第 40 卷 第 12 期
1991 年 12 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 40, No. 12
Dec., 1991

环形 Josephson 结中圆对称孤子解的微扰分析*

王强华 王 炜 姚希贤

南京大学物理系;非线性动力学中心,南京,210008

1991 年 1 月 14 日收到

本文用微扰方法,研究环形 Josephson 结中有扰动情形下 sine-Gordon 方程的圆对称孤子解,得到孤子的动力学方程的解析形式。所得的 I—V 曲线(第一零场台阶)与数值计算结果符合得很好.

PACC: 7450; 0340K

一、引 言

近年来,人们对 Josephson 隧道结和超导弱连结进行了广泛的研究. 特别是最近,Josephson 结作为一个典型的系统被用来研究混沌和动力学的其它特性[1,2]. 另外,由于高温超导体样品具有颗粒性,其相关长度 ξ 很小,以及样品中的不均匀性,晶界的存在等等,使得人们研究高温超导体的性质时,必须考虑到 Josephson 耦合这一重要因素[3]. 此外,Josephson 结有着广泛的应用前景. 一个例子是用来作微电子器件. 这是因为 Josephson 结中的特殊的电动力学性质如磁通量子化,磁通量子的传播、激发及湮没等[4].

对一维长 Josephson 结人们已做了许多研究工作. 在不存在外磁场时,I—V 曲线上表现的奇异性(零场台阶)对应着磁通量子(或孤子)的共振传播,由此所辐射的电磁波具有高频和窄带宽等特点. 耦合排列的多个 Josephson 结能够锁相磁通子的运动,从而提高输出的辐射功率[5].

环形结也具有单个一维 Josephson 结的特征,因为在环形结中可以存在圆对称孤波[6]. 同时,如果环形结的外边界及宽度很大,则相当于许多一维 in-line 结的耦合排列,因此,单个环形 Josephson 结就可以有相当满意的输出功率.

我们以前的工作中对环形结(如图 1 所示)的静态特性和动力学行为进行了研究[7-10],特别是对于"大结"($W \gg \lambda_J$),在无耗散情形下环形结(即圆对称 sine-Gordon 方程)具有环形孤子解,并发现存在回波效应[8]. 另外,在 α 为 0.2 即大耗散情形,讨论了其旋转周期解[9]. 在文献[10]中用数值方法研究了环形结中的孤波特性和第一零场台

* 国家自然科学基金资助的课题.

阶.

但是,孤子能否在环形结中稳定地传播,决定于环形结的内外半径、耗散情形、偏置电流和外磁场等参数. 如果能从孤子在环形结中的运动的解析形式加以讨论,无疑对解决上述问题是十分重要的.

本文首先用微扰方法[2]求出环形结中单孤子动力学方程的解析形式,然后讨论第一零场台阶,所得结果与数值计算结果进行比较,两者很好地符合.

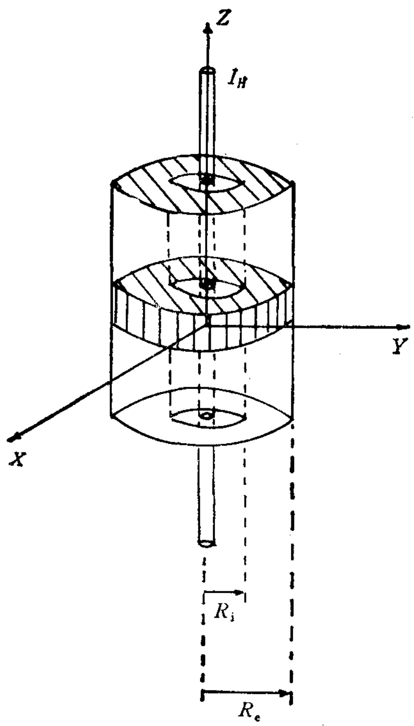

图1 环形 Josephson 结示意图
结内外半径为 R_i,R_e;结宽 $W=R_e-R_i$;中心引线用以通电流 I_H 给环形结加圆对称的外磁场

二、微扰分析

环形结中圆对称自场方程为[6,9,10]

$$\phi_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\phi_\rho-\phi_{tt}=\alpha\phi_t+\sin\phi, \quad (1)$$

其中 ρ 为结中各处到中心的距离, ϕ 为结上下超导体序参量的位相差. 本文没有考虑结的表面损耗. (1)式中 α 项为准粒子隧穿引起的耗散. 有关单位的归一化问题见文献[6,9,10].

