

推广伊辛自旋模型的临界温度曲线

唐 坤 发 胡 嘉 桢

(上海交通大学应用物理系, 凝聚态物理研究所)

1987 年 2 月 24 日收到

提 要

本文运用作者所发展的同普适类等标度变换理论, 研究推广的伊辛自旋模型, 得到了这种模型的临界温度曲线.

一、引 言

近十多年来, 连续相变和临界现象理论的研究获得了很大的发展. 从伊辛等模型的严格解的结果^[1]中, 人们已对相变系统的临界行为有了很深刻的了解. 此外, 借助于级数展开、Monte Carlo 模拟以及被视为近十多年来统计物理重要进展的重正化群理论, 对大量具有实际意义的相变系统的临界现象也有了一定的认识. 最近, 作者根据普适类和标度律这两个连续相变和临界现象的基本概念^[2], 发展了一种同普适类等标度变换理论^[3]. 借助于这个变换, 可以把经过严格重正化变换后其形式发生改变但普适类未发生变化的哈密顿量变换到原来的形式, 从而得到重正化群的递推关系. 对伊辛模型的应用产生了与 Onsager 严格解非常接近的结果^[4]. 本文将运用这种同普适类等标度变换理论来计算作者先前提出的一种推广伊辛自旋模型^[5]的临界温度曲线.

二、同普适类等标度变换理论

两个具有不同形式但属于同一普适类的哈密顿系统, 在一个能够包含它们的参数空间中将由同一临界面上的两个点代表. 它们的临界温度并非彼此独立, 而是由临界面方程联系. 产生这种联系的原因是因为它们具有相同的临界行为. 根据这一现象, 我们可运用任一可行的手段分别计算这两个哈密顿系统的某一热力学量. 当它们的温度参量趋向于各自的临界点时, 要求这两个热力学量具有相同的渐近行为, 便可建立起它们的临界温度之间的联系. 这里我们将运用类平均场近似, 考虑一个具有 L^2 个自旋的集团. 对集团内自旋之间的相互作用作严格处理, 而对集团内外自旋之间的相互作用运用平均场近似, 引入一个边界对称破缺场 m 来代替集团外的自旋对集团内自旋的影响. 然后计算这两个哈密顿系统的平均磁化强度 M . 这里对称破缺场可作为系统趋向于临界点的量度. 令这两个平均磁化强度在系统趋向各自的临界点 ($m \rightarrow 0$) 时, 满足下列条件:

$$M_1 = qM_2, \quad (1a)$$

$$m_1 = q m_2, \quad (1b)$$

则有等式

$$\left. \frac{\partial M_1}{\partial m_1} \right|_{m_1=0} = \left. \frac{\partial M_2}{\partial m_2} \right|_{m_2=0} \quad (2)$$

由此,便把两个系统的临界温度联系起来了。如果某一严格重正化变换(比如 Decimation 变换)在标度变换的同时改变了哈密顿系统的形式^[6],利用这个关系可以把系统沿着临界面变回到原来的形式。在后一变换中,没有标度变化,且在同一临界面上进行。因此我们称之为同普适类等标度变换。如果已知其中一系统的临界温度,由此变换则可求得另一系统的临界温度。

三、推广伊辛自旋模型的临界温度曲线

为了研究混合伊辛自旋模型的普适类,我们提出了一种推广模型^[5],其哈密顿量为

$$H\{\bar{\sigma}, s\} = K' \sum_{ii} \bar{\sigma}_i s_i + G \sum_i s_i^2. \quad (3)$$

这里 $\bar{\sigma}_i = \pm 1/2$, $s_i = 0, \pm 1$, $K' = -\beta J$ 表示约化耦合常数。自旋 $1/2$ 与自旋 1 相间排列如图 1 所示,其中“×”和“○”分别表示自旋 $1/2$ 和自旋 1 。由于它由两个互相穿透的子晶格组成,每个子晶格由不同的自旋占据,因此可作为一种特殊形式的单轴亚铁磁模型。参量 G 可以调节自旋 1 取 ± 1 态和零态的相对几率。 $G \rightarrow \infty$ 时,系统退化为伊辛模型。由重正化群理论研究结果,我们已经知道当 G 从零至无穷大变化时,哈密顿量(3)式所对应的系统均与伊辛模型属于同一普适类。因此利用已知的伊辛模型的严格解的结果,

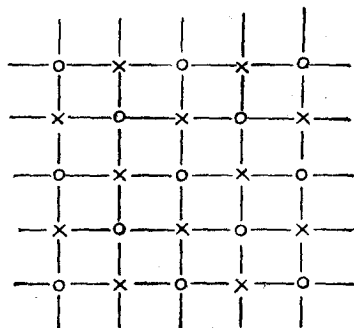


图 1 推广模型的晶格结构

由同普适类等标度变换理论则可计算该系统临界温度随参量 G 的变化曲线。由于系统的对称性降低,每个格点不是等价的,因此在磁化强度的类平均场近似计算中,需引入两个边界对称破缺场,从而使得计算工作量大大增加。我们先运用 Decimation 操作^[6]对晶格中所有的自旋 1 求和,将系统变成由下列哈密顿量表示的统计等价系统:

$$H\{\sigma\} = 2B \sum_{nn} \sigma_i \sigma_j + B \sum_{nnn} \sigma_i \sigma_j + C \sum_p \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l + A(N^2/2). \quad (4)$$

