

等离子体简并与近简并四波混频理论

透射光栅位形

吴 颖

华中理工大学物理系, 武汉, 430074

1990 年 3 月 6 日收到; 1990 年 7 月 1 日收到修改稿

本文系统研究了波波相互作用形成透射光栅情况下的等离子体简并与近简并四波混频理论, 导出普适四波非线性耦合方程组, 并求出其精确解析解. 这一理论将有助于研制各种微波频段内快速响应非线性光学元件.

PACC: 5240D; 4265F

一、引 言

四波混频技术已得到广泛应用. 寻求合适的非线性材料是实现四波混频技术的重要环节之一. 最近, 人们对光致折射材料 (photorefractive materials) 进行了一系列研究^[1-5]. 他们分别对波波相互作用形成透射光栅^[1-4]或反射光栅^[3,5]情况下, 光致折射材料中简并四波混频理论及其应用进行了广泛深入的探讨, 认为它们是实现相位共轭反射^[1]、透射放大^[2]、无反射镜自持振荡^[2,3]、双稳态^[5]等应用的良好四波混频非线性媒质. 可是它们的不足之处是覆盖频段较窄、响应速度慢^[5]. 如所周知, 等离子体是响应快、覆盖频段宽的非线性媒质, 特别是可在其它材料难以胜任的微波频段内使用^[6,7], 因而是研制微波频段内各种快速响应的非线性光学元件的理想材料. 由于上述原因, 本文将系统研究波波相互作用形成透射光栅情况下的无磁化等离子体简并与近简并四波混频理论. 证明通过适当安排, 可以实现透射光栅位形; 导出该位形下的普适四波非线性耦合方程组; 得到两组精确解, 这是目前透射光栅位形下, 四波混频理论 (包括光致折射材料等媒质情况) 中还无人得到的即包括强度又包括位相的解. 本文理论对流体描述和 Vlasov 描述这两种方法进行了统一处理, 而且最后结果还可推广到 Boltzmann 描述情况, 因而是适用于各种无磁化等离子体形态的普遍形式. 本文理论将有助于各种微波频段内快速响应非线性光学元件的研制.

二、研究系统的描述

考虑标准的四波混频 (FWM) 位形 (如图 1). 无磁化等离子体位于 $x = 0$ 和 $x = L$

之间,并受到四支频率和波数相近的电磁波的照射.波矢方向如图 1 所示.四支波的频率和波矢还满足如下关系式:

$$\omega_a = \omega_b, \omega_c = \omega_d, \quad (1a)$$

$$\mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b = 0, \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_d = 0. \quad (1b)$$

当 $\omega_a \approx \omega_c$ 时,还假定

$$|\omega_a - \omega_c| \ll \omega_a$$

和 ω_c . 即考虑简并 ($\omega_a = \omega_b = \omega_c = \omega_d$) 和近简并情况.

a 和 d 波的相互干涉以及 b 和 c 波的相互干涉都会在等离子体中形成图 1 所示的稳定(简并时)或运动(近简并)光栅,而 a 和 c 波或 b 和 d 波的相互干涉将形成与图 1 所示

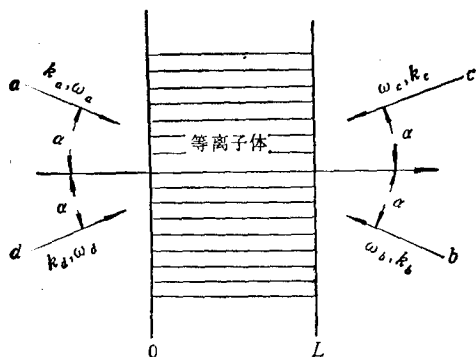


图 1 透射光栅位形下的四波混频示意图

光栅方向垂直的稳定或运动光栅. 如果以某种方法抑制或消除后一种光栅而仅保留图 1 所示方向上的光栅,就实现了透射光栅位形^[1-4]. 将证明通过选取 a 和 d 波的偏振方向相同, b 和 c 波的偏振方向相同,但两个方向互相垂直就可实现透射光栅位形. 实际上,即使四支波偏振方向相同,当 a 和 d 波混频能够共振激发等离子体的正则波模(注意此时 b 和 c 波混频也是如此)时,也可实现该种位形.