提供外磁场的电流 I_H 和结偏置电流 I_b 通过边界条件影响结内的动力学行为

$$\phi_\rho=\begin{cases} I_H/2\pi R_i & \rho=R_i; \quad (2a)\\ (I_H+I)/2\pi R_e & \rho=R_e, \quad (2b)\end{cases}$$

其中 I_H 为中心引线上的电流, I_b 为结偏置电流, 均以 $j_c\lambda_J^2$ 为单位.

结自由能为

$$E=\int 2\pi\rho d\rho\left(\frac{1}{2}\phi_\rho^2+\frac{1}{2}\phi_t^2+1-\cos\phi\right). \quad (3)$$

由(1),(3)式得到

$$dE/dt=2\pi(\rho\phi_t\phi_\rho)\Big|_{R_i}^{R_e}-\int\alpha\phi_t^2 2\pi\rho d\rho. \quad (4)$$

可见,结自由能的变化来源于两部分. 一部分为边界的能量馈入(或损失),一部分为结中的能量耗散.

假定方程(1)具有如下形式的孤子解[2]:

$$\phi=4\tan^{-1}\exp\frac{\sigma(\rho-R)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (5a)$$

其中 R 为孤子中心位置, u 为其速度,且

$$R=R_0+\int_0^t u(t')dt',\ u=dR/dt.$$

考虑到 u 为时间的缓变函数，作为零级近似[2]，有

$$\phi_\rho = \frac{2\sigma}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{sech} \frac{\sigma(\rho - R)}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{5b}$$

$$\phi_t = \frac{-2u\sigma}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{sech} \frac{\sigma(\rho - R)}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{5c}$$

$\sigma = \pm 1$ 分别标记正、反孤子。注意(5)式中 $R = R(t)$，$u = u(t)$，计算 ϕ_t 时忽略了对 u 的时间微分。

在进一步分析之前，假定：

1. $R_i \geqslant 5$，可以验证此时附录中近似计算的相对误差小于 10^{-6}。因为孤子存在于结中，故 $R \geqslant R_i \geqslant 5$。

2. 在结中的孤子，可等效于一个在 0 —∞空间范围内存在的孤子。孤子只是运动到边界时才感到边界的影响[2,11,12]。这实际上等效于将孤子看成一个点粒子。因此，本模型可称为孤子的点粒子模型。这里的假设必须结合假设 1，即 $R \geqslant R_i \geqslant R_{i(\min)}$，$R_{i(\min)} \geqslant 5$，$R$ 为孤子中心的位置。

由于孤子一经与边界碰撞后，极性改变即 σ 变号，速度 u 也变号，故对传播孤子，其 ϕ_t 不变号，ϕ_ρ 则每经一次碰撞后改变符号。这可以从(5b)，(5c)式中看出。对 2π-kink，结中任意处，孤子经历一次，ϕ 改变 $\pm 2\pi$，故对往返运动的传播孤子，每周期 ϕ 改变 $\pm 4\pi$，“±”号决定于 ϕ_t（或 $-u\sigma$）的符号。而在边界处，ϕ 的变化集中在孤子运动到该边界稍前到稍后的一段很小的时间 τ 内，即

$$\Delta\phi\,|_{\text{边界}} \doteq \int_{t_1}^{t_1+\tau} \phi_t\,|_{\text{边界}} dt \approx \pm 4\pi, \tag{6}$$

其中 t_1 为碰撞边界稍前时刻。考虑到

$$\Delta E = \int\left(\frac{dE}{dt}\right)dt,$$

结合(4)，(6)式可知，孤子运动过程可大致描述为：孤子在边界吸收（或损失）能量，在结中，边界对孤子则无影响，孤子只是耗散其能量。如果能量的吸收与耗散正好平衡，则此孤子能稳定地在结中往返传播。图 2 为以上过程的示意图。ΔE_i，ΔE_e 分别为孤子在内、外边界时的能量所得。

