

弯晶沟道的混沌行为*

罗诗裕 邵明珠
(重庆交通学院)

唐建宁 刘曾荣
(安徽大学)

1987 年 9 月 14 日收到

本文预言了在周期场作用下,弯晶沟道的混沌行为.分析了系统的全局分叉性质和出现 Smale 马蹄的参数条件,指出系统通向混沌的过程就是粒子的退道过程,而相的沟道效应和沟道辐射都将表现出内在的随机性,为定量解释沟道效应和沟道辐射的某些特征提供了一种可能的理论分析.

一、问题的提出

文献[1,2]研究了弯晶的沟道效应.对于常曲率的弯晶沟道,粒子横向运动方程可表示为

$$m_0 \gamma \frac{d^2 x}{dt^2} + V'(x) = p v \kappa, \quad (1)$$

其中 κ 是弯晶曲率,对于直沟道 $\kappa \equiv 0$; m_0 是带电粒子的静止质量; γ 是相对论因子; v 是粒子纵向速度, p 是粒子动量, x 是粒子偏离沟道中心平面的距离, $V'(x)$ 是粒子-晶体相互作用势,常用的两种平面连续势有 Lindhard 势和 Moliere 势.

迄今为止,人们在讨论沟道效应和沟道辐射时,都几乎没有考虑辐射本身引起的阻尼,或电子多重散射和晶格热振动引起的阻尼;也几乎没有考虑沿粒子运动方向上的晶格周期性;如果考虑到这一点,晶面就不再是连续带电平面,换句话说,带电粒子不再是运动在相邻两个连续带电平面之间,而是运动在具有周期特征的两个准连续带电平面内部.作为零级近似,我们仍把相邻的两个晶面视为连续带电平面,引入受迫项来描写晶格场的周期性,或粒子-晶体相互作用势的“非平面”特征.

实际上,受迫项还可以通过另外途径引入,比如在沟道效应和沟道辐射的实验中,可以把晶体置于“超声场”中直接观察外场对沟道效应和沟道辐射的影响.

引入阻尼项和受迫项后,方程(1)化为

$$m_0 \gamma \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + V'(x) = p v \kappa + b_1 \sin \omega_1 t, \quad (2)$$

其中 a_1 是阻尼系数, b_1 是外场振幅, ω_1 是外场频率.

* 国家自然科学基金资助的课题.

令 $z = vt$, $X = \frac{\partial}{\partial p} x$, 方程(2)化为

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{a_1}{p} \frac{dX}{dz} + \frac{4}{pv d_p^2} V'(X) = \frac{\partial}{\partial p} \kappa + \frac{\partial b_1}{pv d_p} \sin \omega_2 z, \quad (3)$$

其中

$$p = mv = m_r v, \quad \omega_2 = \omega_1/v, \quad V'(X) = \frac{dV(X)}{dX}, \quad (4)$$

$$V(X) = KW(X), \quad K = \pi z_1 z_2 e^2 N d_p^2, \quad (5)$$

z_1, z_2 是粒子和晶体原子的原子序数, e 是电子电荷, N 是晶体密度, d_p 是晶面间距, $W(X)$ 是归一化的粒子-晶体相互作用势. 归一化的 Lindhard 势为

$$W_L(X) = [(1+X)^2 + 12D^{-2}]^{1/2} + [(1-X)^2 + 12D^{-2}]^{1/2} - 2(1 + 12D^{-2})^{1/2}, \quad (6)$$

归一化的 Moliere 势为

$$W_M(X) = \frac{0.2}{3D} e^{-3D} [\text{ch}(3XD) - 1] + \frac{1.1}{0.6D} e^{-0.6D} [\text{ch}(0.6XD) - 1] + \frac{0.7}{0.15D} e^{-0.15D} [\text{ch}(0.15XD) - 1], \quad (7)$$

其中

$$D = d_p/a_T, \quad (8)$$

a_T 是托马斯-费密屏蔽距离. 文献[3]讨论了这两种势的不足之处, 引入了如下形式的正弦平方势

$$W(X) = \beta \sin^2 \frac{\pi}{2} X. \quad (9)$$

将(9)式代入方程(3), 并作变换

$$\xi = \pi X, \quad z = \left(\frac{pv d_p^2}{2\pi^2 K \beta} \right)^{1/2} s, \quad (10)$$

注意到(5)式, 可得

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} + a_1 \frac{d\xi}{ds} + \sin \xi = q_1 + b_1 \sin Qs, \quad (11)$$

其中

$$a_1 = \frac{a_1}{p} \left(\frac{pv d_p^2}{2\pi^2 K \beta} \right)^{1/2}, \quad q_1 = \frac{pv \kappa d_p}{\pi K \beta}, \quad b_1 = \frac{b_1 d_p}{\pi K \beta}, \quad Q = \omega_2 \left(\frac{pv d_p^2}{2\pi^2 K \beta} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

而 ω_2 由(4)式给出.

