

非奇性 Schwarzschild 黑洞的零测地线和稳定性

沈 文 达

上海科学技术大学物理系, 上海, 201800

朱 蔚 通

中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海, 201800

1991 年 1 月 9 日收到

对非奇性 Schwarzschild 黑洞的零测地线和稳定性进一步进行了研究。结果表明, 零测地线和类时测地线一样是完备的, 稳定的非奇性黑洞可以存在。

PACC: 9760L; 0420

1981 年 Gonzalez-Diaz^[1] 提出了 Schwarzschild 黑洞内部的非奇性时空度规。之后, 对非奇性黑洞的研究逐步引起了关注^[2-8]。考察 Gonzalez-Diaz 对 Schwarzschild 黑洞内部时空的处理, 我们注意到尚存在如下疑问:

- (1) $p = -\rho$ 状态方程不满足强能量条件, 是否有真实的物理意义?
- (2) 把在视界(零超曲面)上度规系数有相同行为作为连接条件, 是否充分?
- (3) 有没有半径小于视界半径的非奇性黑洞存在?

无疑, 弄清这些问题, 对于理解黑洞的真实物理图象是有意义的。

关于第一个问题, 我们已在文献[3]中作了讨论。鉴于被愈来愈多的人接受的暴涨宇宙学或新暴涨宇宙学方案所要处理的真空状态方程也是 $p = -\rho$ ^[9], 以及 $p = -\rho$ 可以代表处于相对论性高密度状态的介子的状态方程^[10], 这种疑虑正在逐步减少。

关于第二个问题, 涉及到零超曲面上的连接条件。由于单位零法向矢量和它的非固有曲率尚无确切的定义^[11], 增加了排除疑惑的困难。文献[6,7]采用 Kruskal 坐标系进行了讨论, 并用任意方向导数连续性的要求回避了零曲面法向导数不确定的困难, 说明视界处的奇性来自于 Schwarzschild 坐标系的不好的选择, 是非物理奇性。

关于第三个问题, 还没有充分讨论。近来, 文献[8]从流体动力学方程和物质守恒方程出发, 讨论了等效无质量流体元的运动。指出其界面必沿类光线运动, 这种黑洞是不稳定的。由于这结论不同于前面得到的结论, 进一步在数学上严格地论证并寻求实验检验是必要的。

本文将结合前面提出的第三个问题, 研究零测地运动, 并进一步讨论非奇性黑洞的稳定性。

先分析文献[8]中的数学推导。为了讨论方便,把文献[8]中的方程都括上花括号,以与我们后面给出的方程(用圆括号)相区别。

从方程{7}得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad \{7'\}$$

把{7'}代入文献[8]中的{5},{6}式,并化简,得到

$$-g^{00}v \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad \{5'\}$$

和

$$g^{11} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad \{6'\}$$

正如作者分析的,存在平凡解 $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$ 。对于边界面 $r = R$ 处密度突变情况,把文献[8]中{9}式

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\rho \delta(r - R) \quad \{9\}$$

代入{5'}和{6'}式得到

$$g^{00}\rho v \delta(r - R) = 0 \quad \{5''\}$$

和

$$-g^{11}\rho \delta(r - R) = 0. \quad \{6''\}$$

对于零质量流体元,有状态方程 $p = -\rho$, 这条件等价于 $g_{00} = (g_{11})^{-1}$ 。显然,要{5''}和{6''}式同时成立,必要求 $g^{11}|_{r=R} = 0$ 和 $v|_{r=R} = 0$ 。这意味着介质球边界处速度必为零,与文献[8]的结论矛盾。

为了进一步理解和分析非奇性黑洞的时空结构,下面我们在 Eddington-Finkelstein 坐标系中讨论零测地运动和稳定性。

在标准坐标中 Schwarzschild 黑洞的非奇性时空度规具有下面的形式:

$$ds^2 = (1 - R_s/r)dt^2 - (1 - R_s/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r \geq R_s); \quad (1)$$

$$ds^2 = (1 - r^2/R_s^2)dt^2 - (1 - r^2/R_s^2)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r \leq R_s). \quad (2)$$

对应上面度规(1)和(2)式的 Eddington-Finkelstein 形式为^[12]

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2) - \frac{R_s}{r}(d\bar{t} + d\bar{r})^2 \quad (r \geq R_s); \quad (3)$$

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2) - \frac{\bar{r}^2}{R_s^2}(d\bar{t} + d\bar{r})^2 \quad (r \leq R_s), \quad (4)$$

其中

$$\bar{t} = t + R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1), \quad \bar{r} = r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi, \quad (5)$$

$$\bar{t} = t - \bar{r} + \frac{R_s}{2} \ln(1 + \bar{r}/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln(1 - \bar{r}/R_s), \quad \bar{r} = r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi. \quad (6)$$

