

q -畸变振子系统的解和 q -振子代数*

阎 宏¹⁾

中国科学院理论物理研究所, 北京, 100080

1990 年 12 月 13 日收到

本文讨论 q -畸变振子系统的解和 q -振子代数及其表示的问题, 并对 $|q| = 1$ 的情形进行详细的研究. 给出 $SU_q(2)$ 及 q -振子代数(记为 $H_q(4)$)之间的联系. 给出单 q -振子系统的解, 并指出它与普通仲费密振子之间的类似行为, 对行为类似于 1, 2, 3 阶仲费密子的 q -振子系统进行了尤为详细的讨论. 最后, 研究 $H_q(4)$ 的表示及其性质, 并简单地讨论 q -畸变振子的链模型的解.

PACC: 0220; 0221

半单李代数可以作为一种物理的对称性在简谐振子体系中实现, 习惯上, 这种实现称作 Jordan-Schwinger 表示. 类似地, q -畸变振子体系可以给出量子包络代数^[1-4]的一种类似的表示, 比如半单李代数 A_n , C_n 以及李超代数所对应的量子包络代数的 q -畸变 Jordan-Schwinger 表示^[5,6]. 因而 q -畸变振子及 $H_q(4)$ 代数是研究量子包络代数的一种重要工具, 应予以深入的研究.

q -畸变振子体系的典型哈密顿量是

$$\mathcal{H}_q = \frac{1}{2} (h^+ h^- + h^- h^+),$$

其中 h^+ 和 h^- 分别是 q -畸变的产生和湮没算符. 当 $q \rightarrow 1$ 时, $h^+, h^- \rightarrow a^+, a$ 即简谐振子体系的产生和湮没算符. 令 $h^3 = a^+ a + 1/2$, 则 h^+, h^- 和 h^3 有如下的代数关系^[5-9]:

$$[h^+, h^-] = [h^3 - 1/2]_{q^2} - [h^3 + 1/2]_{q^2} = -[2h^3]_{(+, q)}, \quad (1a)$$

$$[h^3, h^\pm] = \pm h^\pm, \quad (1b)$$

其中使用了简化记号

$$[x]_q = \frac{\sinh(\gamma x)}{\sinh \gamma}, \quad [x]_{(+, q)} = \frac{\cosh(\gamma x)}{\cosh \gamma}, \quad \gamma = \ln q.$$

当 $q \rightarrow 1$ 时, $h^\pm \rightarrow a^\pm$, a , q -畸变振子体系回到简谐振子体系, 而后的 Hilbert 空间就是 Fock 空间

$$F^\infty = \left\{ |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, n \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

* 国家自然科学基金与中国高等科学技术中心 1990 暑期工作项目资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

其中 n 是 a^+a 的本征值, 基态 $|0\rangle$ 意义是

$$a|0\rangle = 0.$$

另一方面, 量子代数 $SU_q(2)$ 描述一个 q -畸变的角动量(或自旋)体系^[7], 具有代数关系

$$[J^+, J^-] = [2J^3]_q, \quad (2a)$$

$$[J^3, J^\pm] = \pm J^\pm. \quad (2b)$$

当 $q \rightarrow 1$ 时即回到 $SU(2)$ 对称性, 描述一个普通的角动量(或自旋)体系, 体系的 Hilbert 空间即 Dicke 空间

$$\rho^j = \left\{ |j, m\rangle = \sqrt{\frac{[j-m]_q!}{[j+m]_q![2j]_q!}} (J^+)^{j+m} |j, -j\rangle, \right. \\ \left. m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \right\}.$$

读者可能已经注意到在简谐振子和角动量体系之间存在着明显的相似性, 这一相似性意味着在两个体系之间存在着深刻的联系. 这一联系可以用代数收缩的方法揭示出来^[10,11]. 考虑如下的变换 $A(c)$, 它把 $u(2)$ 代数的生成元线性变换到一组新的生成元

$$\begin{pmatrix} h^+ \\ h^3 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & & \\ & 1 & -\frac{1}{2c^2} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^+ \\ J^3 \\ J^0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 h^0 和 J^0 基本上就是单位元. $u(2)$ 的代数关系变换到