考虑到一般情况下, 辐射阻尼很弱, 晶体曲率很小, 而外场也可以假定它不大; 于是, 方程(11)中的参数 a_1 , q_1 和 b_1 均是小量; 为此, 不妨将方程(11)改写为

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} + \sin \xi = \varepsilon \left(q + a \frac{d\xi}{ds} + b \sin Qs \right) \quad (13a)$$

或

$$\dot{\xi} = \zeta, \dot{\zeta} = -\sin \xi - \varepsilon(q + a\zeta + b \sin Qs), \quad (13b)$$

其中 ε 是小量, 且

$$q = \frac{q_1}{\varepsilon}, \quad a = \frac{a_1}{\varepsilon}, \quad b = \frac{b_1}{\varepsilon}. \quad (14)$$

方程(13)就是本文要讨论的粒子运动方程, 它的全局分叉性质及 Smale 马蹄出现的条件是我们主要关心的问题.

二、系统的全局分叉性质及其出现 Smale 马蹄的条件

首先观察 $\varepsilon = 0$ 的情况. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程(13)是一个 Hamiltonian 系统, 其能量积分为

$$H(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \zeta^2 + 1 - \cos \xi = h. \quad (15)$$

在相柱面上, 平衡点为 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, 前者为中心, 后者为鞍点. 按 h 的大小, 相柱面上的轨线可分为三类:

1) $h = 2$ 对应的(15)式表示位于 $(0, 0)$ 上下两支同宿轨道 Γ^+ 和 Γ^- , 其方程为

$$\xi = \pm 2 \arctan(\operatorname{sh} s), \quad \zeta = \pm 2 \operatorname{sech} s. \quad (16)$$

相应的振动周期为无穷.

2) $0 < h < 2$ 对应的(15)式表示以 $(0, 0)$ 为中心的一簇振荡型周期轨道, 其方程为

$$\xi = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} s), \quad \zeta = 2k \operatorname{cn} s, \quad (17)$$

其中 $k^2 = h/2$, $k \in (0, 1)$. 其周期为 $T_1 = 4K(k)$, 且 $\lim_{k \rightarrow 0} T_1 = 2\pi$, $\lim_{k \rightarrow 1} T_1 = \infty$.

3) $h > 2$ 对应的(15)式表示两簇分别位于 Γ^+ 上方和 Γ^- 下方的回转型周期轨道, 其方程为

$$\xi^{\pm} = \pm 2 \arcsin\left(\operatorname{sn} \frac{s}{k}\right), \quad \zeta^{\pm} = \pm \frac{2}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{s}{k}\right). \quad (18)$$

1. 同宿轨道的 Melnikov 函数

现在观察扰动系统(13)式, 并构造和计算同宿轨道 $\Gamma^{\pm}$ 的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M^{\pm}(s_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(s) [q + a\zeta + b \sin Q(s + s_0)] ds \\ &= \pm 2\pi q + 8a \pm 2\pi b \operatorname{sech} \frac{Q\pi}{2} \sin Qs_0. \end{aligned} \quad (19)$$

混沌阈值可表示为

$$|b_c^{\pm}| = \left(q \pm \frac{4a}{\pi}\right) \operatorname{ch} \frac{Q\pi}{2}. \quad (20)$$

下面分三种情况讨论.