在相位共轭理论中,常称 a 和 b 波为泵浦波,称 d 波为信号(或探测)波,而称 c 波为 d 波的相位共轭波. 并且不从外部向非线性媒质内注入 c 波,仅考虑注入的 a , b 和 d 波相互作用产生的 c 波. 通常该理论还假定泵浦波的振幅远远大于 c 和 d 波的振幅,因而近似认为泵浦波的振幅不变,即所谓无衰减泵浦波近似. 本文理论将同时考虑注入或不注入 c 波这两种情况,而且不作无衰减泵浦波近似. 下面列举本文所需基本公式.

等离子体可用 Vlasov 方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{q_a}{m_a} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right] f_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (2)$$

或流体方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} n_a + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = 0, \quad (3)$$

$$n_a m_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_a = -\nabla P_a + n_a q_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}/c) \quad (4)$$

来描述,式中下标 $\alpha (=e, i)$ 表示粒子种类, n_α 和 P_α 为密度和压强, f_α 为分布函数, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 为等离子体中的波动电磁场,它们满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} c \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ c \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha, \quad \mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \quad (6)$$

上列诸式可在存在四支外加电磁波

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=a,b,c,d} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}_j^{(e)} \exp(-i\omega_j t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.} \right] \quad (7)$$

的条件下求解, 式中 c. c. 表示前一项的复共轭, $\mathbf{E}_j^{(e)}$ 为电场的复振幅, 假定它们为小量, 即

$$\xi_j = |e\mathbf{E}_j^{(e)} / m_e c \omega_j| \ll 1, \quad (8)$$

式中 m_e 为电子质量. 四波混频理论只需考虑到 ξ 的三阶量. 下面将证明 (7) 式中四支注入波都是等离子体的正则波模.

三、四波非线性耦合方程组的推导

1. 内部场

当外加电磁波

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{(e)} \exp(-i\omega_e t + i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.} \quad (9)$$

时, 不难求出等离子体的线性响应为^[6]

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad (10)$$

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{k} \times \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) / \omega, \quad (11)$$

$$n_a^{(1)}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_a^{(1)} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad \mathbf{u}_a^{(1)} = iq_a \mathbf{E}_1 / m_a \omega, \quad (13)$$

$$\mathbf{J}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -en_0 \mathbf{u}_e^{(1)}(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2, \quad (15)$$

式中 n_0 为无外场时的均匀等离子体密度, $\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}$ 为电子等离子体频率, $\omega = \omega_e$. 在 (14) 式中已忽略离子电流贡献. 由 (15) 式看出, 内部波数

$$k = (\omega_e^2 - \omega_{pe}^2)^{1/2} / c,$$

因此只有 $\omega_e > \omega_{pe}$ 的外加电磁波才能在等离子体中传播. 当 $\omega_e \gg \omega_{pe}$ 时,

$$k \approx \omega_e / c = k_e,$$

内场 $\mathbf{E}_1$ 就和外场 $\mathbf{E}^{(e)}$ 非常接近. 从现在起, 将不区分外加场和线性化内场的差别, 并且把等离子体内部总的线性化内部电磁波的电场写成

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=a,b,c,d} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}_j \exp(-i\omega_j t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.} \right], \quad (16)$$

式中频率为 $\omega_j^2 = k_j^2 c^2 + \omega_{pe}^2$, $\mathbf{E}_j$ 在相应的注入边界上为已知量. 为了知道波在等离子体内形成的光栅, 必须计算等离子体对波的二阶密度响应.