下面将具体求出孤子在边界及在结中的能量变化关系。

孤子与内边界碰撞时，$\phi_t|_{R_i} \approx 0$，故

$$\Delta E_i = -\int 2\pi R_i \phi_\rho(R_i)\phi_t(R_i)dt,$$

$\phi_\rho(R_i)$，$\phi_t(R_i)$ 表示 $\rho = R_i$ 时的 ϕ_ρ，ϕ_t。积分区间为碰撞稍前和稍后的一段时间 τ。由(2)和(6)式得

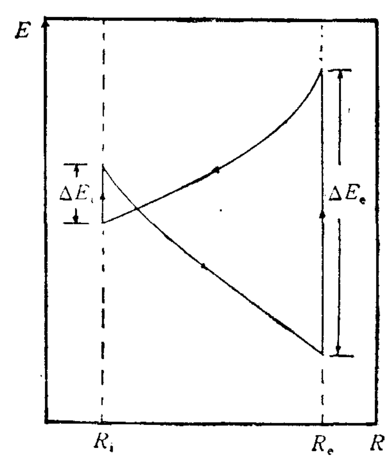

图 2　孤子在环形结中运动的能量 E 与位置 R 的关系
孤子在边界吸收或放出能量，在结中则仅仅耗损其能量；如果二者平衡，则孤子周期性地在环结中往返传播

$$\Delta E_i = -(\pm 4\pi I_H). \tag{7a}$$

特别地,当 $I_H = 0$,有

$$\Delta E_i = 0.$$

孤子与外边界碰撞,$\phi_t|_{R_1} \approx 0$,同理有

$$\Delta E_e = \pm 4\pi(I_H + I_b). \tag{7b}$$

特别地,$I_H = 0$ 时有

$$\Delta E_e = \pm 4\pi I_b.$$

(7a),(7b)等式中"±"号决定于 ϕ_t 的符号(或者 $-u\sigma$ 的符号)

考虑孤子在边界的行为后,现着手讨论孤子在结中的行为.

按微扰方法,将(5)诸式分别代入(3),(4)式,并注意到上面两个假设,进行计算(见附录),则由(5),(3)式得

$$E = 16\pi R/\sqrt{1-u^2}, \tag{8a}$$

另由(5),(4)式得

$$dE/dt = -16\pi\alpha R u^2/\sqrt{1-u^2}, \tag{8b}$$

再对(8a)式相对 t 微分

$$dE/dt = 16\pi u/\sqrt{1-u^2} + 16\pi R u(1-u^2)^{3/2}\frac{du}{dt}.$$

上式与(8b)式等同,结合后得

$$du/dt = -\frac{1}{R}(1-u^2) - \alpha u(1-u^2). \tag{8c}$$

若令 $P = -\int_0^\infty \rho\phi_i\phi_\rho d\rho$,不难验证(见附录)

$$P \approx +8Ru/\sqrt{1-u^2}.$$

再令 $Z = P/8R$,结合(8c)式,有

$$dZ/dt = -\frac{1}{uR}Z - \alpha Z. \tag{8d}$$

此方程只有当 $R\to\infty$ 或 $\alpha = 0$ 时严格可解.

综合(5),(7),(8)诸式,已得到决定孤子运动的完整方程.为典型的点模型的结果.

计算孤子动力学行为的方法是:孤子在环形结中的状态由(8c)式决定,到边界时,由(8a)式计算此时的能量 E,加上(7)式决定的因碰撞边界引起的能量跃变 ΔE_i(或 ΔE_e),得到下一步运动的初始能量,再由(8a)式计算下一步返回时的初速度.如此反复.当往返一次的时间即周期 T 成为固定值时,则此孤子已达到稳定运动的状态.

