

自相似时间信息的谱研究

钟 锡 华 周 岳 明

北京大学物理系, 北京, 100871

朱 亚 芬

北京大学地球物理系, 北京, 100871

1991 年 1 月 11 日收到

本文以 Cantor 分维集合为时轴, 构想了三种自相似时间信息. 理论上以逐代繁衍的眼光看待自相似信息, 导出它们的谱结构因子递推公式和谱形状因子递推公式, 并给出四组谱图. 从谱图的比较和演变, 看出结构因子的本底作用和形状因子的调制作用, 以及各代之间的竞争现象. 此项研究为在另一表象(频域)中进一步认识自相似信息提供一种依据.

PACC: 4280C; 0545; 4230

一、模 式

分数维现象和自相似结构广泛存在于自然界^[1-3], 它们也可以在计算机或理论模型中

出现^[4]. 我们赋与纯几何的 Cantor 分维集合以物理内容. 在 Cantor 时轴上, 出现若干列具有自相似特征的信息波, 如图 1 所示. 当然, 这里“波”的说法是一个形象化的比喻.

图 1(a) 显示 Cantor 线, 其维数 $D = 0.6309\dots$; 图 1(b) 表示一系列自相似三角波; 图 1(c) 表示一系列自相似 $\sin c$ 波; 图 1(d) 表示一系列自相似衰减振荡波. 当然, 还可以构想其它模式的自相似时间信息波, 譬如, 它们的特征信息(或基元信息)是 Gaussian 线型的, 或洛伦兹线型的.

广义而言, Cantor 轴不限于表示时间变量, 它也可以表示空间变量, 或其它物理量. 例如, 地震的发生在时间和空间上都是破碎的和不均匀的, 具有分形结构. 又例如, 文献[5]报道

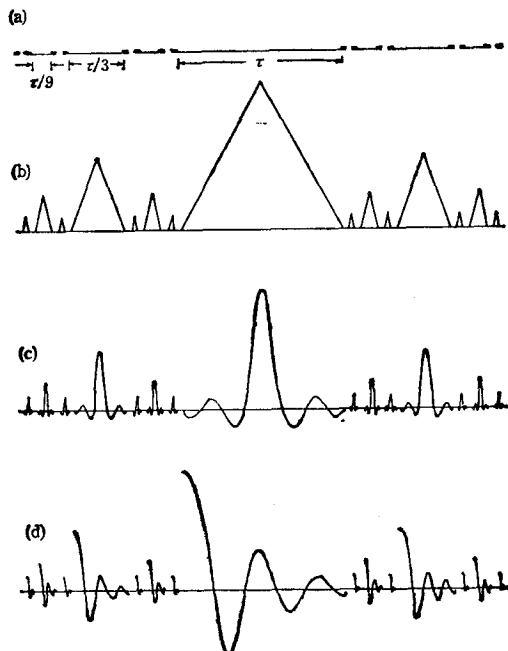


图 1 Cantor 时轴 (a), 以及三种模式的自相似时间信息 (b), (c), (d)

了多原子的分子光谱线具有自相似特征的分形结构。总之, 上述构想的几种规则的自相似信息波是实际上的某种电磁辐射, 或某种地震波, 或某种湍流场的理论模写。当它们与另一系统相互作用时, 其频谱特性无疑具有重要意义, 它决定相互作用时的共振吸收和能量转移的强弱程度。这类自相似时间信息波的维数究竟是多少? 这个问题本身尚待讨论。本文的谱研究暂不涉及这一点。

二、谱函数的结构因子

设时间信息 $u(t)$ 的谱函数为 $U(f)$, 即

$$u(t) \rightleftharpoons U(f).$$

基于逐代繁衍的观点, 可以写出自相似结构谱函数的一般表达式, 并导出其递推公式^[6]。每一代的谱函数皆能写成两个因子的乘积,

$$U^{(N)} = V_N(f) \cdot S_N(f), \quad (1)$$

其中 $V_N(f)$ 决定于第 N 代各特征单元的位置(时间点或空间点)分布, 称其为谱函数的分布因子或结构因子; $S_N(f)$ 决定于第 N 代特征单元的形状和大小, 称其为单元因子或形状因子。从母代开始, 逐代繁衍, 以至 N 代共存态的总谱函数被写成