$$[h^3, h^\pm] = \pm h^\pm, \quad (4a)$$

$$[h^+, h^-] = 2c^2 h^3 - h^0, \quad (4b)$$

$$[\cdot, h^0] = 0. \quad (4c)$$

这组新算符作用在 Dicke 空间中时给出

$$h^\pm |j, m\rangle = c \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \quad (5a)$$

$$h^3 |j, m\rangle = \left(m + \frac{1}{2c^2}\right) |j, m\rangle. \quad (5b)$$

考虑具有较高 j 值的 Dicke 空间中靠近基态的一些激发态时, 即考虑 $c^2 = 1/2j$, $j \rightarrow \infty$ 而 $j+m=n$ 为有限的情况时, 这个系统的行为与简谐振子系统一样. 此时变换 $A(c \rightarrow 0)$ 是奇怪、无逆的, 但变换之后的对易关系仍是定义得好的,

$$[h^+, h^-] = -1, [h^3, h^\pm] = \pm h^\pm, [\cdot, h^0] = 0. \quad (6)$$

与简谐振子代数 $\mathcal{H}(4)$ 相同. 记 $|n\rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} |j, m\rangle$, 则可由此得到 Fock 空间 F^∞ .

实际上, 角动量系统中的每一条性质都可以在简谐振子体系中找到对应^[11]. 一般地, 如果李代数生成元经过一个奇性线性变换, 并且结构常数有一个定义得好的极限时, 新的李代数就产生了, 后者就称作原来代数的收缩极限. 如果原有李代数是半单的, 则收缩极限必定是非半单的^[10].

那么会有一个很自然的问题, 即在 q -畸变振子系统与 q -畸变的角动量系统之间是

否会有类似的关系呢? 以上讨论的代数收缩的方法可以有一个直接的推广^[8], 它把 q -畸变的角动量系统与 q -畸变的振子系统联系起来. 考虑 q 为实的情况^[8], 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $[j]_q \rightarrow q^j/(q - q^{-1})$, 从而可定义新的算符 $b^\pm = J^\pm \sqrt{[2j]_q}$ 和 $N = J^3 + j \cdot 1$ 使得有如下的对易关系:

$$[b^+, b^-] = \frac{[2N - 2j \cdot 1]_q}{[2j]_q} \rightarrow q^{-2N}, [N, b^\pm] = \pm b^\pm. \quad (7)$$

这就是对 $\mathcal{H}_q(4)$ 代数的等效描述^[8]. 而 q -畸变的 Dicke 空间 $\rho^{j \rightarrow \infty}$ 同时变换成为 q -畸变的 Fock 空间. 事实上, 注意取 $n = j + m$ 为有限时即有

$$F_q^\infty = \left\{ |n\rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} |j, m\rangle = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{[n]_q!}} |0\rangle, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (8)$$

从而代数 $\mathcal{H}_q(4)$ 可严格地定义成为 $SU_q(2)$ 代数的收缩极限. 文献[8]要求 q 取实数, 而事实上这一定义对 q 为任意复数但 $|q| \neq 1$ 都成立. 在考虑这一推广时须注意到定义代数元素的对偶元素时, q 应当成形式变量不取复共轭, 这也是讨论定义在复域上的 Hopf 代数的惯用方法. 但是, 当这样做了以后, 仍然不能把 q 为么模的情况包括进去, 这样就不能讨论 q 为单位根这一重要情形. 本文将讨论 q 为么模复数时的 $\mathcal{H}_q(4)$ 代数的一些基本性质, 例如它是否 Hopf 代数, 如果是, 其 Hopf 运算如何定义, 它的表示如何构造及基本性质等数学问题; 以及 q -畸变振子作为一个量子力学体系所具有的基本物理性质, 如 q -畸变 Fock 空间、能级变化规律等方面的问题. 除非特别声明, 下面的讨论隐含 $|q| = 1$ 及 $q^2 \neq 1$ 这两条件.

