

n 维格子上 Ising 模型临界温度的上界

栾 长 福

(中山大学数学系)

1988年4月26日收到

本文利用耦合的技巧,建立了 Ising 模型与接触过程的联系. 由此给出了 Ising 模型临界温度的上界,即 n 维 Ising 模型的临界点 $\beta_c(n)$ 应满足

$$\exp\{2\beta_c(n)(2n-1)\} \cdot (\exp\{2\beta_c(n)\} - 1) \geq 2/2n - 1.$$

特别是三维 Ising 模型的临界点 $\beta_c(3) > \frac{1}{2} \ln 1.17$.

一、引 言

人们对 Ising 模型的研究已历时半个多世纪. 早在 1920 年,为了解释铁磁相变,楞茨提出了一个简单的模型. 1925 年 Ising 证明了当空间维数为 1 时,这个模型没有相变. 后来人们称此模型为 Ising 模型. 然而, Ising 同时还列举了一些似是而非的论据,错误地推断当维数 $d \geq 2$ 时,模型也没有相变. 事隔 10 年后,Peierls 指出,当 $d = 2$ 时,模型应该有相变并严格证明了这一结论. 差不多又隔了 10 年后,即 1944 年 Onsager 严格地求解了二维的 Ising 模型,得到临界点 $\beta_c(2) = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$. 这一严格解被认为是统计物理的重大成就. 它表明应用统计物理的原则和方法可以解释相变. 此后,许多人试图严格求解更具实际意义的三维 Ising 模型. 然而结果并没有成功^[1,2]. 这个挂了半个多世纪的悬案,仍是一个饶有趣味的数学难题^[3-7].

在这方面所获得的进展大体有两个方面:一是从理论上证明三维以上的 Ising 模型存在相变^[3,5,8];另一是通过做试验或模拟来求近似解. 在这方面,人们做了不少工作. 例如,重整化群和蒙特卡洛方法就是有力的工具. 近似解估计三维 Ising 模型的临界点大致在 0.22 附近.

本文的目的是利用耦合的技巧,建立接触过程与 Ising 模型的联系. 由此给出临界点的下界,即当三维 Ising 模型的参数小于 $\frac{1}{2} \ln 1.17$ 时,模型不发生相变. 或说三维 Ising 模型的临界点 $\beta_c(3) > \frac{1}{2} \ln 1.17$. 然后讨论了高维 Ising 模型的临界点的界. 指出当维数 $d \rightarrow \infty$ 时,参数

$$\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow 0.$$

这里 k 为玻耳兹曼常数, $k = 1.38 \times 10^{-16}$ 尔格/度. T 为温度. 上式的意思是:当维数高时,要模型不被磁化,除非温度非常高. 这与物理上结论相符合.

二、临界温度的上界

关于 Ising 模型描述,在不同的领域有着不同的形式.物理学家所采用的符号与数学家不同.就是数学家们,由于处理方法的差异,其符号也不尽相同.一种是静态的随机场描述,如 Добрушин 和 Preston 的工作;另一种是看作随机动力学模型,如 Spitzer 及 Liggett 的工作.本文所采用的方式属于后者.

所谓 Ising 模型是指这样一个粒子系统: 设 $S = Z^d$, $W = \{-1, 1\}$. 这里 S 为 d 维欧氏空间里的整点,称为位置空间. W 为自旋之集. 1 表示自旋向上,而 -1 就表示自旋向下. η 为 S 到 W 的一个映射,称为系统的一个组态. 称 $\{-1, 1\}^{Z^d}$ 为状态空间. 在 Z^d 中任取一点 x , 若对于组态 η 在 x 处自旋发生改变的速度为

$$C(x, \eta) = \exp \left[-\beta \sum_{y: |x-y|=1} \eta(x) \eta(y) \right] \quad (1)$$

(这里求和是对 x 点的近紧邻而言, x, y 均为 Z^d 中的点, $|x-y|$ 表示 Z^d 中点 x 与 y 的距离, $\beta \geq 0$ 为参数,称为温度因子.) 则称具有这种速度函数的自旋变相过程为 Ising 模型.

因为三维 Ising 模型更接近于真实的铁磁体,所以对它的求解尤其引人注意. 然而至今三维 Ising 模型相变的临界点仍未严格地得到. 出于无奈人们转而去求临界点所在的范围,或说相变域、遍历域等等. 为了给出 Ising 模型的遍历域,需要下述引理.

引理 1 设 d 为维数(即为正整数), $\beta \geq 0$, 则有不等式

$$e^{2d\beta} - e^{2(d-1)\beta} \geq \frac{e^{2d\beta} - e^{[2(d-1)\beta - 2(k-1)]}}{k}. \quad (2)$$

这里 k 为小于 $2d$ 的正整数.