$$U_{NC}(f) = \sum_N U^{(N)} = \sum_N V_N \cdot S_N. \quad (2)$$

图 1 所示的几种形态的自相似信息波, 具有相同的结构因子, 因为它们出现的时间序列是相同的, 均为 Cantor 时轴。它们之间的区别仅在形状因子这部分。

借助两步操作(位移与缩放), 可以导出处于 Cantor 时轴上, 自相似信息的谱结构因子的递推公式如下^[7]:

$$\begin{aligned} V_0 &= 1, \\ V_1(f) &= 2 \cos(2\pi\tau_1 f) V_0, \quad \tau_1 = \tau; \\ V_2(f) &= 2 \cos(2\pi\tau_2 f) V_1, \quad \tau_2 = \tau_1/3; \\ V_3(f) &= 2 \cos(2\pi\tau_3 f) V_2, \quad \tau_3 = \tau_2/3; \\ &\vdots \\ V_N(f) &= 2 \cos(2\pi\tau_N f) V_{N-1}, \quad \tau_N = \frac{\tau_{N-1}}{3} = \tau/3^{N-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中时间尺度 τ 是 Cantor 时轴上中心部分的宽度, 它也是母代与第一代(左右两个单元)的时间间隔, 整个一列时间信息波存在的时域区间设为 3τ 。

三、谱函数的形状因子

图 1 表明, 对于每一列自相似信息波, 随代数的增加, 其特征单元的时间跨度与纵向高度是按比例缩小的。时间跨度的缩小比例是 $1/3$, 这是由 Cantor 时轴决定的。人们可以根据实际情况适当选择纵向高度的下降比例, 在这里设其为 $3/4$ 。

1. 三角型

角形函数的谱是 $\sin c^2$ 函数, 如图 2 所示. 故自相似三角信息的谱形状因子的递推

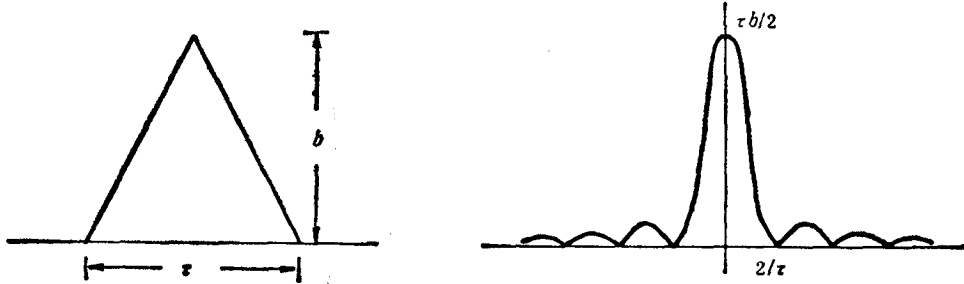


图 2 角形函数及其谱

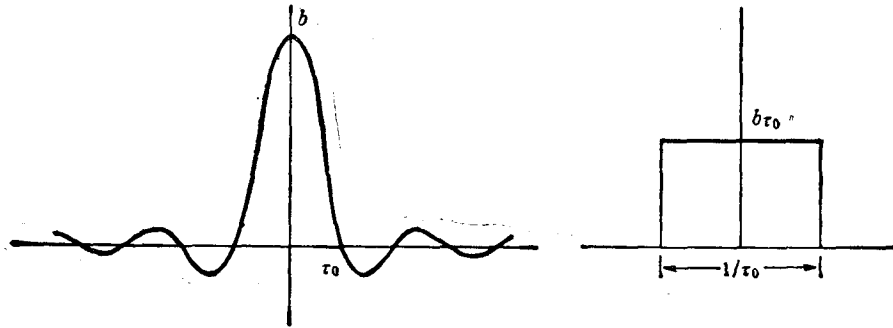
公式如下:

$$\begin{aligned}
 S_0(f) &= c_0 \sin c^2(\alpha_0), \quad c_0 = \frac{b\tau}{2}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \tau f, \quad \sin c^2(\alpha_0) = \left(\frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2; \\
 S_1(f) &= c_1 \sin c^2(\alpha_1), \quad c_1 = c_0/4, \quad \alpha_1 = \alpha_0/3; \\
 S_2(f) &= c_2 \sin c^2(\alpha_2), \quad c_2 = C_1/4, \quad \alpha_2 = \alpha_1/3; \\
 S_N(f) &= c_N \sin c^2(\alpha_N), \quad C_N = C_{N-1}/4, \quad \alpha_N = \alpha_{N-1}/4.
 \end{aligned} \tag{4}$$

