

由基模群聚产生的相干谐波的时间剖型和线宽

丁 武

北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088
1991年3月28日收到; 1991年10月25日收到修改稿

本文中得到了由基模群聚产生的相干谐波的功率表达式, 并且解释了它们的时间剖型和线宽.

PACC: 4255T; 0250; 0260

一、引言

对在自由电子激光共振腔中相干谐波发射过程的理解是很重要的. 因为在高功率自由电子激光振荡器中, 人们希望减少特殊谐波的能量, 以避免光腔反射镜的损伤; 在科学应用中, 人们希望减小谐波辐射的线宽. 文献[1]给出在 Mark III 自由电子激光共振腔中辐射的头 7 个相干谐波的时间剖型、线宽和绝对能量的测量结果, 发现谐波的线宽比简单理论预言的要大. 本文试图用一种新的自由电子激光理论^[2], 给出文献[1]中主要测量结果的物理解释.

二、由基模群聚产生的相干谐波的功率

1. 描述相干谐波产生的方程

按照文献[2], 从麦克斯韦方程出发, 利用慢变包络近似 (SVEA) 和对光场作谱分解, 可以得到如下描述自由电子激光纵模的一般方程:

$$\frac{\partial a_n(z)}{\partial z} = -\frac{4\pi e}{2\alpha_p m_c^2 \omega_n} J_n(z), \quad (1)$$

$$a_n = \frac{e E_n}{\alpha_p m_c^2 k_n}, \quad (2)$$

$$E_n(z) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-ik_n z + i\omega_n t} \tilde{E}(z, t), \quad (3)$$

$$\omega_n = n\omega_1 = ck_n, \quad (4)$$

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{圆极化;} \\ \sqrt{2} & \text{线极化,} \end{cases} \quad (5)$$

$$J_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-ik_n z + i\omega_n t} J(z, t), \quad (6)$$

$$T = 2\pi/\omega_1. \quad (7)$$

此处 a_n, ω_n 和 K_n 分别为第 n 阶模光场的无量纲复数振幅、频率和波数; ω_1 为基模频率; e, m 和 $J(z, t)$ 分别为电子的电荷、质量和束流密度; c 为光速.

当不考虑电子束的热效应时,束流密度为

$$J(z, t) = -ec n_0 \left\{ \beta_{||}^{(0)} c \frac{f(t_0)}{n_0} dt_0 \beta_{\perp} \delta(z - z_i(t, t_0)) \right\}. \quad (8)$$

此处 $f(t_0)$ 为预群聚因子, t_0 为电子的拉氏坐标.

电子坐标 z, t 满足以下关系式:

$$t = t_0 + \int_0^z \frac{dz}{c\beta_{||}(z, t_0)}, \quad dt = \frac{dz}{c\beta_{||}(z, t_0)}. \quad (9)$$

将(8)和(9)式代入(6)和(1)式,得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_n(z)}{\partial z} = & \frac{4\pi e^2 n_0}{2\alpha_p m c \omega_n} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_0 \frac{f(t_0)}{n_0} \frac{\beta_{||}^{(0)}}{\beta_{||}(z, t_0)} \beta_{\perp} \exp \left\{ -ik_n z \right. \\ & \left. + i\omega_n t_0 + i\omega_n \int_0^z \frac{dz}{c\beta_{||}(z, t_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

新理论认为,自由电子激光的物理机制是电子束被群聚(bunched),即电子在由光场与摇摆(wiggle)场形成的有质势阱中的位相被调制,这种调制是通过改变电子的纵向速度分量来实现的.于是,电子的纵向速度分量 $\beta_{||}(z, t_0)$ 可以写为

$$\beta_{||}(z, t_0) = \beta_{||}^{(0)} + \Delta\beta_{||} = \beta_{||}^{(0)} + \Delta\beta_{||}^{(0)}(z) + \Delta\beta_{||}^{(1)}(z, t_0) + \Delta\beta_{||}^{(2)}(z, t_0). \quad (11)$$

此处 $\beta_{||}^{(0)}$ 为入射电子初速,对于相对论电子,它是接近 1 与 z 无关的常数. $\Delta\beta_{||}^{(0)}$ 为外加磁场产生的速度振荡,是与 t_0 无关的已知 z 的函数. $\Delta\beta_{||}^{(1)}$ 是在给定的外加光场作用下产生的速度变化. $\Delta\beta_{||}^{(2)}$ 是在所研究的光模作用下产生的速度变化. $\Delta\beta_{||}^{(1)}$ 和 $\Delta\beta_{||}^{(2)}$ 为 z 和 t_0 的函数.