三、结果与讨论

(8c)或(8d)式清楚地表明,环形结中动力学行为的特殊之处,即 R^{-1} 项,其贡献犹如对孤子始终施加一向内的吸引力,使孤子向内收缩.所以 R_i 愈小,孤子愈不稳定.这也是我们强调环形结,而不是圆形结值得研究的一个理由.反之,当 $R\to\infty$ 时,(8c)式回到

一维 in-line 结的微扰分析结果[2,11]；

$$du/dt = -\alpha u(1-u^2).$$

用 (7),(8) 诸式计算环形结 I—V 曲线中的第一零场台阶，对应的是单孤子在结中的往返运动。方法是求出在各种偏置电流 I_b 下孤子运动稳定后往返一次所需时间即周期 T，则对应的直流平均电压可表示为

$$V = 4\pi/T.$$

从(8c)式可知，孤子向内、向外的运动有所不同，因此，孤子从 $R_e \to R_i$ 所花时间 T_{ei} 和从 $R_i \to R_e$ 所花时间 T_{ie} 是不同的，但两者之和 T 在孤子达到稳定后是固定不变的，从而 V 稳定。

图 3 中实线为微扰理论得到的结果，作为比较，给出相同参数下数值计算的结果，在图 3 中以点表示。环形结参数均为 $I_H = 0$, $\alpha = 0.01$ $R_i = 20$ $R_e = 30$.

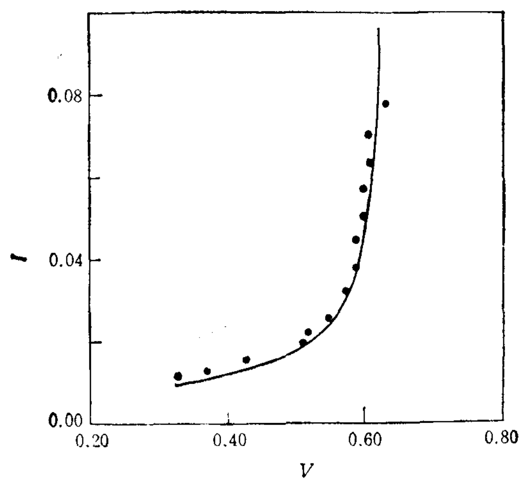

图 3　环形结 I—V 特性中的第一零场台阶　实线为理论值；点为数值计算值；
$I = I_b/\pi(R_e^2 - R_i^2)$ 为平均偏置电流密度；V 为结平均直流电压

从图 3 看出，两者符合得很好，台阶范围也基本相同。当偏置电流密度 $I_b > 0.09$ 后，数值计算表明孤波解不稳定，最后随 I 的增加通向旋转周期解。对于我们的理论结果，(7),(8)式则表明孤波速度 $u \approx 1$，即孤子的惯性质量成为无穷大，由此可以判断，此时孤子是不稳定的。另一方面，当 $I < 0.009$ 时，理论结果表明不存在稳定的传播孤子。因为此时从外界输入的能量太小，不足以平衡耗散掉的能量，此后孤子将达不到外边界便开始返回向内，即回波。由于耗散一直存在，故孤子经若干次回波后，最终将静止在内边界，对应的直流平均电压自然为零。有趣的是数值计算的结果也证实以上预言。我们将在最近给出有关回波效应等的详细讨论。

从偏置电流的馈入形式来看，本文讨论的环形结与一维 in-line 结类似，故其所表现的动力学特性也有些类似。但因为 sin-Gordon 方程中 ρ^{-1}项的存在，使得所需解决的问题变得更为复杂。在本文微扰结果中表现在(8)式中的 R^{-1} 项。

四、结 语

本文用微扰方法得到单孤子在环形 Josephson 结中的动力学方程，I—V 曲线的第一零场台阶，并与数值计算结果进行了比较，两者符合很好。本文实际上用的是点模型，即把孤子看成为点粒子，因此为使以上理论更好地适用，R_i，W 即结的内径及宽度不能太小。当然，二者愈大愈好。更进一步的讨论将近期报道。为验证以上理论，详细的数值计算结果将另文发表。