2. $\sin c$ 型

如图 3 所示, 理想 $\sin c$ 函数的谱是方垒函数, 即

$$h(t) = b \frac{\sin(\pi t/\tau_0)}{\pi t/\tau_0} \iff H(f) = \tau_0 \text{rect}(b, 1/\tau_0).$$

图 3 $\sin c$ 函数及其谱

严格地讲, 存在于有限 τ 区间内的一段 $\sin c$ 线型, 可以被看作理想 $\sin c$ 函数与(存在于 τ 区间)方垒函数的乘积, 故其谱是后两者谱的卷积. 不过, 当 $\tau \gg \tau_0$ 时, $\sin c$ 函数已有足够多次的起伏, 它是否被“切断”这一点已无关紧要. 换言之, 此时可以不必考虑卷积运算, 视有限区间的 $\sin c$ 函数近似为理想的情形. 于是, 自相似 $\sin c$ 信息的谱形状因子的递推公式为

$$\begin{aligned}
 H_0(f) &= \tau_0 \text{rect}(b, 1/\tau_0); \\
 H_1(f) &= \tau_1 \text{rect}(b_1, 1/\tau_1), \quad \tau_1 = \tau_0/3, \quad b_1 = 3b/4; \\
 H_2(f) &= \tau_2 \text{rect}(b_2, 1/\tau_2), \quad \tau_2 = \tau_1/3, \quad b_2 = 3b_1/4; \\
 H_N(f) &= \tau_N \text{rect}(b_N, 1/\tau_N), \quad \tau_N = \tau_{N-1}/3 = \tau_0/3^{N-1}, \\
 & \quad b_N = 3b_{N-1}/4 = \left(\frac{3}{4}\right)^N b.
 \end{aligned} \tag{5}$$

且 N 代共存的总谱公式被表达为

$$U_{NC} = \sum_N V_N(f) \cdot H_N(f). \tag{6}$$

3. 衰减振荡型

设理想的衰减振荡函数为

$$a(t) = \begin{cases} be^{-t/\tau_0} \cdot \cos 2\pi f_0 t & 0 \leq t; \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

其谱函数为

$$A(f) = \frac{b}{2} \left[\frac{1}{1/\tau_0 + i2\pi(f - f_0)} + \frac{1}{1/\tau_0 + i2\pi(f + f_0)} \right].$$

这个谱函数有两个特点值得注意。它是一个复函数, 存在位相因子; 它包含两个参量, 时间常数 τ_0 和本征频率 f_0 。与上一段类似的考虑, 在 $\tau \gg \tau_0$ 条件下, 存在于有限区间 τ 的实际衰减振荡, 可以近似地被看作理想的情形。其谱函数含左右两支钟形曲线, 如图 4 所示。且每支曲线伴有位相因子(由虚线表示)。当 $\Delta f = |f - f_0| = 1/\tau_0$ 时, $|A_R|$ 值下降为其峰值的 $1/6$ 左右。为了使得 $A_R(f)$ 与 $A_L(f)$ 足够分离, 以致实际上可以不考虑两者之间的干涉加, 这里选取

$$f_0 = 3\Delta f = 3/\tau_0 \quad \text{即} \quad f_0\tau_0 = 3.$$

同时选取

$$\tau = 4\tau_0 \quad \text{即} \quad \tau/\tau_0 = 4.$$

于是, 在 $f > 0$ 区间中,

$$\begin{aligned}
 A(f) &\approx A_R(f) = \frac{\tau_0 b}{2} \frac{1}{1 + i2\pi\tau_0(f - f_0)} \\
 &= \frac{\tau_0 b}{2 + i\pi(\tau f - 12)}.
 \end{aligned}$$