令 $ds^2 = 0$, 从(3)和(4)式可以得到两组零测地线方程

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -1 \quad (r \geq R_s); \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -1 \quad (r \leq R_s) \quad (8)$$

和

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = \frac{1 - R_s/r}{1 + R_s/r} \quad (r \geq R_s); \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = \frac{1 - \bar{r}^2/R_s^2}{1 + \bar{r}^2/R_s^2} \quad (r \leq R_s). \quad (10)$$

(7),(8)式这组解代表光子沿径向向内运动,与坐标无关。这组解在 $\bar{r} = \bar{r} = r = R_s$ 处仍有 $d\bar{r}/d\bar{t} = d\bar{r}/d\bar{t} = -1$ 。而(9),(10)式这组解描述从球心向外的运动。在球心处光子速度为1,随着向外运动,速度逐渐减少,到 $\bar{r} = \bar{r} = r = R_s$ 处,给出 $d\bar{r}/d\bar{t} = d\bar{r}/d\bar{t} = 0$ 。光子出视界,速度又增加,在无穷远处, $d\bar{r}/d\bar{t}|_{r=\infty} = 1$ 。

方程(7)和(8)描述的零测地线为

$$\bar{r} = -\bar{t} + C_1 \quad (\bar{r} \geq R_s); \quad (11)$$

$$\bar{r} = -\bar{t} + C_2 \quad (\bar{r} \leq R_s). \quad (12)$$

令 $C_1 = 0$, 并把(5)式代入(11)式,得到

$$\bar{r} = -\bar{t} - R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1),$$

即

$$\bar{t} = -\bar{r} - R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1) \quad (r \geq R_s). \quad (11')$$

把(6)式代入(12)式,得到

$$\bar{r} = -\bar{t} + \bar{r} - \frac{R_s}{2} \ln(1 + \bar{r}/R_s) + \frac{R_s}{2} \ln\left(1 - \frac{\bar{r}}{R_s}\right) + C_2,$$

即

$$\bar{t} = -\frac{R_s}{2} \ln(1 + r/R_s) + \frac{R_s}{2} \ln(1 - r/R_s) + C_2 \quad (r \leq R_s). \quad (12')$$

利用 $r = R_s$ 处,(11')和(12')式应给出相同时间 \bar{t} 的要求,可以求得

$$C_2 = -R_s - R_s \ln\left(\frac{R_s}{R_s} - 1\right) - \frac{R_s}{2} \ln\left(1 - \frac{R_s}{R_s}\right) + \frac{R_s}{2} \ln 2. \quad (13)$$

从方程(5),(6),(11'),(12')和(13),得到

$$\bar{t} = \begin{cases} -\bar{r} - R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1) & (r \geq R_s); \\ -\frac{R_s}{2} \ln(1 + r/R_s) + \frac{R_s}{2} \ln(1 - r/R_s) - R_s & (r \leq R_s). \end{cases} \quad (14)$$

$$-R_s \ln(R_s/R_s - 1) - \frac{R_s}{2} \ln(1 - R_s/R_s) + \frac{R_s}{2} \ln 2 \quad (r \leq R_s). \quad (15)$$

光子在 $\bar{t} = -\infty$, 从 $r = \infty$ 出发,将在 $\bar{t} = \infty$ 到达 $r = 0$ 处,其测地线是无限长的。

方程(9),(10)描述的是另一组测地线,它们可以用直接积分(9)和(10)式得到

$$\bar{t} = \bar{r} + 2R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1) + C_3, \quad (\bar{r} \geq R_s); \quad (16)$$

$$\bar{t} = -\bar{r} + R_s \ln(1 + \bar{r}/R_s) - R_s \ln(1 - \bar{r}/R_s) + C_4, \quad (\bar{r} \leq R_s). \quad (17)$$

把(5)和(6)式分别代入(16)和(17)式,得到

$$\bar{t} = -\bar{r} + R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1) + C_3, \quad (r \geq R_s); \quad (16')$$

$$t = \frac{R_s}{2} \ln(1 + r/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln(1 - r/R_s) + C_4 \quad (r \leq R_s). \quad (17')$$

利用 $r = R_s$ 处, (16') 和 (17') 式给出相同时间 $t = 0$ 的要求, 可以定得

$$C_3 = -R_s - R_s \ln(R_s/R_s - 1) \quad (18)$$

和

$$C_4 = -\frac{R_s}{2} \ln 2 + \frac{R_s}{2} \ln(1 - R_s/R_s). \quad (19)$$

于是方程 (16') 和 (17') 可以重写为

$$t = \begin{cases} r + R_s \ln(r/R_s - 1) - R_s - R_s \ln(R_s/R_s - 1) & (r \geq R_s); \\ \frac{R_s}{2} \ln(1 + r/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln(1 - r/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln 2 + \frac{R_s}{2} \ln(1 - R_s/R_s) & (r \leq R_s). \end{cases} \quad (20)$$

$$t = \begin{cases} \frac{R_s}{2} \ln(1 + r/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln(1 - r/R_s) - \frac{R_s}{2} \ln 2 + \frac{R_s}{2} \ln(1 - R_s/R_s) & (r \leq R_s). \end{cases} \quad (21)$$