这里

$$A = \frac{3}{8} \ln(1 + 2g) + \frac{1}{2} \ln(1 + 2 \operatorname{ch} 2k) + \frac{1}{8} \ln(1 + 2 \operatorname{ch} 4k);$$

$$B = \frac{1}{8} \ln \frac{1 + 2g \operatorname{ch} 4k}{1 + 2g};$$

$$C = \frac{3}{8} \ln(1 + 2g) + \frac{1}{8} [\ln(1 + 2g \operatorname{ch} 4k)]$$

$$-4 \ln(1 + 2 g \cosh 4 k)];$$

$$g \equiv \exp(G); k \equiv k'/2; \sigma_i \equiv 2 \bar{\sigma}_i. \quad (5)$$

$\sum_{nn}$ 表示对最近邻相互作用求和, $\sum_{nnn}$ 表示对次近邻求和, $\sum_p$ 表示对方块形四体相互作用求和。在这个新的系统里, 每个格点都是等价的。为叙述方便, 我们以最低阶平均场

表 1

g^{-1} ($\exp(-G)$)	$u_c(\exp(-2K_c))$			
	$L=1$	$L=2$	$L=3$	严格解与级数解
0	0.4142	0.4142	0.4142	0.4142 ^[4]
0.2	0.4003	0.4004	0.4005	
0.4	0.3878	0.3880	0.3882	
0.6	0.3764	0.3768	0.3770	
0.8	0.3660	0.3664	0.3668	
1	0.3564	0.3570	0.3575	0.3588 ^[7] +0.0025

近似为例, 考虑一个只有一个自旋的集团 ($L=1$), 其有效哈密顿量为

$$H = 2B \sum_{nn} \sigma_i m + B \sum_{nnn} \sigma_i m + O(m^2). \quad (6)$$

不难算得

$$M = 3Bm + O(m^2). \quad (7)$$

由(2)式, 临界温度曲线方程为

$$K^{-1} = 4/\cosh^{-1} \left[\frac{3(1+2g)-1}{2g} \right]. \quad (8)$$

由于这种类平均场近似当 L 趋向无穷大时为精确解, 因此随着 L 的增加, 计算结果越来越接近精确解。以同样的方法, 我们计算了 $L=1, 2, 3$ 时的临界温度曲线。其结果列于表 1 中, 为了便于与级数解比较, 我们引入参量 $u_c \equiv \exp(-2K_c)$ 。从表 1 中数值不难看出,

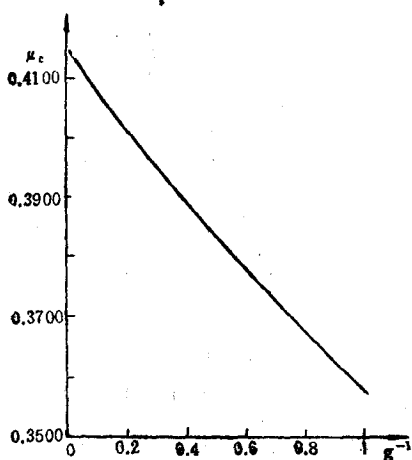


图 2 推广模型的临界温度曲线

出, G 等于零 ($g=1$) 所对应的混合模型的临界温度随着 L 的增加越来越接近级数解^[7]。图 2 画出了 $L=3$ 时的临界温度曲线。由于我们利用了伊辛模型的严格解的结果, G 为无穷大时其结果与 Onsager 结果^[8]一致, G 等于零时的结果也与级数解结果符合得相当好, 而 G 取其它值时所对应的系统与 G 取零的系统没有任何特殊之处。因此, 由我们第一次所获得的推广模型的临界温度曲线, 其精确度是十分令人满意的。

参 考 文 献

- [1] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic, London, (1982).
- [2] L. Kadanoff, *Physics*, **2**(1966), 263.
- [3] K-F Tang (唐坤发), J-Z Hu (胡嘉桢), *J. Phys. A*, **20**(1987), (accepted).
- [4] K-F Tang (唐坤发), J-Z Hu (胡嘉桢), *J. Phys. A*, **19**(1986), L621.
- [5] 唐坤发、胡嘉桢, *物理学报*, **35**(1986), 1048.
- [6] B. Hu, *Phys. Rep.*, **91**(1982), 233.
- [7] S. L. Schofield and R. G. Bowers, *J. Phys. A*, **14**(1981), 2163.
- [8] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65**(1944), 117.

THE CRITICAL TEMPERATURE CURVE OF THE GENERALIZED MIXED SPIN MODEL

TANG KUN-FA HU JIA-ZHEN

(Department of Applied Physics, Institute of Condensed Matter Physics, Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

The equiscale transformation in the same universality class developed previously^[1,5] is applied to the generalized mixed spin model, the curve of the critical temperature is obtained for this model.