据此写下自相似衰减振荡信息的谱形状因子递推公式如下:

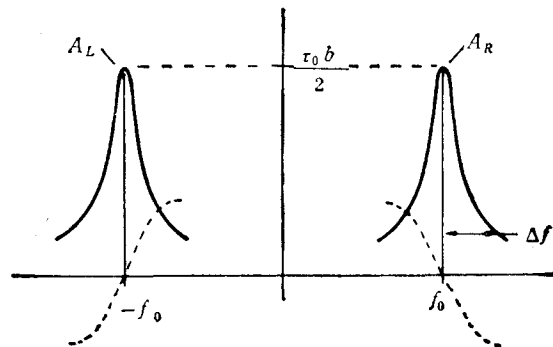


图 4 衰减振荡的谱

$$\begin{aligned}
 A_0(f) &= C_0 \frac{1}{2 + i\pi(\tau f - 12)}, \quad C_0 = \tau_0 b; \\
 A_1(f) &= C_1 \frac{1}{2 + i\pi(\tau_1 f - 12)}, \quad C_1 = \frac{C_0}{4}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{3}; \\
 A_2(f) &= C_2 \frac{1}{2 + i\pi(\tau_2 f - 12)}, \quad C_2 = \frac{C_1}{4}, \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{3}; \\
 A_N(f) &= C_N \frac{1}{2 + i\pi(\tau_N f - 12)}, \\
 C_N &= \frac{C_{N-1}}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^N \tau_0 b, \quad \tau_N = \frac{\tau_{N-1}}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^N \tau.
 \end{aligned} \tag{7}$$

考虑到实函数的傅里叶变换具有厄密对称性, 只需计算 $+f$ 这支频谱的实部, 因为其虚部是要被 $-f$ 那支频谱抵消掉的。故我们感兴趣的 N 代共存时的谱函数应当取如下形式:

$$\operatorname{Re}(U_{NC}) = \operatorname{Re}\left(\sum_N V_N \cdot A_N\right). \tag{8}$$

四、谱图及其特点

1. 图 5—图 8 是根据(3),(2),(6),(8)式分别描绘的谱图, 其横坐标表示频率变量 f , 单位为 $1/\tau$, 取值间隔为 0.1, 最大取值为 100 或 120。

图 5(a)—(f) 分别表示母代、第 1 代直至第 5 代的谱结构因子曲线。

图 6(a)—(f) 分别表示母代、2 代共存、直至 6 代共存时的自相似三角信息的总谱曲线。

图 7(a)—(f) 分别表示母代直至 6 代共存时的自相似 $\sin c$ 信息的总谱曲线。

图 8(a)—(f) 分别表示母代直至 6 代共存时的自相似衰减振荡信息的总谱曲线。

为了节省篇幅, 本文未给出三种谱形状因子的曲线组。

2. 通常人们将信息划分为周期信息与非周期信息两大类。前者产生离散谱, 后者产生连续谱。应当说, 自相似信息是既区别于周期信息, 又区别于非周期信息, 是一种难以用传统分类方式概括的新型信息。或者勉强可以说, 自相似信息是一种具有特殊周期性的非周期信息。它不是相同单元按一种周期重复排列的严格有序结构; 它是相似单元按一定规则逐代繁衍的同族群体。这一点在图 5 谱结构因子的曲线组中得以体现。例如, 图 5(d)—(f) 显示, 整条曲线是由一系列形状相同的谱群等间隔地排列而成, 这一点类似于周期结构的离散谱。在每个谱群中含有几个明显的谱峰, 且有一个最高的谱峰, 这又类似于非周期结构的连续谱。

3. 自相似信息内涵三个基本要素。一是各代特征单元的中心位置按一定规则分布; 二是相邻两代之间的特征单元按一定比例相似; 三是特征单元自身的形状。这三点在四组谱图中均得以体现。谱结构因子的递推公式反映了第一个要素, 谱形状因子的递推公式反映了后两个要素。

