

四、讨 论

前面我们已提到过本文中所求得的 $V-t$ 曲线与文献[3]的结论十分不同. 为了更好地说明本文中的工作在物理上的正确性,我们首先对文献[3]中的有关部份加以简单分析.

文献[3]最终推得的有关点接触双桥结 SQUID 的联立方程组为

$$I(t) = 2I_c \cdot \sin \left\{ \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \right\}$$

$$\times \cos \frac{e}{\hbar} (\Phi_c + \mathcal{L} I_{\text{circ}}) + \frac{V(t)}{R}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{circ}} = & -I_c \cdot \sin \frac{e}{\hbar} (\Phi_c + \mathcal{L} I_{\text{circ}}) \\ & \times \cos \left\{ \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

把(20)式改写为如下形式,并考虑到外加恒定偏置电流,则

$$\begin{aligned} V(t) = & 2RI_0 - 2I_c \cdot \sin \left\{ \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \right\} \\ & \times \cos \frac{e}{\hbar} (\Phi_c + \mathcal{L} I_{\text{circ}}). \end{aligned} \quad (22)$$

可见这一个关于 $V(t)$ 的自洽方程组和我们所推出的方程(18),(19)实际上是等价的。

$$\text{先设 } \Delta\varphi^*(t) = \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt',$$

于是(22)式变为

$$V(t) = 2RI_0 - 2I_c \cdot \sin \Delta\varphi^*(t) \cdot \cos \frac{e}{\hbar} (\Phi_c + \mathcal{L} I_{\text{circ}}). \quad (23)$$

文献[3]简单认为, $V(t)$ 是关于 $\Delta\varphi^*(t)$ 以 2π 为周期的周期函数;同时还认为 $V(t)$ 也是 $\int_0^t V(t') dt'$ 以 $\hbar/2e$ 为周期的周期函数;并且当 $I_0 > I_c$ 时, $V(t)$ 恒为正,于是 $V(t)$ 必为关于 t 的周期函数。但是这样的假设是不妥的。因为在 $\Delta\varphi^*(t)$ 中,它本身已包含了 $V(t)$ 的作用,即 $\Delta\varphi^*(t)$ 的变化是 $V(t)$ 与 t 共同作用的结果,故此对于(23)式这个自洽方程来讲, $V(t)$ 关于 $\Delta\varphi^*(t)$ 不是以 2π 为周期的,除非当 $V(t)$ 为一常量。显然,在我们讨论的问题中, $V(t)$ 并非常量。再者,把 $V(t)$ 与 t 的关系看作是周期性的这一点也是不妥的。从方程组(23),(21)来看, $V(t)$ - t 的关系并非显式,而是一个关于 $V(t)$ 的自洽方程组。也就是说, $V(t)$ - t 的关系是受到 $V(t)$ 本身影响的。这样 $V(t)$ - t 关系只能用数字迭代的方法进行数值求解,于是,在计及自洽的情况下,所求出的 $V(t)$ - t 曲线已不是一个完全的周期函数了。同时由于方程(20)中还包含有 I_{circ} 项的作用,这也是由方程(21)进行数字迭代的自洽解,从而导致对 $V(t)$ 幅值的调制作用,使其并不像文献[3]中所得出的等幅情况。

为了对所求出的 $V(t)$ - t 曲线给予物理解释。下面先说明双桥结 SQUID 的偏置电流 I_0 与工作点以及外磁场对输出端电压 $V(t)$ 的调制作用。

由图5可见,当偏置电流 I_0 改变时,双桥结 SQUID 的工作点便在曲线 a, c 或它们之间的任意一条类似曲线 b 上移动。如图5中 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 点的移动。于是输出电压的幅值 ΔV 也随之而变化。

由方程(14),(15),有

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \right\} = I_0 - I_c \sin \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2},$$

$$\frac{\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{\phi_0} \left\{ \Phi_c + \mathcal{L} I_c \cdot \sin \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \right\} + \pi l.$$