将(10)式相角中的因子展开

$$\frac{1}{\beta_{||}(z, t_0)} = \frac{1}{\beta_{||}^{(0)}} - \frac{\Delta\beta_{||}}{\beta_{||}^{(0)2}} + \frac{\Delta\beta_{||}^2}{\beta_{||}^{(0)3}} + \dots, \quad (12)$$

对(10)式相角中和相角外做两点近似^[2]

$$\int_0^z \frac{dz}{\beta_{||}(z, t_0)} \approx \int_0^z \frac{dz}{\beta_{||}^{(0)}} - \int_0^z \Delta\beta_{||} dz, \quad (13)$$

$$\frac{\beta_{||}^{(0)}}{\beta_{||}(z, t_0)} \beta_{\perp}(z, t_0) \approx \beta_{\perp}(z, t_0). \quad (14)$$

而且我们研究的问题是只有基模(这里相当外加光场)群聚 $\Delta\beta_{||}^{(1)}$, 没有预群聚,即 $f(t_0) = n_0$, 和不计所研究的模的自群聚 $\Delta\beta_{||}^{(2)}$ (因为与 $\Delta\beta_{||}^{(1)}$ 相比, $\Delta\beta_{||}^{(2)}$ 不重要), 那么方程(10)变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_n(z)}{\partial z} = & \frac{\omega_b^2}{2\alpha_p c \omega_n} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_0 \beta_{\perp}(z, t_0) e^{i\omega_n t_0 - ik_n z + \frac{i\omega_n z}{c\beta_{||}^{(0)}}} \\ & \cdot F_n^{(0)}(z) F_n^{(1)}(z, t_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}, \quad (16)$$

$$F_n^{(m)} \equiv \exp\left(-\frac{i\omega_n}{c} \int_0^z \Delta\beta_{||}^{(m)} dz\right). \quad (17)$$

首先来计算 $F_n^{(0)}$.

$$F_n^{(0)} = \exp\left(-\frac{i\omega_n}{c} \int_0^z \Delta\beta_{||}^{(0)} dz\right). \quad (18)$$

在由共振腔自由电子激光 (FEL) 的基模群聚产生的相干谐波中, 奇数谐波是线极化摇摆器激发的, 偶数谐波是由光束与电子束不共轴激发的^[3], 于是对于线极化摇摆器, 有

$$\Delta\beta_{||}^{(0)} = -\frac{a_\omega^2}{2\gamma_0^2} \cos 2k_\omega z + \frac{a_\omega \theta}{\gamma_0} \cos K_\omega z, \quad (19)$$

$$\beta_\perp = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma_0} a_\omega (e^{ik_\omega z} + e^{-ik_\omega z}) \hat{e}_x, \quad (20)$$

$$a_n = a_n \hat{e}_x, \quad (21)$$

$$a_\omega = \frac{e B_\omega}{\sqrt{2} m c K_\omega}. \quad (22)$$

此处 θ 为光束与电子束之间的夹角.

将(19), (20)和(21)式代入(18)和(15)式, 并且利用下面公式:

$$e^{i\zeta \sin \theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\zeta) e^{il\theta}, \quad (23)$$

此处 J_l 为贝塞耳函数. 于是方程(15)变成下面形式:

$$\frac{\partial a_n(z)}{\partial z} = \frac{\omega_b^2 a_\omega F_{L\theta n}}{4c\gamma_0 \omega_n} e^{-i\Delta k_n z} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_0 e^{i\omega_n \tau_0} F_n^{(1)}(z, \tau_0), \quad (24)$$

$$F_{L\theta n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1+m}{2}} J_m(n\xi_\theta) \left[J_{\frac{n-1+m}{2}}(n\xi_L) - J_{\frac{n+1+m}{2}}(n\xi_L) \right], \quad (25)$$

$$\xi_\theta = \frac{2a_\omega \gamma_0 \theta}{(1 + a_\omega^2 + \gamma_0^2 \theta^2)}, \quad \xi_L = \frac{a_\omega^2}{2(1 + a_\omega^2 + \gamma_0^2 \theta^2)}, \quad (26)$$

$$\Delta k_n = n\Delta k_1, \quad (27)$$

$$\Delta k_1 = k_\omega - k_1 \left(\frac{1}{\beta_{||}^{(0)}} - 1 \right). \quad (28)$$

现在来计算 $F_n^{(1)}$

$$F_n^{(1)} = \exp\left\{-\frac{i\omega_n}{c} \int_0^z \Delta\beta_{||}^{(1)} dz\right\}. \quad (29)$$

在文献[2]中已给出.

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{||}^{(1)} &= \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \Delta\gamma^{(1)} \\ &= -\frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \frac{a_\omega k_1 F_{L\theta 1}}{\gamma_0} \int |a_{1B}| \sin \phi_{1B} dz, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\phi_{1B} = \left[k_{\omega} - k_1 \left(\frac{1}{\beta_{||}^{(0)}} - 1 \right) \right] z + k_1 \int_0^z \Delta \beta_{||}^{(1)} dz - \omega_1 t_0 + \phi_{1B_0}. \quad (31)$$

此处 $|a_{1B}|$, ϕ_{1B} , ω_1 , k_1 和 ϕ_{1B_0} 分别为基模光场的实数振幅、相位、频率、波数和电子在由基模光场与摇摆场形成的有质势阱中的位相。

从(31)式看到, 项 $K_1 \int \Delta \beta_{||}^{(1)} dz$ 是基模对电子的相位 ϕ_{1B} 的调制。当

$$\begin{cases} k_{sy} L_{\omega} < 1, \\ k_{sy} = \frac{\sqrt{a_{\omega} |a_{1B}| F_{L\theta 1} 2k_{\omega}}}{\mu} \end{cases} \quad (32)$$