附 录

在计算(8a)，(8b)式时，注意到本文两个假设，对 ρ 的积分限取为0—∞，按(5)诸式积分，最后取以下两个近似：

$$(\mathrm{I})=\int_0^\infty \rho d\rho \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sigma(\rho-R)}{\sqrt{1-u^2}}\right),$$

sech 函数为偶函数，故(I)与 $\sigma=\pm 1$ 无关。将式中 $\rho-R$ 换为 x，则有

$$(\mathrm{I})=\int_{-R}^\infty (x+R)dx \operatorname{sech}^2\frac{x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

考虑到 $R\geqslant 5$（或 $R\gg 1$），上式近似为

$$(\mathrm{I})\approx\int_{-\infty}^\infty (x+R)dx \operatorname{sech}^2\frac{x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

考虑到被积函数的两部分各自的奇偶性，有

$$(\mathrm{I})\approx R\int_{-\infty}^\infty dx \operatorname{sech}^2\frac{x}{\sqrt{1-u^2}}=2R\sqrt{1-u^2}. \tag{A.1}$$

另外，

$$(\mathrm{II})=\int_0^\infty (1-\cos\phi)\rho d\rho,$$

其中 ϕ 由(5a)式给出。同理可得

$$(\mathrm{II})\approx 2\int_{-\infty}^\infty \sin^2\frac{\phi(x)}{2}(x+R)dx,$$

其中 $\phi(x)=4\tan^{-1}\exp\sigma x/\sqrt{1-u^2}$，$\sigma=\pm 1$，读者可以验证 $\sin^2(\phi(x)/2)$ 为一偶函数，因此，(II)也与 $\sigma=\pm 1$ 无关。进一步考虑上一积分式中被积函数两部分各自的奇偶性，有

$$(\mathrm{II})\approx 2R\int_{-\infty}^\infty \sin^2\frac{\phi(x)}{2}dx=4R\sqrt{1-u^2}. \tag{A.2}$$

应用(A.1)，(A.2)式，则可从(5)，(3)式得到(8a)式，从(5)，(4)式得到(8b)式。

可以验证，对(A.1)，(A.2)式所作的近似，其相对误差很小。当 $R\geqslant 5$，相对误差可在 10^{-6} 以下。这是因为孤子半宽度最大不超过 1，因此，$R\geqslant 5$ 已经是一个良好的近似。

[1] R. L. Kautz and J. C. Macfarlane, *Phys. Rev.*, **A33**, (1986), 498.
[2] A. C. Scott and D. W. Mclaughlin, *Phys. Rev.*, **A18** (1978), 1652.
[3] J. G. Bedunorz and K. A. Muller, *Z. Phys.*, **B64** (1986), 189.
[4] A. Barone and G. Paterno, Physics and Applications of the Josephson effect, Wiley, New York, (1982).
[5] S. Pagano et al., *IEEE Trans. Magn.*, **25**(1989), 1080.
[6] Wei Wang, A. L. Thomson, Xixian Yao, to be published in *Phys. Rev. A.*
[7] Wei Wang, Xixian Yao, *J. Low Temp. Phys.*, **71**(1988), 463.
[8] Wei Wang, Xixian Yao, *J. Phys. A.*, **22**(1989), 2447.

[9] Wei Wang, A. L. Thomson, Xixian Yao, *Phys. Rev.*, **B43**(1991), 1.
[10] 徐昆明、姚希贤，低温物理学报，9，(1987)，25
[11] M. Salerno, *Phys. Lett.*, **A144** (1990), 453.
[12] M. Salerno et al., *Phys. Lett.*, **A137**(1990), 75.

CIRCULARLY SYMMETRIC SOLITON SOLUTION IN AN ANNULAR JOSEPHSON JUNCTION

WANG QIANG-HUA WANG WEI YAO XI-XIAN

Department of Physics, Center of the Nonlinear Dynamical Systems, Nanjing University, Nanjing, 210008

(Received 14 January 1991)

ABSTRACT

We have analysed the circularly symmetric sine-Gordon equation with bias and dissipation by means of a simplified perturbation theory. Analytic solutions that describe the dynamical behaviour of a quasisoliton trapped within the annular junction have been obtained. Between the results of our theory and numerical simulation, there exists a good agreement for the first zero field step (ZFS) in the *I-V* characteristic. A brief discussion of our results is also presented.

PACC: 7450; 0340K