

宽谱热光偏振态的统计描述

刘培森

北京理工大学工程光学系, 北京, 100081

秦克诚

北京大学物理系, 北京, 100871

1989年7月14日收到

本文从宽谱热光光振动在垂直于光波传播方向的平面内的两个正交分量联合统计性质出发, 导出偏振度概念, 给出该两个正交分量在各种偏振态下的联合概率密度函数, 从而全面描述了宽谱热光的偏振现象.

PACC: 4210

关于部分偏振光的研究是统计光学的重要课题之一, 多年来一直为人们所瞩目^[1-8]. 不过迄今为止, 这方面的工作都限于准单色光的情形, 对宽谱热光的偏振现象尚未见到系统的讨论, 从而使有关理论不够完备. 实际上, 光的偏振态与光谱宽度密切相关. 例如, 单色光必然是完全偏振的, 而宽谱热光则可以是完全不偏振的自然光. 为了描述宽谱热光的偏振性质, 固然可以设想将给定的宽谱热光分解成若干彼此独立的准单色成分, 利用 Wolf 等人提出的相干矩阵的性质和准单色光偏振态的模型^[1,3], 通过叠加, 最后从总体上考察宽谱热光的偏振现象. 但本文想探讨一个更为直接、更为一般的方法, 将从光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的两个正交实值分量 (E_x, E_y) 出发, 利用它们的联合统计性质, 全面描述宽谱热光的偏振态, 为之建立准确而清晰的物理图象.

热光光振动矢量与二维高斯随机变量

设空间任一给定点 P 处的热光光振动来自 N 个独立的发光中心. 令 P 点处的热光光振动矢量为 $\mathbf{E}$, 第 i 个发光中心在该点产生的光振动矢量为 $\mathbf{E}_i$, 则有

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i. \quad (1)$$

在光场中取直角坐标系 (x, y, z) . 为简便起见, 假定光波沿 z 轴方向传播, 而将所有光振动矢量都分解成沿 x 和 y 两个方向的分量, 即有

$$\mathbf{E}_i = (E_{xi}, E_{yi}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(\sum_{i=1}^N E_{xi}, \sum_{i=1}^N E_{yi} \right). \quad (3)$$

热光由来自大量发光中心、彼此独立的自发辐射叠加而成. 本文对所讨论的自发辐射的统计性质作如下假设:

- 1) 诸发光中心的相干时间极短, 亦即它们发出的每个波列的长度极小, 从而辐射的

谱带极宽,可近似看作是“白热光”。

2) 诸发光中心的辐射(包括振动方向)互相统计独立;同一发光中心的不同波列互相统计独立;同一波列的振幅和位相互统计独立。

3) 诸发光中心的辐射的随机位相在 $(-\pi, \pi)$ 区间上均匀分布。

根据上述假设,可以把诸 $E_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 看作是均值为零、彼此独立的二维随机变量。由于发光中心的数目 N 总是充分大的,根据二维中心极限定理^[7,9],可将(1)和(3)式确定的热光光振动矢量 E 足够精确地看作是二维实值高斯随机变量。换言之, E 的两个实值分量 E_x 和 E_y 的联合分布应具有二维高斯分布的形式。考虑到由于诸 E_{xi} 与诸 E_{yi} 的均值为零, E_x 与 E_y 的均值当亦为零的情况, E_x 与 E_y 的联合概率密度函数可表为

$$p(E_x, E_y) = \frac{\exp \left[-\frac{\sigma_y^2 E_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} E_x E_y + \sigma_x^2 E_y^2}{2\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)} \right]}{2\pi \sigma_x \sigma_y (1 - \rho_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4)$$

式中 σ_x^2 和 σ_y^2 分别为 E_x 和 E_y 的方差, ρ_{xy} 为 E_x 与 E_y 之间的相关系数,而有

$$\rho_{xy} = \frac{\langle E_x E_y \rangle}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (5)$$

这里尖括弧 $\langle \dots \rangle$ 表示取统计平均(或称系综平均)。不难证明,在一般情况下,方差 σ_x^2 和 σ_y^2 以及相关系数 ρ_{xy} 都与热光光振动两个分量 E_x 和 E_y 的空间取向有关。对此指出以下两点:

(1) 若将热光光振动分解成另外一对正交分量 (E_{x1}, E_{y1}) , 其空间取向如图1所示,则 E_{x1} 和 E_{y1} 各自的方差可分别表示为

$$\sigma_{x1}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \theta + \sigma_y^2 \sin^2 \theta + \sigma_x \sigma_y \rho_{xy} \sin 2\theta, \quad (6)$$

$$\sigma_{y1}^2 = \sigma_x^2 \sin^2 \theta + \sigma_y^2 \cos^2 \theta - \sigma_x \sigma_y \rho_{xy} \sin 2\theta, \quad (7)$$

式中 θ 的意义见图1。

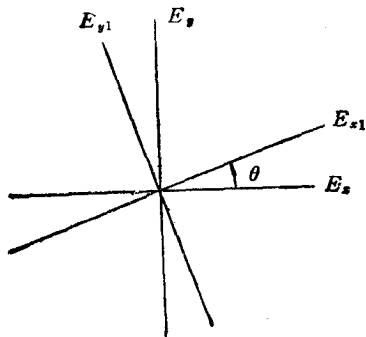


图 1

(2) 存在着方差相等(设同为 σ_0^2)的正交分量 (E_{x0}, E_{y0}) , 若令该两个分量的相关系数为 ρ_0 , 并以它们的空间取向为基准, 则其它取向的正交分量 (E_x, E_y) 的相关系数可表为

$$\rho_{xy} = \frac{\cos 2\theta}{(1 - \rho_0^2 \sin^2 2\theta)^{\frac{1}{2}}} \rho_0, \quad (8)$$

式中 θ 为具有任一取向正交分量 (E_x, E_y) 与 (E_{x0}, E_{y0}) 对应分量间的夹角。因为

$$\left| \frac{\cos 2\theta}{(1 - \rho_0^2 \sin^2 2\theta)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq 1, \quad (9)$$

故有

$$|\rho_{xy}| \leq \rho_0. \quad (10)$$

等概率密度椭圆与偏振度

由(4)式可知, E_x-E_y 平面上的等概率密度曲线由方程

$$\sigma_y^2 E_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} E_x E_y + \sigma_x^2 E_y^2 = \text{const} \quad (11)$$

确定。不难看出,该方程对应着一个椭圆族。若取 $\rho_{xy} = 0$, 则(11)式化简为

$$\frac{E_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{E_y^2}{\sigma_y^2} = \text{const}. \quad (12)$$

这是一个正椭圆族,见图2。(12)式表明,热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 沿着等概率密度椭圆族两个主轴方向的两个分量 E_x 与 E_y 之间统计不相关。由(4)式可推知,这种统计不相关也就意味着该两个分量 E_x 与 E_y 之间统计独立。(12)式还表明,该两个分量各自的方差 σ_x^2 与 σ_y^2 之比等于椭圆族相应的两个主轴长度之比。这就是说,不同概率密度对应的椭圆的长短轴之比相同。为更加明确起见,把热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 沿等概率密度椭圆族两个主轴方向的分量分别记为 E_a 和 E_b , 并用 σ_a^2, σ_b^2 和 ρ_{ab} 分别表示它们各自的方差和彼此的相关系数,已知

$$\rho_{ab} = 0. \quad (13)$$

由(6)–(8)式可得

$$\sigma_a^2 = (1 + \rho_0) \sigma_0^2, \quad (14)$$

$$\sigma_b^2 = (1 - \rho_0) \sigma_0^2. \quad (15)$$

无论是从等概率密度椭圆的几何图象,还是从解析计算都可得知 σ_a^2 和 σ_b^2 是有可能分量的方差的极值: 当 $\rho_0 > 0$ 时, σ_a^2 为最大值, σ_b^2 为最小值; 当 $\rho_0 < 0$ 时, 则相反。

