

二维 Mellin 变换的实现

郑师海 陈岩松 李德华

中国科学院物理研究所, 北京, 100080

1989年6月23日收到

本文分析了 Mellin 变换的光学实现问题, 提出一种实现 Mellin 变换的新方法, 并对此进行了实验研究和给出了实验结果.

PACC: 4230; 4240

一、引 言

由于 Mellin 变换具有标尺度不变性, 在光学模式识别中受到许多学者的重视和研究^[1,2]. 作者也曾报道了用光学一般变换原理^[3]实现一维 Mellin 变换的研究结果^[4]. 但是, 由于该变换是空间平移可变的, 且在坐标空间的第一象限; 加之由于技术条件的限制, 变换只能在有限抽样点下进行, 给实验带来了很大困难. 本文在分析上述问题的基础上, 从理论到实验提出了一套解决上述困难的方法, 并进行了可实现二维 Mellin 变换全息透镜的设计和实验, 得到了预定的变换谱, 取得了理论同实验一致的结果.

二、二维 Mellin 变换透镜的设计

二维 Mellin 变换的定义为

$$M(ju, jv) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy. \quad (1)$$

显然, 该变换只能在空间坐标的第一象限进行, 为了克服这一限制带来的实际实验操作的困难, 引进一个新的变换, 定义为

$$M'(ju, jv) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) |x|^{ju-1} |y|^{jv-1} dx dy, \quad (2)$$

式中 $x \neq 0$, $y \neq 0$. 为了将(2)式定义的变换与(1)式进行比较, 故将(2)式展开写成不带绝对值号的形式并进行适当整理得

$$\begin{aligned} M'(ju, jv) = & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(-x, y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy \\ & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, -y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy \\ & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(-x, -y) x^{ju-1} y^{jv-1} dx dy. \end{aligned} \quad (3)$$

(1)式与(3)式相比较可以看出,(2)式实现的变换是函数 $f(x, y)$ 各自在四个象限分布的 Mellin 变换谱的叠加. 因此,(2)式定义的变换具有 Mellin 变换的性质. 但取消了函数必须严格放置在空间坐标的第一象限的要求, 避免了操作困难. 如果仅把输入函数放置在空间坐标的任何一个象限; 或者输入函数为偶函数, 所得的变换谱恒等于 Mellin 变换谱. 除此之外, 新变换还具有以下性质(为了讨论简捷, 以下均讨论一维情况, 然后直接推广到二维):

设宽度为 a 的狭缝为输入函数, 则(2)式给出的变换有

$$\int_{-\frac{a}{2}+b}^{\frac{a}{2}+b} |x|^{iu-1} dx = \int_{-\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}-b} |x|^{iu-1} dx. \quad (4)$$

由于技术条件的限制, 实验只能在一定抽样点的条件下进行. 这一性质为精确确定输出谱的标尺度, 带来了极大方便.

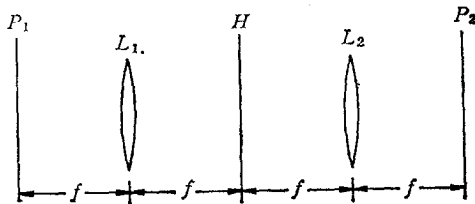


图 1

图 1 所示的光路是作者实现光学变换的一种基本光路^[2], 它实现的变换 $\tilde{G}$ 可以表示为

$$\tilde{G} = G_0(f_2) H G_0(f_1), \quad (5)$$

式中 H 为计算机产生的全息图, $G_0(f_1)$ 和 $G_0(f_2)$ 为傅里叶透镜 L_1, L_2 实现的变换. 设输入平面的抽样点数为 N_1 , 最大孔径为 x_{m1} ; 全息平面的抽样点数为 N , 最大孔径为 x_m ; 输出平面的抽样点为 N_2 , 最大孔径为 x_{m2} ; f_1, f_2 分别为透镜 L_1, L_2 的焦距. 以下没有特殊说明的定义均相同. 在满足条件

$$N = N_1 N_2, \quad f_1 = x_{m1} x_m / \lambda N_1, \quad f_2 = x_{m2} x_m / \lambda N \quad (6)$$