1) 当 $|b| > |b_c^+|$ 时, (即当外场振幅大于混沌阈值的临界振幅时) $M^+(s_0)$ 有简单零点, 因此, 在 Poincaré' 截面上双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形出现横截同宿

交点,即意味着系统(13)式将出现 Smale 马蹄。

2) 当 $|b| = |b_c^*|$ 时, $M^+(s_0)$ 有二阶零点,满足(20)式的参数 (q, a, b, Q) 为稳定流形与不稳定流形发生二次同宿相切的参数值。

3) 当 $|b| < |b_c^*|$ 时, $M^+(s_0)$ 无简单零点,即双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形永不相交,扰动系统(13)式无 Smale 马蹄。

对于(20)式中取负号的情形,可类似讨论。

2. 次谐振振荡的 Melnikov 函数

由方程(13)和(17)可构造和计算如下形式的次谐 Melnikov 函数:

$$M^{m/n}(s_0) = \int_0^{nT_1} \zeta(s) [q + a\zeta + b \sin Q(s + s_0)] ds$$

$$= \begin{cases} 16(E - k'^2 K) a_n & (n > 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}); \\ 16(E - k'^2 K) a + 4\pi b \operatorname{sech} QK' \cdot \sin Qs_0 & (n = 1, m \text{ 为奇数}). \end{cases} \quad (21)$$

$$(22)$$

鉴于 $a \neq 0$ 时,恒有 $M^{m/n}(s_0) \neq 0$, 因此,只考虑 $n = 1$, m 为奇数的情况。定为 m 阶次谐分叉的混沌阈值

$$|b_c(m)| = \frac{4}{\pi} (E - k'^2 K) |a| \operatorname{ch} QK', \quad (23)$$

其中 E 是第二类椭圆函数, $K' = K(k')$, $k'^2 = 1 - k^2$ 。下面分三种情况讨论。

1) $|b| > |b_c(m)|$ 时,(即扰动振幅大于临界振幅时) $M^{m/n}(s_0)$ 有两个简单零点,从而扰动系统(13)式有两个振荡型次谐波,其中一个为鞍点型,另一个为结点型。

2) 当 $|b| = |b_c(m)|$ 时, $M^{m/n}(s_0)$ 有两阶零点,从而满足方程(23)的参数 (a, b, Q) 应为 m 阶振荡型次谐波发生鞍结分叉的值。

3) 当 $|b| < |b_c(m)|$ 时, $M^{m/n}(s_0)$ 无零点。扰动系统(13)式不存在 m 阶振荡型次谐波。

从 $T_1(k) = 2\pi m/Q$ 及 $T_1(k) = 4K(k)$ 可以导出 Q 的区间为 $Q \in (0, m)$, 这说明振荡型次谐波可能出现在 Q 的 $(0, m)$ 区间内。

从(20)和(23)式可以看出,当且仅当 $q = 0$ 时,才有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M^{m/n}(s_0) = 2M(s_0), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |b_c(m)| = |b_c|.$$

因此,当 $q \neq 0$ 时,振荡型次谐波的无限次分叉并不以 Smale 马蹄的出现为极限。

3. 回转型周期轨道的 Melnikov 函数

让我们观察具有周期为 $T_2(k) = \frac{m}{n} \frac{2\pi}{Q}$ 的回转型周期轨道(18)式。构造并计算出它的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}^{m/n}(s_0) = \int_0^{nT_2(k)} \zeta^{\pm}(s) [q + a\zeta^{\pm}(s) + b \sin Q(s + s_0)] ds$$

$$= \begin{cases} \pm 2\pi q n + 8nEk^{-1}a & (n > 1, m \text{ 为自然数}); \\ \pm 2\pi q + 8Ek^{-1}a \pm 2\pi b \operatorname{sech} QkK' \cdot \sin Qs. & (n = 1, m \text{ 为自然数}) \end{cases} \quad (24)$$

由(24)式的第一式可以看出,当 $a = \pm k\pi q/4E$ 时, $M_{\pm}^{m/n}(s_0) \equiv 0$, 而当参数 (a, q) 穿过直线 $a = \pm k\pi q/4E$ 时, $M_{\pm}^{m/n}(s_0)$ 改变正负号, 于是可以估计落在该直线上的参数 (a, q) 值很可能就是系统(13)式发生 m/n 阶超次谐波的鞍结分叉值, 因此, 系统将表现出结构不稳定性.

对(24)式的第二式, 我们定义一个临界值

$$|b_c^{\pm}(m)| = \left| q \pm \frac{4E}{k\pi} \right| \operatorname{ch} QkK'. \quad (25)$$

下面分三种情况讨论.