考虑如下的变换 A_q , 它把 q -畸变的角动量(或自旋)体系变换成为 q -畸变的振子体系:

$$\begin{pmatrix} J^+ \\ J^3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_q} \begin{pmatrix} h^+ \\ h^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tan \gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha/\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^+ \\ J^3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = i\bar{\gamma}, \quad (9)$$

其中 $\alpha = k\pi + \pi/4$ ($k \in \mathbb{Z}$). 显然当 $q^2 \neq 1$ 时变换 A_q 是非奇性的, 并且算符 $h^\pm, h^3$ 满足(1)式. 逆变换 A_q^{-1} 在 $q^2 \neq 1$ 时是定义得好的, 它把 q -畸变振子体系变回到 q -畸变的角动量体系. 当 $q \rightarrow 1$ (或 $\gamma \rightarrow i0$) 时, A_q 变为奇性的, 描述从 $SU(2)$ 代数到 $\mathcal{H}(4)$ 代数的收缩. 从而, $\mathcal{H}_q(4)$ 代数在 $|q| = 1$ 时可严格地定义成为代数 $SU_q(2)$ 的非奇性变换或者收缩 ($q = 1$ 时)¹⁾. 这一变换使得能够给出 $\mathcal{H}_q(4)$ 代数的 Casimir 算子

$$C_{HO} = [2h^3 - 1]_q - [2]_q h^+ h^-.$$

当 $q \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow i0$) 时, $C_{HO} \rightarrow -1$, 成为简谐振子代数 $\mathcal{H}(4)$ 的 Casimir 算子.

还可由此变换给出 $\mathcal{H}_q(4)$ 代数的 Hopf 代数结构^[9]

$$\Delta(h^3) = h^3 \otimes 1 + 1 \otimes h^3 - \alpha/\gamma, \quad \alpha = k\pi + \pi/4,$$

$$\Delta(h^\pm) = (h^\pm \otimes q^{h^3} + i q^{-h^3} \otimes h^\pm) e^{-i\alpha},$$

$$\gamma(h^\pm) = -q^\pm h^\pm, \quad \gamma(h^3) = -h^3 + 2\alpha/\gamma \cdot 1, \quad \varepsilon(h^3) = \alpha/\gamma,$$

1) 不考虑 $q \rightarrow \pm i$ 这一与本文讨论无关的特例.

$$s(h^\pm) = 0, s(1) = 1. \quad (10)$$

此外,还可以给出 q -振子体系的严格解. 关于这一问题的讨论将分为 q 是单位根和非单位根两种情况.

当 q 不是单位根时, $SU_q(2)$ 代数的有限维表示是完全可约的,并且所有的不可约表示可以按照最高权来分类^[2]. 自旋为 j 的 Dicke 空间 ρ_j 是不可约的,而 $\mathcal{H}_q(4)$ 代数的表示,或者说 q -Fock 空间 F'_q 是么正的,而且可以选取得与 ρ^j 同构. 令 $r = 2j$, 且 $n = j + m$,

$$F'_q = \left\{ |r, n\rangle = \sqrt{\frac{[r-n]_q!}{[n]_q! [r]_q!}} (h^+)^n |r, 0\rangle = (\tan \tilde{\gamma})^{n/2} |j, m\rangle, n \in \mathcal{N}_r \right\}, \quad (11)$$

其中 $\mathcal{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$. 对每一个 q -Fock 态,应当具有两个量子数: r 和 n . 称 r 是 q -畸变振子的阶,而 n 是激发数. 态 $|r, n\rangle$ 的模由 $\langle r, 0 | r, 0 \rangle = 1$ 及 $(h^\pm)^\pm = h^\mp$, $(h^\pm)^\pm = h^\pm$ 来定义. 这样哈密顿量的本征值是实的,

$$H_{r,n} = \langle r, n | H | r, n \rangle = (\tan \tilde{\gamma}) \left(\left[\frac{r}{2} \right]_q \left[\frac{r}{2} + 1 \right]_q - \left[n - \frac{r}{2} \right]_q^2 [2]_q / 2 \right). \quad (12)$$

当 $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ 时,只有在极限 $r \rightarrow \infty$ 处才有好的定义(参见(3)-(6)式). 对其它有限的 q 参量, r 阶的 q -畸变振子的行为与 r 阶重费密子^[14]的行为很类似. 当 $r = 1$ 时即得到费密子, $\{h^+, h^-\}_+ = \tan \tilde{\gamma}$, $(h^\pm)^2 = 0$. 在 $r = 2$ 时,对易关系是

$$\begin{aligned} h^+ h^+ h^- + h^- h^+ h^+ &= (\tan \tilde{\gamma}) [2]_q h^+, \\ h^+ h^- h^+ &= (\tan \tilde{\gamma}) [2]_q h^+, (h^\pm)^3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