取 $x = \frac{1}{2} (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) = \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt'$; $y = \frac{1}{2} (\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)$. 同时不妨认为 $l = 0$, 这对于方程的特性没有任何影响. 于是我们得到与(18), (19) 式等价的变

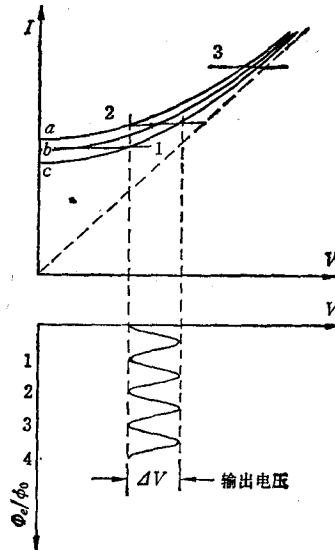


图 5

形方程组

$$\frac{V(t)}{R} = I_0 - I_c \sin \left\{ \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \right\} \cdot \cos y, \quad (24)$$

$$y = \frac{\pi}{\phi_0} \left\{ \Phi_c - \mathcal{L} I_c \cdot \sin y \cdot \cos \left\{ \Delta\varphi^*(0) - \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \right\} \right\}. \quad (25)$$

对方程组(24), (25)进行数值求解可知, 当某一时刻 t 确定了一个自洽的 y 值后, 便可对应求出一个瞬时端电压 $V(t)$ 的自洽值, 由于 $V(t)$ 的作用, 使实际通过 SQUID 的总电流并不完全等于外加偏置恒流 $2I_0$, 而是有一个小的偏离. 这就使得双桥结 SQUID 的工作点发生一个小的移动, 这个小的移动反过来便影响到输出瞬时端电压 $V(t)$ 的幅值. 由于 $V(t)$ 和 y 均随 t 而改变, 而且又是相互调制的, 随着 t 的改变, y 取得一个新值 y' , 这样, 对应于已稍有移动的工作点的情况, 便可得到一个新的电压瞬时值 $V(t')$, 接着 $V(t')$ 的作用再次反馈到电流偏置点, 使工作点产生一个新的微小移动. 这种自调制的作用非常迅速, 导致了工作点不断在 $2I_0$ 点附近移动, 于是输出瞬时端电压也随之非常迅速地改变. 如果用一个高频的伏特计进行测量, 便会看到瞬时电压 $V(t)$ 是以频率约 10^{10} Hz 在快速跳动.

由于 $V(t)$ 对工作点的自调制作用和 y 对 $V(t)$ 的共同影响. 我们可以看到, 当 y 对 $V(t)$ 的调制较弱时, $V(t)$ 便出现一个强峰, 反之便会出现小的次峰. 同时再计入工作点偏离的影响, $V(t)-t$ 的周期性便不再存在. 这就是我们所得出的图 3 中的 $V(t)-t$ 关

系. 不仅只有基本上准周期性的强峰, 而且在其之间由于以上讨论的原因还出现了一系列的小次峰.

吕为民同学参加了部分工作, 在此表示感谢.

参 考 文 献

- [1] 张裕恒、王军, 物理学报, **33**(1984), 952.
- [2] A. Barone and G. Paternó, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, John Wiley and Sons, (1982).
- [3] De Bruyn Cuboter R. and A. T. A. M. De Waele, In *Progress in Low Temperature Physics*, (1970), p. 243—290.
- [4] R. L. Forgacs and A. Warnick, *Trans. IEEE*, IM-15 (1966), 113.

THE $\bar{V}-H$ AND $V-t$ RELATIONS FOR THE SQUID WITH DOUBLE JUNCTION

ZHANG YU-HENG GAO YI-PING

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

The real relation between average voltage across a two junctions SQUID and applied magnetic field have been derived. The calculations have been carried out on the variations of the instantaneous voltage with time in a given magnetic field. It is also shown theoretically that the $V(t)$ relation is not periodical, and the $V(t)$ amplitude is not constant.

Finally, a physical interpretation about the instantaneous voltage process is given.