

弱耦合映射系统在周期窗口内的行为*

丁 鄂 江

北京师范大学低能核物理研究所, 北京 100875;

中国科学院理论物理研究所, 北京 100080

吕 燕 南

北京师范大学低能核物理研究所, 北京 100875

1991 年 5 月 10 日收到

通过解析讨论及数值计算的验证, 发现弱耦合映射系统的周期窗口只存在于耦合强度极小的范围内(对于 3 周期窗口大约为 10^{-3}), 这个范围可以定义为周期窗口的深度. 在周期窗口内耦合映射的行为可以通过讨论少数几个模(相对简单的耦合三映射, 实质是一维映射)而确定. 耦合映射的第一 Lyapunov 指数随耦合强度增大的变化曲线呈锯齿形状.

PACC: 0540

通过对非线性映射及常微分方程系统的研究, 人们认识到决定性的系统不仅可以呈现周期运动, 也可以呈现复杂的混沌行为^[1-4]. 近年来, 人们的注意力开始转向偏微分方程所描述的系统, 因为它们显示了同时涉及到时间和空间二者的混沌运动. 这项研究对于揭示湍流的原因有着重要的意义. 由于偏微分方程的数值研究要消耗大量的计算机时间, 耦合映射就成为讨论时空混沌的重要模型^[5-7].

本文讨论一维耦合映射

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (1)$$

其中 $x_n^{(i)}$ 表示时刻 n 格点 i ($i = 1, 2, \dots, L$) 的状态. $\varepsilon \in [0, 1]$ 是相邻格点之间的耦合强度. 局域的映射定义是单峰的,

$$f(x) = \mu x(1 - x), \quad (2)$$

其中 μ 是表征映射非线性的参数. 假定周期边界条件

$$x_n^{(0)} = x_n^{(L)}, \forall n. \quad (3)$$

Lyapunov 指数是描述系统运动状态的重要的量. 对于单个映射, Lyapunov 指数定义为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n)|, \quad (4)$$

其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数. $\lambda > 0$ 意味着运动是混沌的, 而 $\lambda < 0$ 反映出运动是

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

周期的. 对于耦合映射(1)式, 有

$$dx_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^L A_{ij} dx_n^{(j)}, \quad (5)$$

其中

$$A_{ij} = (1 - \varepsilon)f'(x_n^{(i)})\delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{2}[f'(x_n^{(i-1)})\delta_{i-1j} + f'(x_n^{(i+1)})\delta_{i+1j}]. \quad (6)$$

将沿着轨道所计算的矩阵 A 连乘 N 次, 得到矩阵 $A^{(N)}$ 它有 L 个本征值 $r_N^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), 那么

$$\lambda^{(i)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |r_N^{(i)}| \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

就定义为耦合映射(1)式的 L 个 Lyapunov 指数, 其中最大的一个定义为 Λ , 称为第一 Lyapunov 指数. $\Lambda > 0$ 意味着耦合系统做混沌运动, 而 $\Lambda < 0$ 意味着稳定的周期运动. 对于稳定的周期运动, 只要取 N 为周期 T 的二倍, $A^{(N)}$ 就给出正确的 $\lambda^{(i)}$ 值. 在通常情况下, Λ 不仅与参数 μ 和 ε 的数值有关, 而且也与初条件 $\{x_0^{(i)}\}$ 有关. 因此, 对于耦合映射的第一 Lyapunov 指数, 人们得到规律性的认识很少. 最近作者通过数值计算发现^[8], 当局域映射为单峰满迭代时, 在弱耦合的情况下, Λ 与 ε 之间有标度关系

$$\Lambda = \lambda_0 + \kappa \varepsilon^\sigma, \quad (8)$$

其中 λ_0 和 κ 是与局域映射细节有关的常数, 而指数 σ 则是普适的,

$$\sigma = 1/p. \quad (9)$$

这里 p 是局域映射极大值的次数.