在图 6—图 8 三组总谱曲线中, 均能看出结构因子的本底作用与形状因子的调制作

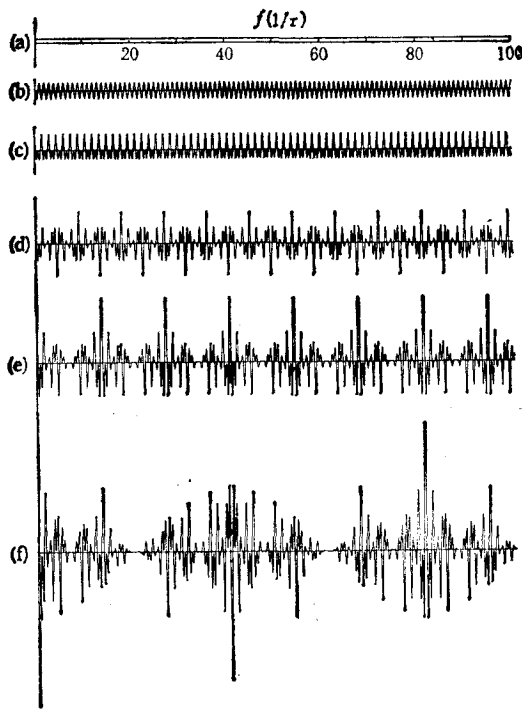


图5 谱结构因子曲线

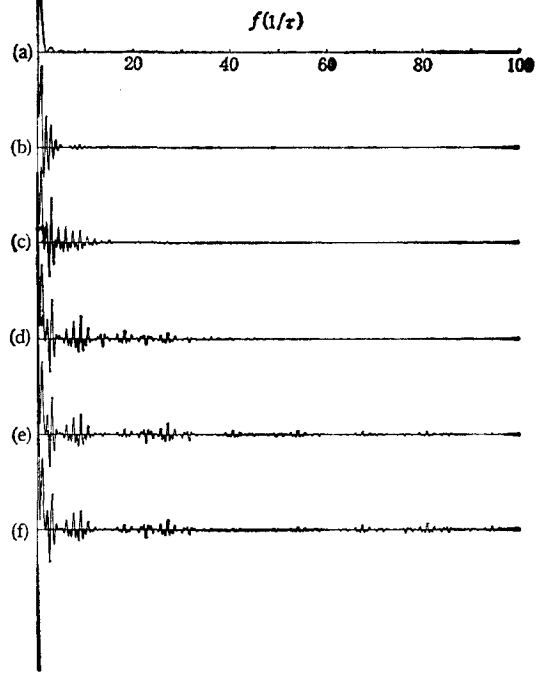


图6 自相似角型时间信息的总谱曲线

用。考虑到结构因子的幅值以倍率 2 递增，而形状因子的幅值(在我们设定的条件下)以倍率 $1/4$ 递减，在总谱中各代的贡献大小，随代数的增加而减弱。粗略地看，从图 7(c)–(f) 的谱曲线变化不大，从图 8(c)–(f) 的谱曲线相近，其道理就在于此。即便如此，从比较细致的观察中仍然能发现，随着共存代数的增加，谱曲线在高频段(50–100)有些变化，这一点在图 6 中表现得尤为明显。这是因为幅值递增的结构因子起作用，同时形状因子的频带随代数的增加而展宽，虽然它的峰值是递减的。

4. 从几代共存的总谱曲线的演变中，可以看出各代之间的竞争现象。在时域中，一系列自相似信息是逐代繁衍、离散分布，各代之间互不相干。但在频域中，各代之间却有了相干现象。例如，图 6(a)–(f) 曲线的演变，不仅表现为高频段的谱成分在不断延伸和加强，同时也表现为低频段几个谱峰高度的消长。这说明各代