证明 因为在这里 d 和 β 均为常数,并且当 $k=1$ 时,结论中等式成立函数

$$f(x) = \frac{e^{2d\beta} - e^{[2(d-1)\beta - 2(x-1)\beta]}}{x} \quad x > 0$$

是关于 x 的减函数即可. 事实上,只须要证明 $f'(x) \leq 0$, 因为函数 $f(x)$ 的导数

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^{2d\beta} - e^{2d\beta - 2x\beta}}{x} \right)' \\ &= \frac{2\beta e^{2d\beta - 2x\beta}}{x} - \frac{e^{2d\beta} - e^{2d\beta - 2x\beta}}{x^2} \\ &= \frac{2\beta x e^{2d\beta - 2x\beta} - e^{2d\beta} + e^{2d\beta - 2x\beta}}{x^2}. \end{aligned}$$

上式的分母大于零,而分子为

$$e^{2d\beta - 2x\beta} \cdot (1 + 2x\beta) - e^{2d\beta}.$$

由不等式

$$e^{2x\beta} \geq 1 + 2x\beta,$$

知上式

$$e^{2d\beta-2x\beta} \cdot (1+2x\beta) - e^{2d\beta} \leq e^{2d\beta} - e^{2d\beta} = 0.$$

从而有 $f'(x) \leq 0$.

引理证毕.

下面的定理给出了三维 Ising 模型临界温度的上界.

定理 2 若温度因子 $\beta \leq \frac{1}{2} \ln 1.17$, 则三维 Ising 模型不发生相变.

证明 首先我们注意到, 如果取 $W = \{0, 1\}$, 则 Ising 模型的速度函数应为

$$C(x, \eta) = \exp \left\{ -\beta [2\eta(x) - 1] \sum_{|x-y|=1} [2\eta(y) - 1] \right\}. \quad (3)$$

那么, 三维 Ising 模型的速度函数便可具体地写为

$$C(x, \eta) = \begin{cases} \exp\{6\beta\} & \text{当 } \eta(x) = 0, \sum_{|x-y|=1} \eta(y) = 6 \\ \exp\{4\beta\} & = 5 \\ \exp\{2\beta\} & = 4 \\ \exp\{0\} & = 3 \\ \exp\{-2\beta\} & = 2 \\ \exp\{-4\beta\} & = 1 \\ \exp\{-6\beta\} & = 0 \\ \exp\{6\beta\} & \text{当 } \eta(x) = 1, \sum_{|x-y|=1} \eta(y) = 0 \\ \exp\{4\beta\} & = 1 \\ \exp\{2\beta\} & = 2 \\ \exp\{0\} & = 3 \\ \exp\{-2\beta\} & = 4 \\ \exp\{-4\beta\} & = 5 \\ \exp\{-6\beta\} & = 6 \end{cases} \quad (4)$$

为了利用文献[4]中第三章的定理 1.9, 按该定理的要求, 需要构造

$$\bar{C}(x, \xi) = \begin{cases} \sup\{|C(x, \eta) - C(x, \zeta)| : \\ \quad |\eta(u) - \zeta(u)| \leq \xi(u), \forall u \in S\}, \text{ 当 } \xi(x) = 0 \\ \inf\{[C(x, \eta) + C(x, \zeta)] : \eta(x) \neq \zeta(x) \\ \quad \text{且 } |\eta(u) - \zeta(u)| \leq \xi(u), \forall u \in S\}, \text{ 当 } \xi(x) = 1. \end{cases}$$

由三维 Ising 模型的速度函数, 将 $\bar{C}(x, \xi)$ 具体写出为

$$\begin{cases} \exp\{6\beta\} - \exp\{-6\beta\} & \text{当 } \xi(x) = 0, \sum_{|x-y|=1} \xi(y) = 6 \\ \exp\{6\beta\} - \exp\{-4\beta\} & = 5 \\ \exp\{6\beta\} - \exp\{-2\beta\} & = 4 \\ \exp\{6\beta\} - 1 & = 3 \\ \exp\{6\beta\} - \exp\{2\beta\} & = 2 \end{cases}$$

$$\bar{C}(x, \xi) = \begin{cases} \exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}(\max) & = 1 \\ 0 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \exp\{-6\beta\} + \exp\{-6\beta\}(\min) & = 6 \end{cases} \quad (5)$$

当 $\xi(x) = 1 \quad \sum_{|x-y|=1} \xi(y) = 0$

由上式, 利用引理 1 只要取 $d = 3$ 便可得出

当 $\xi(x) = 0$ 时, $(\exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}) \sum_{|x-y|=1} \xi(y)$ 为其最大者, 而当 $\xi(x) = 1$ 时,