1) 当 $|b| > |b_c^+(m)|$ 时, $M_{+}^{m/n}(s_0)$ 有两个简单零点, 因此扰动系统有两个位于双曲不动点上方的 m 阶回转型次谐波.

2) 当 $|b| = |b_c^+(m)|$ 时, $M_{+}^{m/n}(s_0)$ 有两阶零点, 因此, 满足(25)式的参数 (q, a, b, Q) 为不动点上方的 m 阶回转型次谐波鞍结分叉值.

3) 当 $|b| < |b_c^+(m)|$ 时, $M_{+}^{m/n}(s_0)$ 没有零点, 因此, 扰动系统(13)式没有双曲不动点上方的 m 阶回转型次谐波.

对(25)式取负号情形可类似讨论.

注意到 $\lim_{m \rightarrow \infty} M_{\pm}^{m/n}(s_0) = M^{\pm}(s_0)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} |b_c^{\pm}(m)| = |b_c^{\pm}|$, 可以断定回转型次谐波的无限次分叉将导致扰动系统出现 Smale 马蹄.

从 $T_2(k) = 2\pi m/Q$ 和 $T_1(k) = 2kK(k)$ 可以看出: $Q \in (0, \infty)$, 即回转型次谐波分叉可在 Q 的任一区间内发生.

三、结果与讨论

综上所述, 我们可以得到如下结论: 具有弱阻尼的弯晶沟道粒子, 在弱的外场作用下可先后在相柱面上出现两个 Smale 马蹄, 可出现振荡型奇阶次谐分叉和回转型次谐分叉; 对于弯晶(即当 $q \approx 0$ 时), 振荡型次谐波的无限次分叉并不以 Smale 马蹄的出现为极限, 而回转型次谐波的无限次分叉将导致 Smale 马蹄的出现; 当晶体弯曲和辐射阻尼(或电子多重散射等)同时存在(即 $a, q \approx 0$) 时, 相柱面上的两个马蹄及回转型次谐波将随扰动参数 (q, a, b, Q) 的变化而先后出现; 振荡型次谐波的分叉只可能出现在 Q 的有限区域内; 而回转型次谐波的分叉则可在 Q 的任一区域内发生.

现在, 让我们对沟道粒子的行为进行讨论. 沟道效应和沟道辐射的主要特征决定于沟道粒子的运动行为. $h > 2$ 描写了准沟道粒子的行为, $0 < h < 2$ 描写了沟道粒子的行为. 由(22)式可以看出, 当外场的振幅大于临界振幅(即 $|b| > |b_c(m)|$) 时, 系统将经过无限次分叉进入混沌, 具有这种行为的粒子必然是退道粒子, 它对沟道辐射的贡献是增加这种辐射的连续本底; 人们在实验中发现, 当选用不同的晶体来研究, 发现沟道辐射谱的本底辐射各不相同, 这除了人们关心的几种因素(如晶体结构, 晶格振动和电子多重散射等)外, 我们认为同粒子的混沌行为是分不开的; 但是当外场振幅(或沿沟道方向晶格周期变化的振幅)小于临界振幅(即 $|b| < |b_c(m)|$) 时, 粒子始终是沟道粒子, 它们对沟道

效应或沟道辐射的主要特征将做出重要贡献。

- 1 J. A. Ellison *et al.*, Nucl. Instruments and Methods in Physics Research (NIM), (1984), Vol. 230(B2), No. 1—3, p. 9.
- 2 罗诗裕、邵明珠, 物理学报, **35**(1986), 1002.
- 3 罗诗裕、邵明珠, 中国激光, **11**, (1984), 69.

CHAOTIC BEHAVIOURS IN BEND CRYSTAL CHANNEL

LUO SHI-YU SHAO MING-ZHU

(Chongqing Institute of Communication)

TANG JIAN-NING LIU ZHENG-RONG

(Anhui University, Hefei)

ABSTRACT

The chaotic behaviours of bend crystal channel under the action of periodic field was predicted. The properties of global bifurcation in the system and the condition for occurrence of Smale horseshoes were analyzed, and we showed that the process of approaching chaotic state is the dechanneling process of a particle, and the channeling effect and channeling radiation would exhibit intrinsic stochasticity. The results provided possible theoretical analysis for quantitative description of channeling effect and channeling radiation.