如果引入新的参数化,取 $h'^\pm = h^\pm 2 / \sqrt{\tan \tilde{\gamma} [2]_q}$, 则可证明此时的 q -畸变振子实际上就是 2 阶重费密子. 对一般的 r , q -畸变振子与 r 阶重费密子是不一样的. 下面给出 $r = 3$ 的情况:

$$\begin{aligned} (h^-)^3 h^+ + (h^-)^2 h^+ h^- + h^- h^+ (h^-)^3 &= (\tan \tilde{\gamma}) (3[2]_q^2 - 2)(h^-)^2, \\ h^+ (h^-)^2 h^+ + h^+ h^- h^+ h^- + (h^+)^2 (h^-)^2 + h^- h^+ h^- h^+ + h^- (h^+)^2 h^- + (h^-)^2 (h^+)^2 \\ &= (\tan \tilde{\gamma}) (3[2]_q^2 - 2)(h^+ h^- + h^- h^+) - \tan^2 \tilde{\gamma} [3]_q^2, \\ (h^-)^2 h^+ (h^-)^2 &= \tan \tilde{\gamma} [2]_q^2 (h^-)^3, \\ h^- (h^+)^2 h^- &= h^+ (h^-)^2 h^+. \end{aligned}$$

并且 q -Fock 空间是 $F'_q = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. 对一般的 r , 则 F'_q 中的状态可以用产生、湮没算符连接,用下列图示可以表达清楚:

$$|r, 0\rangle \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} |r, 1\rangle \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} |r, 2\rangle \cdots |r, r-1\rangle \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} |r, r\rangle. \quad (14)$$

当 q 是单位根时,会出现一些奇特的性质. 设 p 是使 $q^p = \pm 1$ 的最小正整数,于是 $[p]_q = 0$ 和 $(h^\pm)^p = 0$. 但是对 q 的解析开拓可以使 Lusztig 算子 $L_\pm = (h^\pm)^p / [p]_q!$ 是良定的^[3]. 为讨论便利,在构造 q -Fock 空间时不采用通常的归一化,

$$F'_q = \left\{ |r, n\rangle = \frac{(h^+)^n}{[n]_q!} |r, 0\rangle = (\tan \tilde{\gamma})^{n/2} |j, m\rangle, n \in \mathcal{N}_r \right\}, \quad (15)$$

其中真空态和最高占有数态分别是 $|r, 0\rangle$ 和 $|r, r\rangle$. 生成元作用在态上时有

$$\begin{aligned} h^+|r, n\rangle &= [n+1]_q|r, n+1\rangle, \\ h^-|r, n\rangle &= \tan \bar{r}[r+1-n]_q|r, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

下面以 $r=3$ 且 $q^3 = \pm 1$ 的情形作为一个例子以说明其基本特点. 由于 $h^-|3, 1\rangle = h^+|3, 2\rangle = 0$, 这两个态构成不变子空间. 用 0 代表 $|3, 0\rangle$, 等等, 即可得到图示

$$0 \xrightarrow{h^+} 1 \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} 2 \xleftarrow{h^-} 3. \quad (17)$$

但是态 $|3, 3\rangle$ 仍可由 Lusztig 算子作用在 $|3, 0\rangle$ 态上得到, 反之亦然.

一般地, 如果有某个整数 l 使得 $\bar{n} = r - lp$ 或者 $\bar{n} = lp - 1$, 则态 $|r, \bar{n} + 1\rangle$ 和 $|r, \bar{n}\rangle$ 不能够由 $h^\pm$ 同时提升和降低. 假定 l 跑遍所有可能值时 $\bar{n}$ 构成的集合称为 $\mathcal{N}_k$, 即

$$\mathcal{N}_k = \{\bar{n}_k > \bar{n}_{k-1} > \cdots > \bar{n}_1\},$$

则在表示 F'_q 中可以找到 $I = [(k+1)/2]$ 个不变子空间. 这些不变子空间中具备有真空态和最高占有数态 $|r, \bar{n}_{i-1} + 1\rangle, |r, \bar{n}_i\rangle$ ($2 \leq i \leq I$), 它们都是零模的. 表示空间 F'_q 的这一特征可用下列图示表达:

$$0 \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} 1 \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} \cdots \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} \bar{n}_1 \xrightarrow{h^+} (\bar{n}_1 + 1) \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} \cdots \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} \bar{n}_2 \xleftarrow{h^-} (\bar{n}_2 + 1) \xrightleftharpoons[h^-]{h^+} \cdots, \quad (18)$$

其中每个 $|r, n\rangle$ 态都可在 Lusztig 算子 $L_\pm$ 的作用下与 $|r, n \pm p\rangle$ 态联接起来.