显然 $\exp\{-6\beta\} + \exp\{-6\beta\}$ 为其最小者。于是

$$\tilde{C}(x, \xi) = \begin{cases} (\exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}) \sum_{|x-y|=1} \xi(y) & \xi(x) = 0 \\ 2 \exp\{-6\beta\} & \xi(x) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$C^*(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}}{2 \exp\{-6\beta\}} \sum_{|x-y|=1} \xi(y) & \xi(x) = 0 \\ 1 & \xi(x) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

(7)式即为参数

$$\lambda = \frac{\exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}}{2 \exp\{-6\beta\}}$$

的接触过程的速度函数。由文献 [4] 的第 VI 章的推论 4.4 知, 当三维接触过程的参数 $\lambda \leq 1/5$ 时, 过程遍历。那么由文献 [4] 的第三章的定理 1.9 知, 当

$$\lambda = \frac{\exp\{6\beta\} - \exp\{4\beta\}}{2 \exp\{-6\beta\}} \leq \frac{1}{5} \quad (8)$$

时, 三维 Ising 模型也遍历。

令 $z = \exp\{2\beta\}$, 解不等式 (8) 得

$$z^3(z-1) \leq \frac{2}{5} \rightarrow \beta \leq \frac{1}{2} \ln 1.17.$$

于是得到当 $\beta \in \left(0, \frac{1}{2} \ln 1.17\right)$ 时, 三维 Ising 模型遍历。

证毕。

这一结果同用其它方法给出的 Ising 模型(三维)临界温度的界相比并不好 (见文献 [9])。鉴于人们对 Ising 模型研究的关注 (例如, 对二维 Ising 模型的求解有这样一个论文标题——伊辛模型的第 399 种解法), 作者认为此结果有如下两方面的好处:

1. 这种方法便于处理更高维数的模型。事实上, 对于 n 维的 Ising 模型, 可按 (5) 式构造 $\bar{C}(x, \xi)$ 。由引理 1 知, 当 $\xi(x) = 0$ 时, $\exp\{2n\beta\} - \exp\{2(n-1)\beta\}$ 为其最大者,

而当 $\xi(x) = 1$ 时, 显然其最小者为 $2 \exp\{-2n\beta\}$. 那么

$$C^*(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\exp\{2n\beta\} - \exp\{2(n-1)\beta\}}{2 \exp\{-2n\beta\}} \sum_{|x-y|=1} \xi(y) & \xi(x) = 0, \\ 1 & \xi(x) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

于是按处理三维的同样方法, 只需求解不等式

$$\exp\{2\beta(2n-1)\}(\exp\{2\beta\} - 1) \leq 2/2n - 1 \quad (10)$$

即可. 由上式可见, 当维数 n 很大时, 不等式的右边趋于零, 而左边的第一项恒大于零. 只有第二项, 当 $\beta = 0$ 时才为零. 即当维数 $n \rightarrow \infty$ 时, $\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow 0$ 成立, 模型才遍历. 按物理的解释是, 当维数很高时, 只有温度也充分高时, 模型才不被磁化. 这与物理上的结论一致.

2. 这种方法所得的结果与接触过程相联系. 它将随接触过程的结果的改进而改进.

- [1] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65** (1944), 117.
- [2] 于渌, 郝柏林, 相变和临界现象, 科学出版社, (1984).
- [3] R. Peierls, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **36** (1936), 477.
- [4] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, New York, Heidelberg Berlin: Springer (1985).
- [5] R. L. Dobrushin, *Theory Probab. Appl.*, **10**(1965), 193.
- [6] R. L. Dobrushin and Ya. G. Sinai, *Math. Phys. Rev.*, **1**(1980), 55.
- [7] 樋口保成, 数理科学, **19** 第 6 号 6(1981), 40.
- [8] С. Б., Шлосман, *Успехи математических наук*, **41** (3) (1986), 69.
- [9] J. O. Vignfusson, *J. Phys. A*, **18** (1985), 3417.

THE UPPER LIMIT OF CRITICAL TEMPERATURE OF N-DIMENSIONAL ISING MODEL

LUAN CHANG-FU

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

In the present article, by using coupling technique, we establish the relation between Ising model and contact process. From this relation, the upper limit of critical temperature of higher dimensional Ising model is obtained. That is, the critical point $\beta_c(n)$ of n -dimensional Ising model must satisfy

$$\exp\{2\beta_c(n)(2n-1)\} \cdot (\exp\{2\beta_c(n)\} - 1) \geq 2/2n - 1$$

and especially, critical point $\beta_c(3)$ of the three-dimensional Ising model must satisfy

$$\beta_c(3) > \frac{1}{2} \ln 1.17.$$