

研究简报

多基点同伦群理论

李伯臧 阎凤利

(中国科学院物理研究所)(河北师范大学物理系)

1987年2月9日收到

提 要

本文建立了一个定理:当拓扑空间 V 单连通时, $N(\geq 1)$ 基点 n 阶同伦类集合 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 可被构造成为同构于单基点 n 阶同伦群 $\pi_n(V)$ 的群,叫做 N 基点 n 阶同伦群;并且 V 的单连通性一般是不可省略的条件.给出了一些推论.简要地触及了这个定理及其推论在铁磁状态拓扑分类中的应用问题.

近十余年来,运用代数拓扑学中的同伦理论^[1,2]对有序介质的状态和缺陷进行分类的工作(参见综合论文或文献[3—6]),引起了人们的很大兴趣.这些工作几乎都是建立在单基点同伦群理论的基础上的.但是,最近我们在对铁磁物质中的管状和闭合磁畴壁进行拓扑分类时发现,一个多基点同伦群理论也是需要的.

我们^[7,8]已经把对这样的磁畴壁的拓扑分类,分别化成了对映射(指连续映射,下同)集合 $(S^2; v_1, v_2, \dots, v_N)^{(S^2; a_1, a_2, \dots, a_N)} \equiv \{f | f: S^2 \rightarrow S^2, f(a_j) = v_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ 和 $(S^2; v_1, v_2, \dots, v_N)^{(S^3; a_1, a_2, \dots, a_N)}$ 的拓扑分类.此处 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 是作为原像空间的二维球面 S^2 或三维球面 S^3 上的 N 个不同的取定点; $v_1, v_2, \dots, v_N$ 是作为像空间的 S^2 上的取定点,但不要求它们互不相同.这引导我们去研究更一般的多基点映射集合 $(V; v_1, v_2, \dots, v_N)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_N)}$ 的拓扑分类问题,即计算它的(多基点相对)同伦类集合 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$.这里 n 和 N 为任意正整数, S^n 为 n 维球面, V 为包括 S^2 在内的更一般的道路连通拓扑空间.

当 $N = 1$ 时, $\pi_n(V; v_1)$ 按一定的结合运算成为群^[1-6],称为 n 阶基本群或同伦群.为了与 $N > 1$ 的情形相区别,我们将它称为单基点 n 阶同伦群.此外,准确到同构, $\pi_n(V; v_1)$ 与基点 v_1 的取法无关,故常被简记为 $\pi_n(V)$ ^[1,2].

本文的目的是针对单连通拓扑空间 V (包括 S^2 作为特例)计算多基点同伦类集合 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$.得到的主要结果是定理1:当 V 单连通时, $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 可被构造为同构于 $\pi_n(V)$ 的群,称之为多基点 n 阶同伦群,并举例说明了,为了使定理1成立, V 的单连通性一般是不可缺少的条件.此外,给出了定理1的一些推论和它们在铁磁状态拓扑分类中的简单应用例子.

引理1 设 V 是单连通的, f 和 $g \in (V; v_1, v_2, \dots, v_N)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_N)}$,则 f 与 g 相对于 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 同伦的充要条件是它们相对于 a_1 (或其他任一个 a_j)同伦,即

$$f \simeq g: (S^n; a_1, a_2, \dots, a_N) \rightarrow (V; v_1, v_2, \dots, v_N) \quad (1)$$

$$\text{与} \quad f \simeq g: (S^n; a_1) \rightarrow (V; v_1) \quad (2)$$

是相互等价的. 这里 n 和 N 为任意正整数.

显然, 只有 $N \geq 2$ 时引理 1 的充分性需要证明. 先考虑 $N = 2$ 的情形. 采用交替描述^[1]. 以 V^n 记中心为 O 的 n 维球体, 在 V^n 中引入球坐标 (ξ, x) , 其中 $\xi \in [0, 1]$ 为径向坐标, x 为 S^{n-1} (即 V^n 的边界 ∂V^n) 上的点, 并令 $(1, x) = 0, (0, x) \in \partial V^n$. 设 f 和 $g \in (V; v_1, v_2)^{(V^n; \partial V^n, 0)}$ 相对于 ∂V^n 同伦, 即

$$f \stackrel{P}{\simeq} g: (V^n; \partial V^n) \rightarrow (V; v_1), \quad (3)$$

式中 $P \in (V; v_1)^{(V^n \times I; \partial V^n \times I)}$ 是从 f 到 g 的伦移, 而 $I = [0, 1]$. 由于 V 单连通, 故以

$$r(t) = P(O, t) = P((1, x), t), \quad t \in I \quad (4)$$

确定的回线 $r \in (V; v_2)^{(I; \partial I)}$ 相对于 ∂I 同伦于常值映射 $c: c(I) = v_2$. 设从 r 到 c 的伦移为 $Q \in (V; v_2)^{(I \times I; \partial I \times I)}$. 如下地构造 R, F 和 $G \in (V; v_1, v_2)^{(V^n \times I; \partial V^n \times I, 0 \times I)}$ 以及 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g} \in (V; v_1, v_2)^{(V^n; \partial V^n, 0)}$:

$$R((\xi, x), t) = \begin{cases} P((2\xi, x), t), & \xi \in [0, 1/2], \\ Q(t, 2\xi - 1), & \xi \in [1/2, 1]; \end{cases} \quad (5)$$

$$F((\xi, x), t) = \begin{cases} f(((1+t)\xi, x)), & \xi \in [0, 1/(1+t)], \\ v_2, & \xi \in [1/(1+t), 1]; \end{cases} \quad (6)$$

$$G((\xi, x), t) = \begin{cases} g(((2-t)\xi, x)), & \xi \in [0, 1/(2-t)], \\ v_2, & \xi \in [1/(2-t), 1]; \end{cases} \quad (7)$$

$$\tilde{f}((\xi, x)) = \begin{cases} f((2\xi, x)), & \xi \in [0, 1/2], \\ v_2, & \xi \in [1/2, 1]; \end{cases} \quad (8)$$

$$\tilde{g}((\xi, x)) = \begin{cases} g((2\xi, x)), & \xi \in [0, 1/2], \\ v_2, & \xi \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

则得到下列同伦关系:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{f} \stackrel{R}{\simeq} \tilde{g} \\ f \stackrel{F}{\simeq} \tilde{f} \\ \tilde{g} \stackrel{G}{\simeq} g \end{array} \right\} : (V^n; \partial V^n, 0) \rightarrow (V; v_1, v_2). \quad (10)$$

从而有

$$f \simeq g: (V^n; \partial V^n, 0) \rightarrow (V; v_1, v_2). \quad (11)$$

因此, $N = 2$ 时引理 1 是成立的. 用归纳法不难证明它在 $N > 2$ 的情形亦成立.

在引理 1 中, V 单连通条件一般是不能去掉的. 例如取 $V = S^1$ (圆周 S^1 是复连通的), 并令 $v_1 \neq v_2$. 设 f 和 $g \in (S^1; v_1, v_2)^{(S^n; a_1, a_2)}$ 分别将 S^n 映成 S^1 上被 v_1 和 v_2 分开的两个闭弧, 则显然有 $f \simeq g: (S^n; a_1) \rightarrow (S^1; v_1)$, 但 $f \not\simeq g: (S^n; a_1, a_2) \rightarrow (S^1; v_1, v_2)$. 即使 $v_1 = v_2$, 若 $n = 1$, 此种现象亦存在.

当 $J \in \{1, 2, \dots, N\}$ 时, 将 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_J)$ 中的元 (J 基点同伦类) 记为 $[f]_J$. 这里 $f \in (V; v_1, v_2, \dots, v_J)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_J)}$ 是 $[f]_J$ 的一个代表映射. 以 ϕ 表示空集.

引理 2 若 V 单连通, 则对任何 $[f]_1$ 和 $[g]_N$, 总有

$$[f]_1 \cap (V; v_1, v_2, \dots, v_J)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_J)} \neq \emptyset \quad (12)$$

$$\text{和} \quad [g]_1 \supset [g]_2 \supset \dots \supset [g]_N. \quad (13)$$

因此,令 $[g]_1$ 与 $[g]_N$ 对应,就得到 $\pi_n(V; v_1)$ 与 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 之间的一一到上对应.

事实上,从对引理1的证明过程我们已经看出:对任一单基点映射,总可以找到一个多基点映射与它相对于 a_1 同伦,从而(12)式成立.此外,如果注意到 $(V; v_1, v_2, \dots, v_{J+1})^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_{J+1})} \subset (V; v_1, v_2, \dots, v_J)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_J)}$,则不难看出(13)式是引理1的推论.

既然 $\pi_n(V; v_1)$ 与 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 是一一满对应的,则可据此对应关系和前者的群结构,将后者构造成与前者同构的群,称为 N 基点 n 阶同伦群.具体步骤如下:对任意的 $[f]_N$ 和 $[g]_N$,若 $[f]_1 \cdot [g]_1 = [h]_1$ ($\cdot$ 是群 $\pi_n(V; v_1)$ 中的结合运算),取 $k \in [h]_1 \cap (V; v_1, v_2, \dots, v_N)^{(S^n; a_1, a_2, \dots, a_N)}$.令

$$[f]_N * [g]_N = [k]_N, \quad (14)$$

则易证 $*$ 满足结合律,并且有

定理1 设 V 单连通, n 和 N 为任意正整数, $a_1, a_2, \dots, a_N$ 和 $v_1, v_2, \dots, v_N$ 分别是在 S^n 和 V 中任意取定的 N 个不同点和 N 个点,则 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 按结合运算 $*$ 成为同构于 $\pi_n(V)$ 的群:

$$\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N) \approx \pi_n(V). \quad (15)$$

正如对引理1那样,对于定理1, V 单连通这个条件也一般是不能略去的.