时, 对于一维变换, 全息图的计算公式为

$$H(k) = \frac{1}{B} \sum_{\frac{-N_1}{2}+0.5}^{\frac{N_1}{2}-0.5} \sum_{\frac{-N_2}{2}+0.5}^{\frac{N_2}{2}-0.5} G(I, J) [G_0^*(f_2)]_{Ik} [G_0^*(f_1)]_{Jk}, \quad (7)$$

$$k = \frac{-N}{2} + 0.5, \quad \frac{-N}{2} + 1.5, \dots, \quad \frac{N}{2} - 0.5,$$

$$[G_0^*(f_2)]_{Ik} = \exp(-2\pi k I j / N_2), \quad (8)$$

$$[G_0^*(f_1)]_{Jk} = \exp(2\pi k J j / N), \quad (9)$$

$G(I, J)$ 为(2)式变换的积分核, 它的抽样表示为

$$G(I, J) = |\Delta x I|^{i\Delta u J - 1}, \quad (10)$$

$\Delta x, \Delta u$ 为输入平面和输出平面去掉量纲后的步长. 考虑到系统的分辨率, 本文实验取

$\Delta x = 1/N_1$, $\Delta u = 0.5$, B 为归一化常数。

值得指出的是, (8), (9) 式均忽略了抽样点的几何尺寸的影响。关于这个问题, 文献 [6] 已进行了详细讨论。本文对输入抽样点的几何尺寸的影响, 将在制造全息图时进行考虑。

将 (8), (9) 和 (10) 式代入 (7) 式, 通过矩阵相乘, 可以得到实现一维变换全息图的振幅和相位分布。令其表示为

$$H(k) = A(k) \exp[j\phi(k)]. \quad (11)$$

由于 Mellin 变换是正交变换, 二维全息图的振幅和相位可以直接利用一维全息图相乘得到, 即

$$H(k, l) = H(k)H(l) = A(k, l) \exp[j\phi(k, l)], \quad (12)$$

l 取值范围与 k 相同。

对于实现给定变换的一维全息图的制作, 作者在文献 [7] 中进行了详细介绍。如果将这种方法直接应用到二维, 实际就是迂回相位的编码方法。这种方法除了存在一定的噪声外, 在单个平面波照明下, 全息图的一级衍射波比例于需要的振幅和相位。但是, 在进行光学变换时, 全息图被来自输入点各个方向的平面波照明。从输出某点看, 全息图对于不同的输入点具有不同的相位, 其相位偏差为

$$\Delta\phi = \frac{l\phi(k, l)}{N}, \quad (13)$$

式中 l 的取值方向与全息图的相位编码方向一致。 $l_{\max} = N_1$, 在 $N_1 = 32$ 的情况下, $\Delta\phi_{\max} \approx 0.03\phi(k, l)$ 。然而, 由于变换结果必须对输入平面和全息平面求和, 积累误差将严重影响输出结果。

为了解决上述问题, 可以采用复杂的计算机产生全息图的振幅和相位的编码方式, 对于高抽样点全息图、全息图的制作将非常昂贵。为此, 采用图 2 所示的马赫-泽德干涉仪的变化形式, 将两张一维全息图相互垂直放置到两个支路中。其中一个支路在 P_1 平面通过空间滤波器, 取正一级, 另一支路在 P_2 平面通过空间滤波器取负一级, 在像平面 P_3 平面相干叠加并用全息干板进行记录。如果设两束光的夹角为 α , 则

$$|H(k)e^{-i\frac{\alpha}{2}x} + H^*(l)e^{i\frac{\alpha}{2}x}|^2 = |H(k)|^2 + |H(l)|^2$$

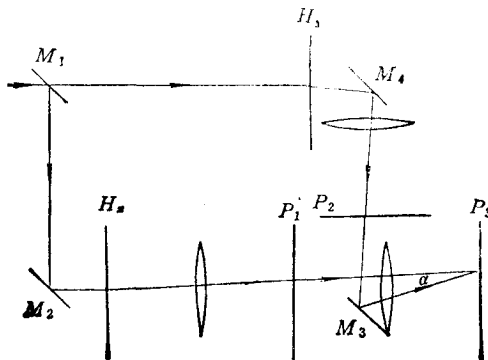


图 2

$$+ H(k)H(l)e^{-i\alpha x} + H^*(k)H^*(l)e^{i\alpha x}. \quad (14)$$

适当选择 α 角并进行特殊处理, 在 α 方向可得到全息图振幅透过率比例于 $H(k)H(l)$.

原则上讲, 如此得到全息图仍然存在(13)式的相位偏差. 由于此时全息图总干涉条纹数为 $x_m \sin \alpha / \lambda \gg N$, λ 为使用的波长, (13)式表示的相位偏差将变为无限小. 因此, 此种方法不仅简化了全息图的制作, 而且大大提高了全息图的相位精度.