当参数 μ 的值使得局域映射处于周期 T 窗口时, 上述标度律显然不正确. 具体地讲, 在

$$3.8284 < \mu < 3.8415 \quad (10)$$

范围内, 单个映射(2)式呈现周期 $T = 3$ 的运动, 相应的耦合映射系统具有稳定同步的周期 3 运动状态. 但是, Kaneko 等人发现^[6,9], 对于随机给定的初条件, 系统过渡到这个稳定的周期状态所需时间随着系统尺度 L 增大而急剧增大 (比 e^L 更快地增长), 因此对于大尺度的耦合映射系统实际上几乎观察不到周期窗口. 相应地, 系统的第一 Lyapunov 指数的计算也受到这个长弛豫时间的影响, 在真正实现的数值计算中只能求得所谓“有限时间 Lyapunov 指数”, 它通常是正数, 反映出弛豫过程中的运动是混沌的. 当 ε 很小的时候, 系统可以有不同步的稳定周期运动, 其弛豫时间短得多. Kaneko 的这些数值计算结果, 暗示在弱耦合情况下系统可能具有极其复杂的行为.

本文的目的是讨论弱耦合映射系统(1)式在周期窗口内的第一 Lyapunov 指数的行为, 并揭示造成这一结果的机制.

首先考察一个数值计算结果. 选择 $L = 173$, $\mu = 3.831$, ε 值在 $[0, 0.002]$ 范围内. 对每个 ε 值, 计算时都经过 8000 次迭代的过渡, 再用随后的 1440 次迭代计算第一 Lyapunov 指数. 可以验证, 只要初条件是随机选取的, 计算结果实际上不依赖于初条件. 所得的结果总结在图 1 中. 容易看出, 在 $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ 的范围内, Λ 是单调上升的. 在 $\varepsilon < \varepsilon_2$ 的范围内, Λ - ε 曲线呈锯齿形, Λ 始终不大于 0, 说明系统处于周期运动状

态; 当 $\varepsilon > \varepsilon_2$ 时, $\Lambda > 0$, 说明系统处在弛豫过程中的混沌运动状态. 注意到 ε 在 10^{-4} — 10^{-3} 数量级上引起 Λ 有 10^{-1} 数量级的改变, 就可以知道格点之间极其微弱的耦合就足以明显地改变系统的行为.

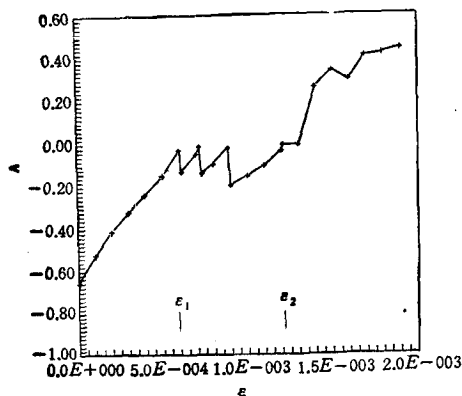


图1 耦合映射在 $L = 173$, $\mu = 3.831$ 时第一 Lyapunov 指数随 ε 增大呈锯齿形曲线

统的 L 个 Lyapunov 指数的近似值为

$$\lambda^{(i)} \approx \frac{1}{2T} \sum_{n=0}^{2T-1} \ln |f'(x_n^{(i)})| \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (11)$$

它同单个映射的计算公式(4)一致, 因此只要正确地计算耦合映射中每个格点的“轨道” $x_n^{(i)}$, 就可能从(11)式求得系统的所有 Lyapunov 指数的近似值. 具体的计算方法可以描述如下.

对于给定的 μ , 假定单个映射具有稳定的 3 周期轨道 X_0, X_1, X_2 . 先假定耦合映射系统的 $\varepsilon = 0$, 当随机给定初条件后, 所有格点都很快地弛豫到这个周期轨道上. 但由于每个格点的初条件彼此不同, 所以各格点互不同步. 在某一确定时刻, 每个格点都处于 X_0, X_1, X_2 中的一个. 用 0, 1, 2 分别代表 X_0, X_1, X_2 状态, 则该时刻整个系统的状态可以用由数字 0, 1 或 2 组成的长度为 L 的有限数列来描述, 例如:

$$0, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 2, \dots, 1. \quad (12)$$

如果相邻格点之间有足够弱的耦合, 则它们各自的周期运动都将保持稳定, 但轨道较无耦合情况有微小的偏移. 仍用数字 0, 1 和 2 表示格点的状态. 因为第 i 个格点近邻 $(i-1)$ 和 $(i+1)$ 的轨道从 X_0, X_1, X_2 偏移很小, 为计算第 i 个格点的新轨道 $\tilde{x}_n^{(i)}$, 可以认为它的近邻仍然保持在无耦合时的轨道上. 这样, 只须讨论一个极简单的三维映射

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i-1)} &= f(x_n^{(i-1)}), \\ x_{n+1}^{(i)} &= (1-\varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \\ x_{n+1}^{(i+1)} &= f(x_n^{(i+1)}). \end{aligned} \quad (13)$$