2. 密度响应和透射光栅位形的实现

记

$$\mathbf{u}_a^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_a^{(\beta)} \exp(-i\omega_\beta t + i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_\beta \exp(-i\omega_\beta t + i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{k}_\beta \times \mathbf{E}_\beta \exp(-i\omega_\beta t + i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r})/2\omega_\beta + \text{c. c.}, \quad (19)$$

$$n_a^{(\beta, \delta)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} n_a^{(\beta, \delta)} \exp(-i\omega_{\beta\delta} t + i\mathbf{k}_{\beta\delta} \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad (20)$$

式中 $\delta, \beta = a, b, c, d$. $\mathbf{u}_a^{(\beta)} = iq_a \mathbf{E}_\beta / m_a \omega_\beta$ 为对 $\mathbf{E}_\beta$ 的线性速度响应, $n_a^{(\beta, \delta)}$ 表示 β 和 δ 波混频产生的频率 $\omega_{\beta\delta} = \omega_\beta - \omega_\delta$, 波矢 $\mathbf{k}_{\beta\delta} = \mathbf{k}_\beta - \mathbf{k}_\delta$ 的二阶密度响应.

为方便起见, 先记 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\beta\delta}$, $\omega = \omega_{\beta\delta}$, $\tilde{n}_a = n_a^{(\beta, \delta)}$. 不难看出, 在计算 $\tilde{n}_a$ 时, β 和 δ 波的作用可以用粒子受到的等价力 $\mathbf{F}_a(\mathbf{r}, t)$ 来代替, 它为

$$-m_a \mathbf{u}_a^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_a^{(\delta)}(\mathbf{r}, t) + q_a \mathbf{u}_a^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}^{(\delta)}(\mathbf{r}, t)/c + (\beta \rightleftharpoons \delta) \quad (21)$$

中频率为 ω , 波矢为 $\mathbf{k}$ 的项决定. 记

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{F}_a \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \text{c. c.}, \quad (22)$$

由 (17)–(21) 式不难得到

$$\mathbf{F}_a = -iq_a^2 \mathbf{k} (\mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_\delta^*) / 2m_a \omega_\beta \omega_\delta. \quad (23)$$

当等离子体中存在力 $\mathbf{F}_a$ 时, 根据等离子体线性波动理论可以得到^[6]

$$4\pi q_a \tilde{n}_a(\mathbf{k}, \omega) + \chi_a(\mathbf{k}, \omega) i\mathbf{k} \cdot (\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{F}_a/q_a) = 0, \quad (24)$$

式中 $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$ 为 β 和 δ 波混频产生的静电型扰动电场, χ_a 为静电型线性极化率. 利用泊松方程 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = 4\pi e(\tilde{n}_i(\mathbf{r}, t) - \tilde{n}_e(\mathbf{r}, t))$ 得到

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi e(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e). \quad (25)$$

再利用 (23) 至 (25) 式并忽略 $\mathbf{F}_i (=m_e \mathbf{F}_e/m_i)$ 后得到

$$\tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega) = -k^2 \chi_e(\mathbf{k}, \omega) [1 + \chi_i(\mathbf{k}, \omega)] \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_\delta^* / [8\pi m_e \omega_\beta \omega_\delta \epsilon(\mathbf{k}, \omega)], \quad (26)$$

式中 $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \chi_e(\mathbf{k}, \omega) + \chi_i(\mathbf{k}, \omega)$ 为等离子体线性静电型响应的介电函数. 恢复到原来的记号即为

$$\begin{aligned} n_e^{(\beta, \delta)}(\mathbf{r}, t) &= n_e^{(\beta, \delta)} \exp(-i\omega_{\beta\delta} t + i\mathbf{k}_{\beta\delta} \cdot \mathbf{r})/2 + \text{c. c.}, \\ n_e^{(\beta, \delta)} &= -k_{\beta\delta}^2 \chi_e(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta}) [1 + \chi_i(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta})] \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_\delta^* / [8\pi m_e \omega_\beta \omega_\delta \epsilon], \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $\epsilon = \epsilon(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta})$ 为静电型介电函数, $\beta, \delta = a, b, c, d$. $\mathbf{k}_{\beta\delta} = \mathbf{k}_\beta - \mathbf{k}_\delta$, $\omega_{\beta\delta} = \omega_\beta - \omega_\delta$, $k_{\beta\delta}^2 = |\mathbf{k}_{\beta\delta}|^2$.