为了进一步讨论,现在说明热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的任一实值分量 E_k 的方差 σ_k^2 的物理意义。在前述假设的前提下,不难证明,热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的任一分量的瞬时强度(指与该分量对应的解析信号瞬时值的模的平方)的统计平均值等于该分量的方差的两倍^[5,7]。另外,通常总可认为热光是各态历经随机过程。因此,上述任一振动分量瞬时强度的统计平均值可代之以时间平均值——光强^[5,7]。于是,热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的任一实值分量 E_k 对应的光强 I_k 与 E_k 的方差 σ_k^2 之间有以下关系:

$$I_k = 2\sigma_k^2. \quad (16)$$

由此可见, E_a 和 E_b 这两个分量所对应的光强可分别表示为

$$I_a = 2\sigma_a^2 = 2(1 + \rho_0)\sigma_0^2, \quad (17)$$

$$I_b = 2\sigma_b^2 = 2(1 - \rho_0)\sigma_0^2. \quad (18)$$

由前述可知,在热光光振动所有可能分量的光强中,当 $\rho_0 > 0$ 时, I_a 为最大值, I_b 为最小值,即 $I_{\max} = I_a$, $I_{\min} = I_b$; 当 $\rho_0 < 0$ 时,则有 $I_{\min} = I_a$, $I_{\max} = I_b$ 。

显然, $I_{\max}$ 和 $I_{\min}$ 很容易测得,而它们对应的方向正是热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的任一

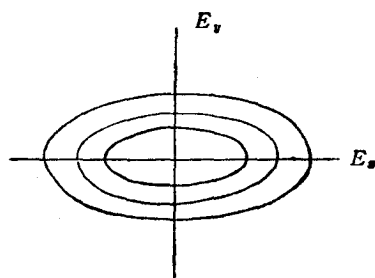


图 2

对正交实值分量的等概率密度椭圆的主轴。现在把宽谱热光的偏振度定义为

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{I_a - I_b}{I_a + I_b} \right|. \quad (19)$$

显然有 $0 \leq P \leq 1$, 由(17)–(19)三式可推知

$$P = |\rho_0|. \quad (20)$$

这就是说,宽谱热光的偏振度 P 刚好等于热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的一对等方差(即等光强)正交分量的相关系数 ρ_0 的绝对值(亦即热光光振动矢量所有可能正交分量对的相关系数的最大值)。不难看出,该对正交分量的空间取向与等概率密度椭圆主轴(即光强极值方向)成 45° 。下面将会进一步看到,这样引入的偏振度概念能够全面而准确地描述宽谱热光的偏振态。

讨 论

1. 当 $P = 0$ 时, $\rho_0 = 0$ 。由(14)和(15)两式可知此时

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_0^2.$$

换言之,此时等概率密度椭圆长短轴的长度相同。这就是说,当 $P = 0$ 时,等概率密度曲线是以 E_x - E_y 平面的原点为中心的同心圆族,

$$E_x^2 + E_y^2 = \text{const.}$$

由此不难推知,此时热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的诸分量的光强相等而不随分量的空间取向变化。另外,既然此时 $\rho_0 = 0$, 则由(10)式可推知此时热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的任意正交分量 (E_x, E_y) 之间的相关系数 ρ_{xy} 恒为零。进而由(4)式可知,此时 $\mathbf{E}$ 的任意两个正交分量之间恒为统计独立,而与它们的取向无关。实际上,这就是完全不偏振的热光,亦即自然光。此时 E_x 与 E_y 的联合概率密度函数可表示为

$$p_x(E_x, E_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{E_x^2 + E_y^2}{2\sigma_0^2}\right). \quad (21)$$

2. 当 $P = 1$ 时, $|\rho_0| = 1$ 。由(14)和(15)两式可知,这时有两种情况,即对应于 $\rho_0 = 1$ 有

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 2\sigma_0^2, \\ \sigma_y^2 &= 0; \end{aligned}$$

对应于 $\rho_0 = -1$, 有

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 0, \\ \sigma_y^2 &= 2\sigma_0^2. \end{aligned}$$

这两种情况都意味着 E_x - E_y 平面上的等概率密度椭圆族此时“退化”为通过原点的一条直线从我们讨论的目的看,对上述两种情况无须再作区分。至此,可以看到,当 $P = 1$ 时宽谱热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的取向限定在该直线上,因此这时热光具有直线偏振态。为方便起见,将光振动矢量取向所在直线取为 E_x 轴,并将不等于零的 σ_x^2 或 σ_y^2 改记为 σ_z^2 。于是,不难证明,此时热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的正交分量 E_x 与 E_y 的联合概率密度函数可表示为

$$p_l(E_x, E_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{E_x^2}{2\sigma_x^2}\right) \delta(E_y), \quad (22)$$