现在考虑一个 N 个 q -畸变振子构成的相互作用体系. 在这样的体系中间, 最简单的是 N 个 q -畸变振子构成的一维链模型, 上面的每个振子只与最近邻的两个振子发生相互作用. 描述这个多体系统的力学量算符是所有 q -畸变振子的相应力学量算符的余乘(张量)积

$$\begin{aligned} h^3 &= \sum_{i=1}^N h_i^3, \\ h^\pm &= \sum_{i=1}^N H_i^\pm = \sum_{i=1}^N q^{h_i^3} \otimes \cdots \otimes q^{h_{i-1}^3} \otimes h_i^\pm \otimes q^{h_{i+1}^3} \otimes \cdots \otimes q^{h_N^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

此多体体系的 Hilbert 空间由所有 q -畸变振子的 q -Fock 空间直积得到

$$\mathcal{H} = (F'_q)^{\otimes N},$$

其中 r 为每个 q -振子的量子数. 当 q 不是单位根时, 这一 Hilbert 空间完全约化为

$$\mathcal{H} = \bigoplus_r \omega_r \otimes F'_q,$$

其中 ω_r 是一个 $\Gamma_r^{(N)}$ 维的乘法空间

$$\Gamma_r^{(N)} = \binom{N}{\frac{N-r}{2}} - \binom{N}{\frac{N-r}{2} - 1}.$$

当 q 为 p 阶单位根时, 其 Casimir 算子在一系列的 r 和 r' 值上取相同值,

$$r' = r + 2np \quad \text{或} \quad r' = 2p - 2 - r + 2np, \quad n \text{ 为整数.}$$

可以将所有可能的 r' 值列出来

$$\{r_1 < r_2 < \cdots < r_k\} \subset \mathcal{N}_{r,N}.$$

这时就会出现表示成对的现象,即有如下的对混合:

$$(F_q^{t-1}, F_q^{t-1}), (F_q^{t-2}, F_q^{t-3}), \dots.$$

现在考察几个特殊的例子. 假定每个畸变振子具有量子数 $r = 1$, 从而哈密顿量是

$$H_q = \sum_{i=1}^{N-1} \left[\cot \gamma (h_i^+ h_{i+1}^- + h_i^- h_{i+1}^+) + \cos \gamma \left(h_i^3 - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 \right] + \sin \gamma (h_1^3 - h_N^3). \quad (20)$$

通过变换式(9), 这一体系与自旋 1/2 的 XXZ 链取自由边界条件时相等价, 并且可从经典 6 顶角模型的传播矩阵取极不各相同性条件的极限得到^[13]. 假定 $N = 3$, 于是对于一段的 q 有

$$(F_q^1)^{\otimes 3} = F_q^3 \oplus F_q^1 \oplus F_q^1.$$

但对 $q^3 = 1$, 则在 F_q^3 和一个 F_q^1 间发生对混合, 只剩下另一个 F_q^1 仍和一般情形相同, 以下列公式表达:

$$\begin{array}{lcl} F_q^3: & \begin{array}{ccccc} & h^+ & & h^+ & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 1 & \xleftrightarrow[h^-]{h^+} & 2 & \xleftarrow{\quad} & 3 \\ & & & h^- & \\ h^- & \nwarrow & & \nearrow h^+ & \nearrow h^+ \\ & & h^+ & & \\ F_q^1: & 0 & \xleftrightarrow[h^-]{h^+} & 1 & \\ & & & h^- & \end{array} & \\ F_q^1: & 0 & 1 & \end{array} \quad (21)$$

其中 F_q^3 不是既约的但不可分离(即不完全可约).