这组映射的稳定周期轨道不难通过数值计算或解析讨论而得到, 它显然依赖于初条件. 用一组数 $(k, m, 1)$ 代表初条件, 其中 $k, m, 1$ 都取 0, 1 或 2, 意味着第 $i-1, i, i+1$ 个格点的初态分别位于 X_k, X_m 和 X_1 的附近. 对于给定的初条件 $(k, m, 1)$, 三维映射

观察矩阵(6)式的形状, 可以看出, 当 ε 的值从 0 增加到 $\varepsilon > 0$ 时, A_{ij} 的值也相应地改变. 一方面, 每个矩阵元中包含的 $f'(x_n^{(i)})$ 值发生了变化, 这是由于 $x_n^{(i)}$ 值受到相邻格点之间耦合的影响而发生了偏离; 另一方面, A_{ij} 的矩阵元含有因子 $(1-\varepsilon)$ 或 $\varepsilon/2$. 显然, 后者所造成 Λ 的变化只在 $O(\varepsilon)$ 的数量级上, 因此可以推断 Λ 的变化主要由第一方面的原因所引起. 依照这一推断, 矩阵 $A^{(N)}$ 仍然可以认为是对角的. 它的

的对角元近似是 $\sum_{n=0}^{N-1} f'(x_n^{(i)})$, 取 $N = 2T$, 系

(13)式称为一个模。显然,从任意初条件出发的前三次迭代中, k, m, l 都将取遍 $0, 1, 2$ 这三个值。因此,不失一般性,可令 $m = 0$ 。此外, k 和 l 的互换显然不成为新的状态,故可令 $l \geq k$ 。这样,对于周期 3 的情况,只需考虑 6 种模

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (2, 0, 2). \quad (14)$$

对于周期 T 的情况,需要考虑的初条件数目为 $\frac{1}{2}T(T+1)$ 。如果从给定的初态 (k, m, l) 出发,经过周期 T 的任意倍数次迭代后仍然维持 (k, m, l) 的状态,我们称模 (k, m, l) 是稳定的,否则就是不稳定的。当给定 μ 和 ε 之后,对于每一个稳定的模,可以不难地用 (11)式计算一个 Lyapunov 指数的近似值。由这些模的 Lyapunov 指数计算系统(1)式的第一 Lyapunov 指数 Λ 的法则是:如果稳定模的数目大于 2,那么稳定模的 Lyapunov 指数中最大的一个,就等于系统(1)式在 L 足够大时的第一 Lyapunov 指数 Λ ,如果稳定模不超过 2 个,那么完全同步的模给出 Λ 。下面说明这一法则的理由。

事实上,假如随机地决定各映射的初条件 $\{x_i^{(0)}\}$,就相当于随机地确定如(12)式那样的一组初态。观察每个格点 i 及它的近邻 $(i-1), (i+1)$ 它们必然处于

$$\frac{1}{2}T(T+1)$$

模中的一种。另一方面,只要 L 充分大,每一种模都会出现。如果某个模不稳定,那么经过一段时间的迭代,这个模就会被破坏而变成其他模。如果稳定模的数目大于 2,那么系统(1)式就可以保留所有的稳定模,因此这些稳定模的 Lyapunov 指数中最大的一个就是 Λ ;如果稳定模不超过 2 个,那么其中必然包括一个同步的模 $(0, 0, 0)$,另一个可能存在的稳定模是不同步的。但是,由唯一的不同步稳定模组成的耦合大系统的状态,其初条件在全部可能的初条件中只占微不足道的测度,可以忽略不计;若由同步模和其他不同步模组成大系统的状态,则至少要有两个不同步的稳定模才有可能。因此,当系统的稳定模不超过两个时,系统只有完全同步的周期运动保持稳定,并占有初条件的几乎全部测度,而这个同步的稳定模给出 Λ 的值。

依据上述分析,可通过计算(13)式在各种初条件下的 Lyapunov 指数来确定(1)式的第一 Lyapunov 指数。对 $\mu = 3.831$, $0 \leq \varepsilon \leq 0.002$ 范围内(13)式的 Lyapunov 指数计算,按前面给出的法则求得 Λ 的近似值,所得结果总结在图 2 中。不难看出,对于 $\varepsilon \leq \varepsilon_2$,结果与图 1 几乎完全一致;当 $\varepsilon > \varepsilon_2$ 时,(1)式的最终稳定状态通常是同步的周期运动。由于到达这一状态所需的弛豫时间极长,所以数值计算给出“有限时间 Lyapunov 指数” $\Lambda > 0$ 。对于 $\varepsilon > \varepsilon_2$ 的情况,将另文讨论。