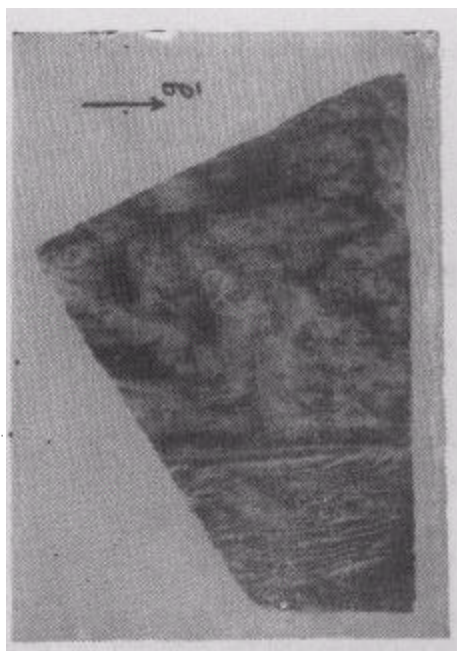


图 2 KAP, SRS, $\lambda = 1.00 \text{ \AA}$ (36 $\times$)

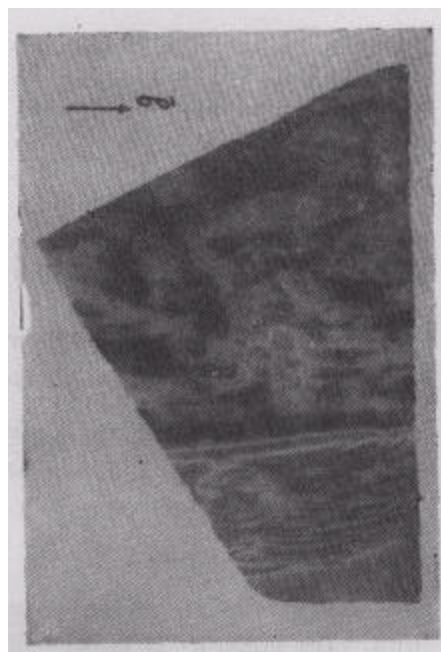


图 4 KAP, SRS, $\lambda = 1.50 \text{ \AA}$ (36 $\times$)

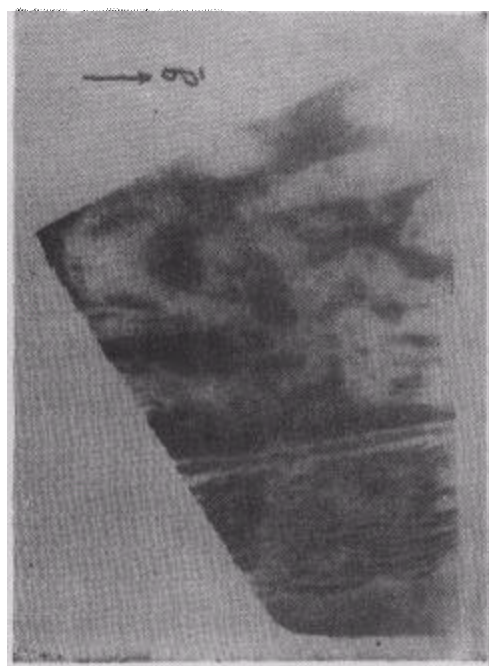


图 1 KAP, MoK α , $\lambda = 0.71 \text{ \AA}$ (36 $\times$)

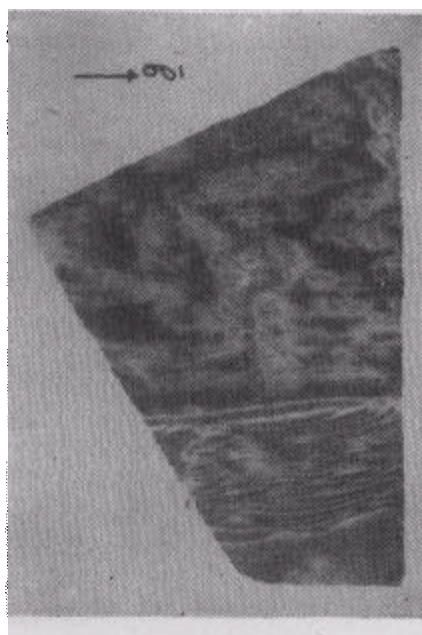


图 3 KAP, SRS, $\lambda = 1.25 \text{ \AA}$ (36 $\times$)