普适 R 矩阵和杨-Baxter 方程均可从 $\mathcal{H}_q(4)$ 构造出现^[9]. 与此代数相联系的辫子群表示也可以找到, 而这意味着在辫子群统计与 q -振子之间存在密切联系. 不难验证:

$$\begin{aligned} H_i^{\pm} H_j^{\pm} &= q^{\pm 2} H_j^{\pm} H_i^{\pm} \quad (i < j), \\ H_i^{\pm} H_j^{\mp} &= q^2 H_j^{\mp} H_i^{\pm} \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (22)$$

这与 anyon 准粒子的对易关系^[12]极为相似.

应当指出, 以上讨论的群收缩方法可以推广到任意的半单李代数 $\mathfrak{g}$ 所对应的量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$. 收缩后得到的另一个量子包络代数 $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ (如果用 Chevalley 基写出) 是由以下变换从 $U_q(\mathfrak{g})$ 得到的:

$$X_i^{\pm} \rightarrow \sqrt{\tan \gamma} X_i^{\pm}, \quad H_i \rightarrow H_i + \alpha/\gamma \cdot 1. \quad (23)$$

当 $\gamma \rightarrow 0$ 时, $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ 回到非半单李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$.

感谢郭汉英、徐湛教授的讨论.

- [1] V. G. Drinfel'd Quantum Groups, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Berkeley), ed. A. M. Gleason Am. Math. Soc., Providence, R. I., (1986), p. 798;
M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, 10, (1985), 63;
M. Jimbo, *Comm. Math. Phys.*, 102, (1986), 537;
Yu. I. Manin, *Ann. Inst. Fourier*, 37, (1987), 191.
[2] M. Rosso, *Comm. Math. Phys.*, 117(1988), 581.

- [3] G. Lusztig, *Contemp. Math.*, **82**, (1989), 59.
- [4] L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra and C. Gomez, *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 347; preprint, CERN-TH.5540/89;
V. Pasquier and H. Saleur, *Nucl. Phys.*, **B330** (1990), 523.
- [5] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A*, **22**, (1989), L873;
A. J. MacFarlane, *J. Phys. A*, **22**, (1989), 4581;
X.-C. Song, *J. Phys. A*, **23** (1990), L821.
- [6] Z. Chang, W. Chen and H.-Y. Guo, *J. Phys. A*, **23** (1990), 4185;
Z. Chang, W. Chen, H.-Y. Guo and H. Yan, *J. Phys. A*, **23**, (1990), 5371;
Z. Chang, W. Chen, H.-Y. Guo and H. Yan, *J. Phys. A*, **24**(1991), 1427;
Z. Chang, H.-Y. Guo and H. Yan, *Comm. Theor. Phys.*, **14** (1990), 475.
- [7] Shao-Ming Fei and Han-Ying Guo, to appear in *J. Phys. A*.
- [8] P. P. Kulish and E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A*, **23**, (1990), L415;
M. Chaichian and D. Ellinas, *J. Phys. A*, **23**, (1990), L291.
- [9] H. Yan, *J. Phys. A*, **23**, (1990), L1155;
H. Yan, to appear in *Phys. Lett. B*;
H. Yan, *Comm. Theor. Phys.*, **14**(1991), 377.
- [10] E. İnönü and E. P. Wigner, *Proc. Natl. Sci. (U.S.)*, **39** (1953), 510; for a review see R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Wiley, New York, (1974).
- [11] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev.*, **A6** (1972), 2211.
- [12] G. Baskaran, Jordan-Wigner Transformation in Two-Dimension, Tharamani preprint.
- [13] L. A. Takhtadzan, L. D. Faddeev, *Russian Math. Surveys*, **34** (1973), 11.
- [14] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, University of Tokyo Press, Tokyo, (1982).

SOLUTIONS TO THE q -DEFORMED OSCILLATOR SYSTEM AND THE $H_q(4)$ SYMMETRY

YAN HONG

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 13 December, 1990)

ABSTRACT

A discussion on the q -oscillator system and the algebra $H_q(4)$ is presented, emphasizing the case of $|q|=1$ in particular. A remarkable connection between algebras $SU_q(2)$ and $H_q(4)$ is given. The single q -oscillator system is solved and shown to be analogous to the parafermion (PF), with the specific cases analogous to 2nd and 3rd order PF's discussed in detail. The properties of the representations of $H_q(4)$ and a finite chain model of q -oscillators are discussed.

PACC: 0220; 0221