由 (27) 式可以看出, 两个波的干涉在等离子体内形成密度光栅, 当 $\omega_{\beta\delta} = 0$ 时为稳定光栅, 当 $\omega_{\beta\delta} \neq 0$ 时为运动光栅. 如选取 a 和 d 波的电场同向, b 和 c 波的电场方向相同, 但两个方向互相垂直就可消除 a 和 c 波以及 b 和 d 波的干涉形成的光栅, 从而实现了透射光栅位形. 在 (1) 式条件下, a 和 c 波以及 b 和 d 波的干涉结果不会使 (27) 式中 ϵ 等于零, 而 $\epsilon(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad})$ 和 $\epsilon(\mathbf{k}_{bc}, \omega_{bc})$ 可同时趋于零, 即 a 和 d 波以及 b 和 c 波的混频能够共振激发等离子体静电正则波模, 因而它们混频产生的光栅将远远强于 a 和 c 波以及 b 和 d 波混频的结果, 故即使四支波偏振方向一致也可实现透射光栅位形. 从现在起, 将认为实现了透射光栅位形, 因此只考虑 a 和 d 波混频以及 b 和 c 波混频产生的密度

光栅. 利用极化率和介电函数的复共轭性质^[8]

$$\chi_a^*(\omega, \mathbf{k}) = \chi_a(-\omega, -\mathbf{k}), \quad \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(-\omega, -\mathbf{k}), \quad (28)$$

以及(1)和(27)式不难看出

$$n^{(\beta, \delta)*} = n^{(\delta, \beta)}. \quad (29)$$

注意 $n^{(\beta, \delta)}$ 为波感应的对等离子体密度 n_0 的修正, 不影响本文结论, 因此以下讨论将不予考虑.

3. 四波非线性耦合方程组

由(5)式可以得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \nabla \nabla \cdot - c^2 \nabla^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (30)$$

注意到 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ 和一阶电流密度满足 $4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \omega_{pe}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, 得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^{(3)}(\mathbf{r}, t). \quad (31)$$

从(6)和(12)式不难看出, 最低阶非线性电流密度为三阶量 $\mathbf{J}^{(3)}$, 它由二阶密度响应和线性速度响应的乘积决定. 由(1), (6)和(17)式不难看出, 驱动 a 波的三阶电流密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_a^{(3)} \exp(-i\omega_a t + i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r})/2 + \text{c. c.}, \\ \mathbf{J}_e^{(3)} &= -e(n_e^{(a,d)} + n_e^{(c,b)})\mathbf{u}_e^{(d)}/2 = ie^2(n_e^{(a,d)} + n_e^{(c,b)})\mathbf{E}_d/2m_e\omega_d, \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $n_e^{(a,d)}$ 和 $n_e^{(c,b)}$ 由(27)式决定. 得到(32)式时已用到透射光栅位形的条件. 假定 $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_a(x) \exp(-i\omega_a t + i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r})/2 + \text{c. c.}$, 振幅 $\mathbf{E}_a$ 为 x 方向上的缓变函数, 即

$$|\mathbf{k}_a \cdot \nabla E_a(x)| \gg \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_a(x) \right|. \quad (33)$$

再利用 $k_a^2 c^2 = (\omega_a^2 - \omega_{pe}^2)$ 就可从(31)式得到

$$2c^2 \mathbf{k}_a \cdot \nabla E_a(x) = 4\pi \omega_a \mathbf{J}_a^{(3)}(x), \quad (34)$$