三、实验结果

一维全息图的制作采用文献[6]的编码方法, 用图象发生器一次制版完成. 取 $N_1 = N_2 = 32$, 全息图在 x 轴方向, 即实现变换的坐标方向, 抽样周期 $dx = 0.02\text{mm}$, 在 y 轴方向, 即振幅和相位编码方向, 抽样周期为 $dy = 0.2\text{mm}$. 为了实验方便, 在全息图 $x = 0, y = \pm 14\text{mm}$ 处, 制作有对位标志. 在复制二维全息图时, 亦将对位标志复制在全息图上.

图 3 给出的是一组矩形输入函数的实验结果.

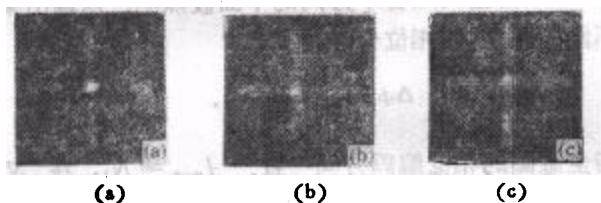


图 3

设输入孔径的最大尺寸为 $x_{m1}x_{m1}$, 图 3 (a), (b), (c) 的输入孔径的尺寸大小分别为 $x_{m1}x_{m1}$, $0.65x_{m1} \cdot 0.65x_{m1}$ 和 $0.35x_{m1} \cdot 0.35x_{m1}$.

根据(3)式, 图 3 (a), (b), (c) 应分别等于矩形输入函数的尺寸大小, 即为 $x_{m1}/2 \cdot$

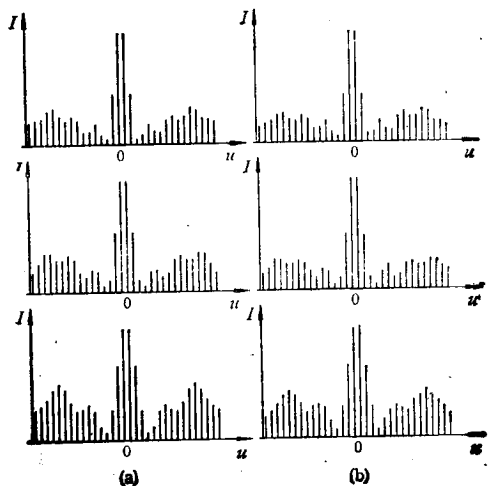


图 4

$x_{m1}/2$, $0.325x_{m1} \cdot 0.325x_{m1}$ 和 $0.175x_{m1} \cdot 0.175x_{m1}$ 的 Mellin 变换。图 4(a) 是与图 3(a),(b),(c) 相应的输入函数用一维 Mellin 变换公式

$$M(ju) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{ju-1}dx$$

的数字计算结果。图 4(b) 是图 3 的相应实验在输出平面 $y=0$ 时, x 方向的一维数字扫描的输出结果。图 4(a),(b) 相比较可以看出, 理论与实验结果一致。图 4 所有曲线均分别归一。

但是, 从图 3 也可以看出, 本实验存在着一定的噪声, 其原因是由于计算机产生的全息图的固有噪声和相干复制造成的。此外, 理论同实验存在着一定偏差, 除了噪声原因外, 在一维全息图的制作和二维全息图的复制过程中均存在着振幅动态范围的限制。

四、结 论

本文中定义了一个新变换, 并用它实现了 Mellin 变换。由于该变换取消了必须将输入函数放置在空间坐标第一象限的限制, 它将在标尺度可变的模式识别中比 Mellin 变换更为有效。

在实验中, 采用了通过两个一维全息图相干叠加和适当处理, 实现了二维全息图的制作, 提高了实验精度。

本方法曾同杨国桢教授进行过有益讨论, 谨致谢意。

- [1] J. W. Goodman, *Appl. Opt.*, **16**(10) (1977), 2609.
- [2] R. J. Marks II *et al.*, *Appl. Opt.*, **18** (6) (1979), 754.
- [3] 杨国桢, 物理学报, **30**(1981), 1340.
- [4] 郑师海、杨国桢、林清景、李国桢, 物理学报, **35**(1986), 529.
- [5] 郑师海、董碧珍、王玉堂、陈岩松, 光学学报, **1**(1987), 236.
- [6] 陈岩松、郑师海、李德华, 物理学报, **35**(1986), 1390.
- [7] 陈岩松、郑师海、李德华, 物理学报, **37**(1988), 261.

REALIZATION OF TWO-DIMENSIONAL MELLIN TRANSFORM

ZHENG SHI-HAI CHEN YAN-SONG LI DE-HUA

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 23 June 1989)

ABSTRACT

In this paper, we analyze optical realization of the 2-D Mellin transform, and propose a new method to perform the transform. The 2-D Mellin transform experiment is carried out, and the experimental results are given.

PACC: 4230; 4240