式中 $\delta(\dots)$ 为狄喇克 δ 函数。一般说来, 直线偏振是完全偏振态的基本形式之一。然而, 对宽谱热光, 直线偏振则是其完全偏振态的唯一可能形式。这是因为完全偏振态中的椭圆偏振和圆偏振只能严格地存在于单色光, 或近似地存在于准单色光, 它们都超出了本文所讨论的宽谱热光的范畴。

3. 当 $0 < P < 1$ 时, $0 < |\rho_0| < 1$, E_x - E_y 平面上的等概率密度曲线是椭圆; 宽谱热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 的诸分量光强随分量的空间取向变化; 光强最小值大于零。此时热光是部分偏振的。部分偏振的准单色光可以看作是由完全偏振光与自然光这两种相互独立的成分叠加而成, 从而可将其偏振度定义为完全偏振光成分的光强与总光强之比。下面将会看到, 对部分偏振的宽谱热光可以作类似处理。实际上, 因为本文讨论的宽谱热光的完全偏振态只能是直线偏振光, 所以如果仿照对部分偏振准单色光所作的上述处理, 则应该将部分偏振宽谱热光看作是直线偏振光与自然光这两个独立成分合成的结果。不难看出, 按照这种处理方式导出的宽谱热光偏振度的定义, 实际上与(19)式完全一致。另外, 自然光和宽谱直线偏振光两者各自的正交分量 E_x 与 E_y 的联合概率密度函数已分别由(21)和(22)两式给出。既然部分偏振的宽谱热光可以看作是由相应的自然光与直线偏振光这两个互相独立的成分叠加而成, 则部分偏振宽谱热光的正交分量 E_x 与 E_y 的联合概率密度函数 $p(E_x, E_y)$ 应为(21)和(22)式所确定的两个概率密度函数之卷积, 即

$$p(E_x, E_y) = p_l(E_x, E_y) \otimes p_n(E_x, E_y),$$

式中 $\otimes$ 表示卷积运算。由(21)和(22)两式不难求得

$$p(E_x, E_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_0(\sigma_0^2 + \sigma_{xl}^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{E_x^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{xl}^2} + \frac{E_y^2}{\sigma_0^2}\right)\right], \quad (23)$$

式中 σ_0^2 和 σ_{xl}^2 分别表示自然光成分和直线偏振光成分各自对应的有关方差。令

$$\sigma_x = (\sigma_0^2 + \sigma_{xl}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_y = \sigma_0,$$

则(23)式可写成

$$p(E_x, E_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{E_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{E_y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]. \quad (24)$$

不难看出, 上式给出的恰好是宽谱热光光振动矢量 $\mathbf{E}$ 沿等概率密度椭圆两个主轴方向的分量 E_x 与 E_y 的联合概率密度函数, 其中参量 σ_x^2 和 σ_y^2 可通过测量相应方向的光强来确定[参见(16)式]。函数 $p(E_x, E_y)$ 描述了部分偏振宽谱热光的统计性质, 其物理意义是显然的。至此可以看出, 将部分偏振宽谱热光看作是相应的直线偏振光与自然光两个独立成分的叠加结果, 在理论上完全自治。

- [1] E. Wolf, *Nuovo Cimento*, 13(1959), 1165.
- [2] G. B. Parrent and P. Roman, *Nuovo Cimento*, 15(1960), 370.
- [3] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, second edition, MacMillan Company, (1964).
- [4] M. V. Klein, *Optics*, John Wiley & Sons, (1970).
- [5] J. W. Goodman, *Statistical Optics*, John Wiley & Sons, (1985).
- [6] R. Barakat, *Optica Acta*, 32(1985), 295.
- [7] 戚康男、秦克诚、程路, 统计光学导论, 南开大学出版社, (1987).

- [8] R. Barakat, *J. Opt. Soc. Amer.* **A4**(1987), 1256.
[9] H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Univ. Press, (1946).

STATISTICAL DESCRIPTION OF POLARIZATION STATES OF BROADBAND THERMAL LIGHT

LIU PEI-SEN

Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081

QIN KE-CHENG

Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871

(Received 14 July 1989)

ABSTRACT

Starting from the joint statistics of the orthogonal components of the broadband thermal light vibration, which are normal to the propagation direction of light wave, we derive the concept of polarization degree and the joint probability density functions of those two orthogonal components in various polarization states, so that an overall description of polarization of the broadband thermal light is obtained.

PACC: 4210