式中 $\mathbf{J}_a^{(3)}(x)$ 由(32)式决定. 由(1)式知, $\omega_{ad} = \omega_{be}$, $\mathbf{k}_{ad} = -\mathbf{k}_{be}$. 注意到

$$\varepsilon(-\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$$

和 $\chi_a(-\mathbf{k}, \omega) = \chi_a(\mathbf{k}, \omega)$, 以及 $\mathbf{E}_a$ 和 $\mathbf{E}_d$ 同向; $\mathbf{E}_b$ 和 $\mathbf{E}_c$ 同向的透射光栅位形的条件, 从(32)和(34)式得到

$$\frac{dE_a}{dx} = -\gamma(E_a E_d^* + E_c E_b^*)E_d, \quad (35)$$

式中 $\gamma = ie^2 k_{ad}^2 \chi_e(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad})[1 + \chi_i(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad})]/8m_e^2 c^2 \omega_d^2 k_a \cos \alpha_{ad}$, $\varepsilon_{ad} = \varepsilon(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad})$, 角度 α 如图1所示. 完全按相同步骤, 可以得到 $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_c$ 和 $\mathbf{E}_d$ 满足的方程. 最后得到透射光栅位形下的四波非线性耦合方程组为

$$\frac{d}{dx} E_a = -\gamma(E_a E_d^* + E_c E_b^*)E_d, \quad (36a)$$

$$\frac{d}{dx} E_b^* = -\gamma(E_a E_d^* + E_c E_b^*) E_c^*, \quad (36b)$$

$$\frac{d}{dx} E_c = \gamma(E_a E_d^* + E_c E_b^*) E_b, \quad (36c)$$

$$\frac{d}{dx} E_d^* = \gamma(E_a E_d^* + E_c E_b^*) E_a^*, \quad (36d)$$

式中非线性耦合系数 γ 的表达式可写成

$$\begin{aligned} \gamma &= i|\gamma| \exp(i\Psi), \\ |\gamma| \exp(i\Psi) &= e^2 k_{ad}^2 \chi_e (1 + \chi_i) / 8 m_e^2 c^2 \omega_d^2 k_a \cos \alpha \varepsilon, \end{aligned} \quad (37)$$

式中 $\chi_a = \chi_a(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad})$, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad}) = 1 + \chi_e + \chi_i$ 分别代表静电型线性极化率和介电函数. $\mathbf{k}_{ad} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_d$, $\omega_{ad} = \omega_a - \omega_d$, $k_{ad}^2 = |\mathbf{k}_{ad}|^2$. 在导出 (37) 式时, 已用到 (1) 式以及 $|\omega_{ad}| \ll \omega_a, \omega_d$; $|\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_d| \ll k_a, k_d$ 条件, 因此已在其中取

$$\omega_d^2 k_a \approx \omega_c^2 k_b \approx \omega_b^2 k_c^2$$

等等.

四、(36) 式的两组精确解

由 (36) 式不难得到

$$-\left(\frac{d}{dx} E_a\right)/E_d = -\left(\frac{d}{dx} E_b^*\right)/E_c^* = \left(\frac{d}{dx} E_c\right)/E_b = \left(\frac{d}{dx} E_d^*\right)/E_a^*. \quad (38)$$

利用 (38) 式立刻得到下列物理量守恒:

$$\begin{aligned} I_a(x) + I_d(x) &= I_a(0) + I_d(0) = \text{const}, \\ I_b(x) + I_c(x) &= I_b(L) + I_c(L) = \text{const}, \\ E_a(x) E_c^*(x) - E_b^*(x) E_d(x) &= \text{const}, \\ E_a(x) E_b(x) + E_c(x) E_d(x) &= \text{const}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} I_0(x) &= I_a(x) + I_b(x) + I_c(x) + I_d(x) \\ &= I_a(0) + I_d(0) + I_b(L) + I_c(L) = \text{const}, \end{aligned} \quad (40)$$