在以上的讨论中, $\mu = 3.831$ 位于局域映射(2)式的周期 3 超稳定轨道相应的 μ_c 左侧。若取 μ 的值在 μ_c 右侧,例如 $\mu = 3.833$, (1)式的数值计算结果与对各种模所做计算结果归纳在图 3 中。不难看出,在 $\varepsilon < \varepsilon_2$ 时两者相当精确地符合。

以上讨论适用于 $\mu > 3.5699456 \cdots$ 范围内的所有周期窗口。因此,可得以下结论: ε_2 可以作为周期窗口深度的精确定义,它是 μ 的函数。也就是说,当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ 时,耦合映射的行为基本上可以通过对于各种模的讨论而确定,系统到达的定态可能不同步,到达定态所用的时间不很长(不超过 L 的某个幂次)。当 $\varepsilon > \varepsilon_2$ 时,系统达到的定态通

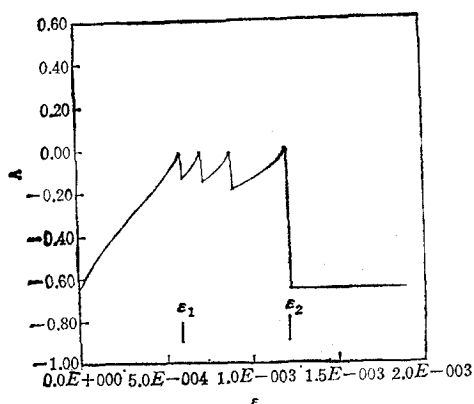


图2 对于(14)式所列6种模按本文法则计算的 Lyapunov 指数近似值

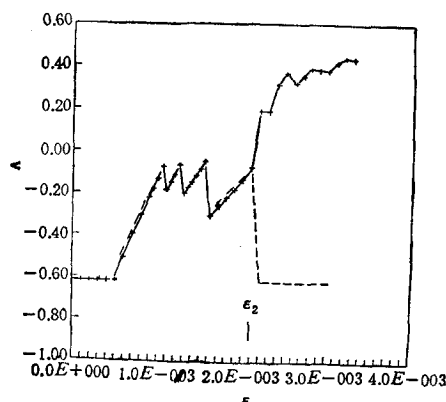


图3 当 $\mu = 3.833$ 时对于 (1) 式的数值计算(实线)与对于6种模的讨论(虚线)所得结果的比较

常是同步的周期运动,但达到这一定态所用的时间极长,所以实际上很难看到周期运动。

作者曾与胡岗教授进行了有益的讨论,在此表示感谢。

- [1] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, Weinheim, (1984).
- [2] P. Cvitanović, *Universality in Chaos*, Adam Hilger Ltd, Bristol, (1984).
- [3] B. -L. Hao, *Chaos*, World Scientific, Singapore, (1984).
- [4] G. Hu and B. -L. Hao, *Phys. Rev.*, **A42** (1990), 3335.
- [5] F. Kasper and H. G. Schuster, *Phys. Lett. A*, **113**(1986), 451.
- [6] K. Kaneko, *Phys. Lett. A*, **140**(1990), 105; *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, (99)(1989), 263; *Physica D*, **37**(1989), 60.
- [7] T. Bohr and O. B. Christensen, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 2161.
- [8] 吕燕南、丁鄂江, *物理学报*, **41**(1992), 第4期.
- [9] S. P. Kuznetsov and A. S. Pikovsky, *Physica D*, **19** (1986), 384.

BEHAVIOR OF A WEAK COUPLED MAP SYSTEM IN THE PERIODIC WINDOWS

DING E-JIANG

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica Beijing 100080

LU YAN-NAN

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 10 May 1991)

ABSTRACT

It is shown analytically as well as numerically that a periodic window of the coupled map system exists only for very weak coupling strength (about 10^{-3} for period 3 window, for

instance), which could be defined as the depth of the window. Within the windows the behavior of the coupled map system could be recovered by dealing with a few number of modes, which consist of coupled three maps. The first Lyapunov exponent for the coupled map system shows a "zigzag" curve form virsus the coupling strength.

PACC: 0540