定理1的实用意义甚为明显:它把求多基点同伦类集合的问题,简化成了求单基点同伦群的问题.对于后者,已经有较充分的研究^[1-6].例如,由于 $\pi_n(S^n) \approx \pi_3(S^2) \approx \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ 是整数加群)和 $n \geq 2$ 时 S^n 是单连通的^[1,2],而且当 V 单连通时 $\pi_1(V) = 1$ (1 是含一个元的平凡群),所以作为定理1的推论,得到

命题1 当 $n \geq 2$ 时,有

$$\pi_n(S^n; v_1, v_2, \dots, v_N) \approx \pi_3(S^2; v_1, v_2, \dots, v_N) \approx \mathbb{Z}. \quad (16)$$

特别对任何单连通空间 V ,

$$\pi_1(V; v_1, v_2, \dots, v_N) = 1. \quad (17)$$

根据定理1,准确到同构,基点 $v_1, v_2, \dots, v_N$ 的取法是无紧要的,因此可将 $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$ 简记为 $\pi_{n(N)}(V)$,正如在单基点情形所做的那样.

前面已经提及,我们^[7,8]已将对单个管状和闭合磁畴壁的拓扑分类,分别化作对 $S^2 \rightarrow S^2$ 和 $S^3 \rightarrow S^2$ 的多基点映射的拓扑分类.因此据命题1可知,管壁和闭壁的拓扑类集合,均可被构造成同构于 $\mathbb{Z}$ 的群.此外,我们^[7,8]已证明,对含有互不相交且互不包含的 α 个管壁和 β 个闭壁(α 和 β 为非负整数)的铁磁状态的拓扑分类,等价于对 $[S^2, v]^{[S(2^\alpha, 3^\beta), a]}$ 的拓扑分类.这里, $S(2^\alpha, 3^\beta)$ 表示由含公共点 a 的 α 个 S^2 与 β 个 S^3 所构成的拓扑空间(粘合拓扑空间^[9]); $[S^2, v]^{[S(2^\alpha, 3^\beta), a]}$ 表示满足下述性质的 $S(2^\alpha, 2^\beta) \rightarrow S^2$ 映射的集合:它们把 a 映成 v ,而且当它们被限制在每个 S^2 或 S^3 时都是多基点映射.显然,每个这样的映射均被它在各个 S^2 和 S^3 上的限制映射一意地描述.于是由命题1有:

命题2 对任意的非负整数 α 和 β , $[S^2, v]^{[S(2^\alpha, 3^\beta), a]}$ 的同伦类集合(从而 α 个管壁和

β 个闭壁共存的磁化态的拓扑类集合), 可被构造成为同构于 $\alpha + \beta$ 维格矢群 $\mathbb{Z}^{\alpha+\beta}$ 的群.

类似地, 将 α_1 个 S^{n_1} , α_2 个 S^{n_2} , $\dots$, α_p 个 S^{n_p} 于一公共点 a 粘结而成 $S(n_1^{a_1}, n_2^{a_2}, \dots, n_p^{a_p})$. 在拓扑空间 V 中任意选取点 v , 构造映射集合 $[V, v]_{[S(n_1^{a_1}, n_2^{a_2}, \dots, n_p^{a_p}), a]}$. 利用定理 1, 则命题 2 可被推广为

命题 3 若 V 单连通, 则 $[V, v]_{[S(n_1^{a_1}, n_2^{a_2}, \dots, n_p^{a_p}), a]}$ 的同伦类集合, 可被构造成为同构于直积群 $\pi_{n_1}(V)^{a_1} \times \pi_{n_2}(V)^{a_2} \times \dots \times \pi_{n_p}(V)^{a_p}$ 的群.

感谢蒲富恪、韩宝善、冯麟保、葛蕴藻和聂向富等同志对本工作的关心与鼓励.

参 考 文 献

- [1] 廖山涛、刘旺金, 同伦论基础, 北京大学出版社, (1980).
- [2] F. R. Croom, Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York, (1978).
- [3] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979), 591.
- [4] L. Michel, *Rev. Mod. Phys.*, 52(1980), 617.
- [5] V. P. Mineev, *Soviet Sci. Rev., Sec. A: Physics Reviews*, Vol. 2(I. M. Khalatnikov ed.), Printed in USA, (1980), pp. 173—246.
- [6] M. Kléman, Points, Lines and Walls, Intersci, Pub., New York, (1983).
- [7] 李伯臧、阎凤利, 待发表.
- [8] 阎凤利、李伯臧, 物理学报, 37(1988), 95.
- [9] M. A. Armstrong, 基础拓扑学(中译本), 北京大学出版社, (1983), 73—99 页.

THE THEORY OF HOMOTOPY GROUP WITH MULTIPLE BASE POINTS

LI BO-ZANG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

YAN FENG-LI

(Department of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang)

ABSTRACT

A theorem is established that if the topological space V is simply connected, the set of homotopy classes for the $S^n \rightarrow V$ continuous maps with $N (\geq 1)$ base points, $\pi_n(V; v_1, v_2, \dots, v_N)$, can be constructed into group isomorphic to the homotopy group of order n with single base point, $\pi_n(V)$ (referred to as the homotopy group of order n with N base points). Here, the condition that V is simply connected could not in general be neglected. Some corollaries are given. The application of this theorem and its corollaries to the topological classification of magnetization states in ferromagnet is briefly described with a few examples.