式中 $I_\beta(x) = |E_\beta(x)|^2$, $\beta = a, b, c, d$. 注意在图 1 所示情况下, 可以规定边界条件 $E_a(0)$, $E_d(0)$, $E_c(L)$ 和 $E_b(L)$ 为已知量, 因此 (39) 和 (40) 式中能用已知边界条件给出的常数已明显写出. 对 $\gamma = i|\gamma| \exp(i\Psi)$ 中 Ψ 取任何实数值时, (39) 和 (40) 式均成立, 而且不难得到四支波强度在 Ψ 为任意值时的精确解析解 (见以下结语和讨论部分), 限于篇幅, 不在此明显写出. 本文将对 $\Psi = 0$ 和 $\pi/2$ 这两种重要特殊情况求出 (36) 式的两组精确解, 它们即包括强度又包括位相. 稍加改动后这两组解也适用于光致折射材料媒质的情况, 就我们所知, 至今无人求出透射光栅位形下四波混频耦合方程组的包括了位相的精确解, 就是 Ψ 取特定值时也是如此.

1. $\Psi = 0$ 情况

简并或近简并四波混频没有共振激发等离子体正则波模时, 可以忽略微小阻尼效应,

从而 ε 和 χ_a 为实数就对应 $\Psi = 0$ 情况. 此时 $\gamma = i|\gamma|$. 记

$$R = i|\gamma|(E_a E_d^* + E_c E_b^*). \quad (41)$$

由 (36) 式不难证明

$$R = R_0 \exp(i|\gamma|Wx), \quad (42)$$

式中 R_0 为复常数, 而

$$W = |\gamma|(2I_a + 2I_b - I_0) = \text{const.} \quad (43)$$

由 (43) 式可以把四波非线性耦合方程组转变成两组同型线性方程组如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} E_a &= -R_0 \exp(i|\gamma|Wx) E_d, \\ \frac{d}{dx} E_d &= R_0^* \exp(-i|\gamma|Wx) E_a; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} E_b &= -R_0^* \exp(-i|\gamma|Wx) E_c, \\ \frac{d}{dx} E_c &= R_0 \exp(i|\gamma|Wx) E_b. \end{aligned} \quad (45)$$

由 (44) 和 (45) 式可以求得 (36) 式在 $\Psi = 0$ 时的解为

$$E_a(x) = [E_a(0)D(x) - R_0 E_d(0)F(x)] \exp(iWx/2), \quad (46a)$$

$$E_d(x) = [E_a(0)R_0^* F(x) + E_d(0)D(-x)] \exp(-iWx/2), \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} E_b(x) &= [E_b(L)D(L-x) \\ &\quad + R_0^* E_c(L)F(L-x) \exp(-iWL)] \exp[iW(L-x)/2], \end{aligned} \quad (46c)$$

$$\begin{aligned} E_c(x) &= [-E_b(L)R_0 F(L-x) \exp(iWL) \\ &\quad + E_c(L)D(L-x)] \exp[iW(x-L)/2], \end{aligned} \quad (46d)$$

式中 W 由 (43) 式给出, 而

$$\begin{aligned} F(x) &= \sin(\xi x)/\xi, \quad D(x) = \cos(\xi x) - iWF(x)/2 \\ \xi &= (|R_0|^2 + (W/2)^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (47)$$

(46) 式就是 $\Psi = 0$ 时的四支波强度和位相的变化规律, 而且已满足相应注入边界上的边界条件.