方程 (20) 和 (21) 描述光子在 $t = -\infty$ 从 $r = 0$ 出发, 在 $t = 0$ 时到达 $r = R_s$, 当 $t = \infty$ 时到达 $r = \infty$. 测地线是无限长的. 由时空完备性的论述^[3], 可知零测地线和类时测地线一样是完备的.

上面的论述是不难理解的. 因为 $r = R_s$ 处只是 Schwarzschild 坐标的坐标奇性, 是非物理起因的. 当物理奇点 $r = 0$ 在特殊的物质状态方程 ($p = -\rho$) 下消除后, 时空应该是无奇性的.

最后, 讨论黑洞的稳定性. 假设半径为 $r_b < R_s$ 的黑洞存在. 同样的分析有

$$ds^2 = (1 - R_s/r) dt^2 - (1 - R_s/r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r \geq r_b); \quad (22)$$

$$ds^2 = (1 - c^2 r^2) dt^2 - (1 - c^2 r^2)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r \leq r_b). \quad (23)$$

其相应的 Eddington-Finkelstein 形式为

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2) - \frac{R_s}{\bar{r}}(d\bar{t} + d\bar{r})^2 \quad (r \geq r_b); \quad (24)$$

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2) - c^2\bar{r}^2(d\bar{t} + d\bar{r})^2 \quad (r \leq r_b), \quad (25)$$

其中

$$\bar{t} = t + R_s \ln(\bar{r}/R_s - 1), \quad \bar{r} = r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi, \quad (26)$$

$$\bar{t} = t - \bar{r} + \frac{1}{2c} \ln(1 + c\bar{r}) - \frac{1}{2c} \ln(1 - c\bar{r}), \quad \bar{r} = r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi. \quad (27)$$

连接条件要求在 $r = r_b$ 处, 坐标相等, 即 $\bar{r}_b = \bar{r}_b = r_b$, $\bar{t}_b = \bar{t}_b$. 从 \bar{t} 和 \bar{t} 的表达式可以看到, 对于任意 $r_b < R_s$ 的情况, 在任何有限时间 t 内, 都不能有相同坐标 \bar{t} 和 \bar{t} , 仅当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\bar{t} = \bar{t}$ 才成立. 这时利用度规系数应在边界处相等的要求可以求得

$$c = (R_s/r_b^3)^{1/2}.$$

这表明半径小于 R_s 的黑洞要经过无限长的时间才能形成. 这也从一个方面说明 $r = R_s$ 的黑洞是可以存在和稳定的.

[1] P. F. Gonzalez-Diaz, *Lett. Nuo. Cim.*, 32(1984), 161.

[2] Shen Wenda and Zhu Shitong, *Nuo. Cim.*, B85(1985), 142.

[3] Shen Wenda and Zhu Shitong, *Gen. Relativ. Gravit.*, 17(1985), 739.

[4] Zhu Shitong and Shen wenda, *Chinese Physics*, 6(1986), 950.

- [5] ϕ . Grøn, *Lett. Nuo. Cim.*, 44(1985), 177.
[6] Wenda Shen and Shitong Zhu, *Phys. Lett.*, A126(1988), 229.
[7] 沈文达、朱蔚通, *物理学报*, 37(1988), 939.
[8] 俞允强、范祖辉, *物理学报*, 39(1990), 1179.
[9] A. D. Linde, in "The Very Early Universe", eds. G. W. Gibbons, S. W. Hawking and S. T. C. Siklos. Cambridge, Cambridge University Press, (1983), p. 205—249.
[10] R. Hakim, *Riv. Nuo. Cim.*, 1(1978), 1.
[11] R. K. Sachs, in "Relativity, Groups and Topology" eds. C. Dewitt and B. Dewitt, New York, (1964), p. 534.
[12] Moshe Carmeli, *Classical Field: general relativity and gauge theory*, A Wiley-Interscience Publication, (1982), 163.
[13] *ibid*, 164.

NULL GEODESICS AND THE STABILITY OF THE NONSINGULAR SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

SHEN WEN-DA

Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai, 201800

ZHU SHI-TONG

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai, 201800

(Received 9 January 1991)

ABSTRACT

The null geodesics and the stability of the nonsingular black hole are further investigated. The results show that null geodesics in the nonsingular Schwarzschild black hole are also complete as the timelike geodesics and a stable nonsingular black hole can exist.

PACC: 9760L; 0420