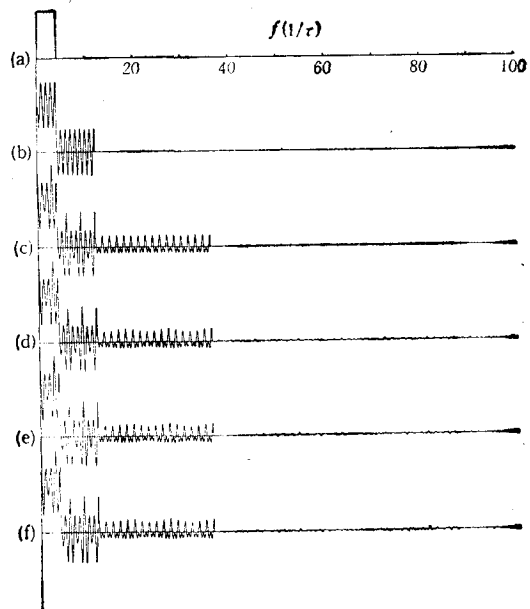


图7 自相似 sinc 型时间信息的总谱曲线

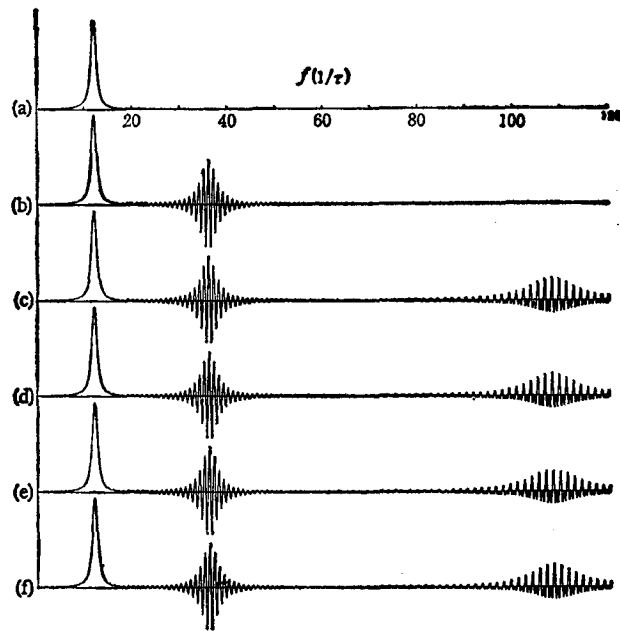


图 8 自相似衰减振荡型时间信息的总谱曲线

之间的竞争结果,必然伴随着能量在频域中的转移。这一点在图 7(b)–(d)的演变中,亦表现得十分明显。泛论之,原函数空间中的局域信息,必然波及到整个谱空间;前者(局域)越小,则后者(谱范围)越大。借用全息学语言,原函数与谱函数的关系不是“点对点”的关系,而是“点面或点线或点体对应”的关系。所以,在谱空间中,与一般结构类似,自相似结构或信息的各代之间的竞争是必定要存在的。与一般结构相比,自相似结构的这种竞争(或干涉)究竟具有什么新的特点,也是值得研究的一个新问题。

- [1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, (1982).
- [2] L. Pictonero and E. Tosatti, *Fractals of Physics*, North-Holland, (1986).
- [3] 郝柏林,分形与分维,学术期刊出版社,北京,(1988).
- [4] 高安秀树,分数维,沈步明、常子文译,地震出版社,北京,(1989).
- [5] W. G. Harter, *J. of Stat. Phys.*, **36**(1984), 749.
- [6] 钟锡华,物理学报,**39**,(1990),901.
- [7] Zhong Xi-hua and Zhu Ya-fen, *J. of Modern Optics*, **37**, (1990), 1617.

A STUDY ON THE SPECTRA OF SELF-SIMILAR TIME INFORMATIONS

ZHONG XI-HUA ZHOU YUE-MING

Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871

ZHU YA-FEN

Department of Geophysics, Peking University, Beijing, 100871

(Received 11 January 1991)

ABSTRACT

In this paper, three modes of self-similar time informations on Cantor's fractal axis are constructed. Based upon a theoretical view point of generative production, we have found the recurrence formulae of spectral structure factor and shape factor of them, and plotted four series of spectral curves. By the comparison and progression of spectral curves, it can be seen that the structure factors play the ground role and the shape factors play the modulatory role, and there are competitive phenomena between generations. This investigation provides a basis for further understanding of the characteristics of self-similar informations by a new representation such as frequency domain.

PACC: 4280C; 0545; 4230