2. $\Psi = \pi/2$ 情况

在近简并四波混频时, 如果 a 和 d 波以及 b 和 c 波的混频可共振激发等离子体正则波模, 即选取适当的 ω_{ad} 和 $\mathbf{k}_{ad}$ 使介电函数 $\varepsilon(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad}) \approx 0$. 此时必须计入微小的无碰撞或碰撞阻尼效应, 因此对实的频率 ω_{ad} 和波矢 $\mathbf{k}_{ad}$, 将会导致 $\varepsilon(\mathbf{k}_{ad}, \omega_{ad}) \approx i\eta$, η 为很小的实数, 从而非线性耦合系数是充分大的实数. 故 $\Psi = \pi/2$ 或 $3\pi/2$. 这里只考虑 $\Psi = \pi/2$ 情况, $\Psi = 3\pi/2$ 的情况可类似处理. 当 $\Psi = \pi/2$ 时, $\gamma = -|\gamma|$. 记

$$g = -|\gamma|(E_a E_d^* + E_c E_b^*). \quad (48)$$

由 (36) 式可以得到

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln g = -4|g|^2. \quad (49)$$

不难证明其解为

$$g(x) = g_0 / \cosh(2|g_0|x), \quad (50)$$

式中 $g_0 = |g_0|\exp(i\sigma)$ 为复常数. 利用 (48) 和 (50) 式可把 (36) 式变成两组彼此不耦合的线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} E_a &= -|g|\exp(i\sigma)E_d, \\ \frac{d}{dx} E_d &= |g|\exp(-i\sigma)E_a; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_b}{dx} &= -|g|\exp(-i\sigma)E_c, \\ \frac{dE_c}{dx} &= |g|\exp(i\sigma)E_b, \end{aligned} \quad (52)$$

式中 σ 为实常数, $|g| = |g_0|/\cosh(2|g_0|x)$. 作变量代换

$$u = \int_0^x |g|dx = \arctan(\exp(2|g_0|x)) - \pi/4$$

以及

$$E_{a,c} = A_{a,c}\exp(i\sigma/2), \quad E_{b,d} = A_{b,d}\exp(-i\sigma/2), \quad (53)$$

就可把 (51) 和 (52) 式变成容易求解的形式

$$\frac{d}{du} A_a = -A_d, \quad \frac{d}{du} A_d = A_a, \quad (54)$$

$$\frac{d}{du} A_b = -A_c, \quad \frac{d}{du} A_c = A_b. \quad (55)$$

求解 (54) 和 (55) 式后再变到原来的变量, 得到 (36) 式在 $\Psi = \pi/2$ 时的精确解析解为

$$\begin{aligned} E_a(x) &= [E_a(0)G(x) - E_d(0)S(x)\exp(i\sigma)]/T(x), \\ E_b(x) &= [E_b(L)G(x+L) - E_c(L)S(x-L)\exp(-i\sigma)]/T(x)T(L), \\ E_c(x) &= [E_b(L)S(x-L)\exp(i\sigma) + E_c(L)G(x+L)]/T(x)T(L), \\ E_d(x) &= [E_a(0)S(x)\exp(-i\sigma) + E_d(0)G(x)]/T(x), \end{aligned} \quad (56)$$

式中复常数 $g_0 = |g_0|\exp(i\sigma)$ 由 (48) 和 (50) 式决定, 而

$$G(x) = \cosh(|g_0|x), \quad S(x) = \sinh(|g_0|x), \quad (57)$$

$$T(x) = (G(2x))^{1/2}, \quad T(L) = T(x=L). \quad (58)$$

(56) 式已满足图 1 所示的注入边界条件.

五、结论与讨论

本文系统研究了透射光栅位形下无磁化等离子体简并和近简并四波混频理论. 下面总结本文结果并进行若干讨论.

1. 证明适当选取四波的偏振方向或者偏振方向相同但适当选取四波的频率, 使某些波的混频共振激发等离子体正则波模均可在等离子体中实现透射光栅位形.

2. 导出透射光栅位形下普适无磁化等离子体四波耦合方程组 (36) 式.

1) (36) 式与光致折射材料中的相应方程组形式类似. 区别是: (36) 式中耦合系数 γ 与波强度无关, 而它们的耦合系数为 γ/I_0 , 其中 I_0 为四支波的强度之和^[1-4]; 其次 γ 的表达式也是不同的, 这是显然的, 因为 γ 反映媒质特性, 不同媒质当然也不相同.

2) γ 中的 χ_a 和 ε 可以在各种等离子体形态(例如麦氏分布或多峰分布; 冷或热等离子体等等)下, 利用流体方法或 Vlasov 动力论方法计算出表达式, 而且也很容易计入碰撞效应. 本文这种统一处理方式, 将便于今后深入研究以等离子体为非线性媒质的光学元件.

3) χ_a 和 ε 实际上是等离子体静电型线性响应函数, 已有大量文献对各种可能等离子体形态下的 χ_a 和 ε 进行了计算, 不必再对其重新计算就可方便地查到各种情况下的显示结果. 因此本文普适方程为进一步讨论各种等离子体形态奠定了良好基础.

4) (36) 式不仅适用于简并混频也适用于近简并混频情况. 值得指出的是, 对同样等离子体位形, 简并混频与能共振激发的近简并混频将具有完全不同的 Ψ 值, 从而导致各波束的变化规律完全不同, 因而有不同的效用.

3. 得到四波耦合方程组的精确解析解.

1) 可以证明, 光致折射媒质情况下的 I_0 在透射光栅位形时为常数, 它与 x 无关^[1,3]. 因此在文献[1,3]中把 γ/I_0 换成本文的 γ 就可从它们的四波强度精确解得到本文(36)式的精确解. 因此, 用等离子体作为混频媒质必然也可实现相位共轭反射、透射放大、无反射镜自持振荡、双稳态等等作用. 加之可共振激发等离子体正则波模的近简并四波混频时的耦合系数 γ 非常大, 因此预料上述相位共轭效应等将极其显著. 关于这点, 将另文研究. 值得指出的是, 本文证明可行的两种实现透射光栅位形的方法不仅可实现偏振方向不变的相位共轭器, 而且可以实现偏振方向旋转 90° 的相位共轭器.

2) 更重要的是: 就我们所知, 至今无人求出透射光栅位形下的四波混频方程组的包括位相的精确解, 就是 Ψ 取特定值也是如此. 可是在相位共轭、带相位共轭镜的激光器、无反射镜自持振荡系统等应用方面, 波束的位相变化规律极为重要, 没有它就不可能设计出可信的光学元件^[3]. 而本文对 $\Psi = 0$ 和 $\pi/2$ 这两种情况求出了四支波的强度和位相的变化规律. 稍作变动这两种解也可适用于光致折射材料的情况.

总之, 等离子体是响应速度快、覆盖频段宽, 特别是可在其它材料难以适用的微波频段内使用的非线性材料. 本文结果表明, 它是研制微波频段内各种快速响应非线性光学元件的理想材料. 本文理论将有助于这方面的研究.

[1] M. Cronin-Golomb *et al.*, *Opt. Lett.*, **7**(1987), 313.

[2] B. Fischer *et al.*, *ibid.*, **6**(1981), 519.

[3] M. Cronin-Golomb *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-20**(1984), 12.

[4] H. G. Winful and J. H. Marburger, *Appl. Phys. Lett.*, **36**(1980), 613.

[5] M. R. Belic, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3169.

[6] 吴颖, 光学学报, **10**(1990), 425.

[7] I. Nebenzahl *et al.*, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 2144.

[8] A. G. Sitenko, *Fluctuations and Nonlinear Wave Interactions in Plasmas*, Pergamon, New York, (1982), p. 23.

THEORY OF DEGENERATE AND NEARLY DEGENERATE FOUR-WAVE MIXING IN PLASMAS

IN THE CASE OF TRANSMISSION GRATING CONFIGURATION

WU YING

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

(Received 6 March 1990; revised manuscript received 1 July 1990)

ABSTRACT

In this paper, the theory of degenerate and nearly degenerate four wave mixing in plasmas in transmission geometry is investigated. The universal set of four wave nonlinear coupled equations is obtained and its exact solution is found. The theory can be helpful in developing various high speed nonlinear optical devices in the range of microwave frequencies.

PACC: 5240D; 4265F