时,

$$k_1 \int_0^z \Delta \beta_{||}^{(1)} dz \ll \omega_1 t_0. \quad (33)$$

即这一项可以忽略。此处 k_{sy} 为电子作同步振荡的波数。假设基模与电子束接近共振,

$$\Delta k_1 = k_{\omega} - k_1 \left(\frac{1}{\beta_{||}^{(0)}} - 1 \right) \approx 0 \quad (34)$$

和

$$\phi_{1B} \ll \omega_1 t_0, \quad (35)$$

于是, (31)式变为

$$\phi_{1B} = -\omega_1 t_0. \quad (36)$$

将(36)式代入(30)和(29)式, 给出

$$\begin{aligned} F_n^{(1)} &= \exp \{ i A_{n1} \sin \omega_1 t_0 \} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(A_{n1}) e^{il\omega_1 t_0}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$A_{n1} = -\frac{\omega_n}{c} \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \int_0^z \Delta \gamma_{\text{mod}} dz', \quad (38)$$

$$\Delta \gamma_{\text{mod}} = \int_0^{z'} \frac{a_{\omega} k_1 F_{L\theta 1} |a_{1B}|}{\gamma_0} dz''. \quad (39)$$

将(37)式代入(24)式, 并完成对 t_0 的积分, 得到描述由基模群聚产生的相干谐波的方程

$$\frac{\partial a_n(z)}{\partial z} = (-1)^n \frac{\omega_n^2 a_{\omega} F_{L\theta n}}{4c\gamma_0\omega_n} e^{-i\Delta k_n z} J_n(|A_{n1}(z)|). \quad (40)$$

2. 功率表达式

在 Mark III 自由电子激光共振腔中, 当基模增长到足够大但还未达到饱和时, 由于光束与电子束之间的滑移效应, 相干谐波将在系统中出现。相干谐波产生包括三个物理过程, 即调制、色散和辐射。这三个过程都是在同一个摇摆器中进行的。基模每通过一次摇摆器(每一个 pass), 一系列相干谐波微观脉冲将被发出。每个相干谐波宏观脉冲是它的微观脉冲的叠加。当宏观脉冲增长速率与衰减速率相等时, 宏观脉冲达到饱和。饱和长度是相干谐波的特征量。

将方程(40)两边对 z 积分, 在条件

$$a_n(0) = 0 \quad (41)$$

F, 得到

$$a_n(z) = (-1)^n \frac{\omega_0^2 a_w F_{L\theta n}}{4c\gamma_0 \omega_n} \int_0^z J_n(|A_{n1}(z')|) e^{-i\Delta k_n z'} dz'. \quad (42)$$

于是相干谐波的功率为

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{2} mc^2 k_n}{e} \right)^2 |a_n(z)|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} n_0^2 e^2 c \frac{a_w^2}{\gamma_0^2} F_{L\theta n}^2 \left| \int_0^z J_n(|A_{n1}(z')|) e^{-i\Delta k_n z'} dz' \right|^2. \end{aligned} \quad (43)$$

从(43)式发现,由基模群聚产生的相干谐波是一种超辐射,它的功率与电子束密度的平方成正比, $P_n \propto n_0^2$.

3. 相干谐波的能量

利用(43)式可以计算相干谐波的能量

$$U_n = \int_0^\infty P_n(z) \frac{dz}{c}. \quad (44)$$

4. 相干谐波的时间剖型

(1) 饱和长度 在饱和点,有

$$\frac{\partial |a_n(z)|}{\partial z} \bigg|_{z_c^{(n)}} = 0. \quad (45)$$

由(42)式,得

$$J_n(|A_{n1}(z_c^{(n)})|) = 0. \quad (46)$$

此处 $z_c^{(n)}$ 为 n 次相干谐波的饱和长度。

贝塞耳函数有一系列零点,让我们用一个近似公式给出这些零点位置 R_{mn} 的近似值^[4],

$$R_{mn} \approx \left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi. \quad (47)$$

此处 m 和 n 分别表示零点和相干谐波的顺序。

取贝塞耳函数 J_n 的第一个零点为饱和点,过了饱和点,相干谐波的功率将发生振荡。由(46)式,有

$$\begin{aligned} R_{1n} &= |A_{n1}(z_c^{(n)})| \\ &= n \frac{\omega_1}{c} \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} z_c^{(n)} \int_0^1 \Delta \gamma_{\text{mod}} dx, \end{aligned} \quad (48)$$

$$x = z/z_c^{(n)}. \quad (49)$$

由(48)式,得到

$$z_c^{(n)} \propto R_{1n}/n \quad (50)$$

利用(47)式,算出 R_{1n} 的数值列于表 1 中。

利用(50)式,算出 $z_c^{(n+1)}/z_c^{(n)}$ 的数值列于表 2 中。

表 2 表明:相干谐波次数 n 越高,它的饱和长度越短。

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7
R_{1n}	3.92	5.50	7.07	8.64	10.2	11.78	13.35

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7
$z_c^{(n+1)}/z_c^{(n)}$	0.702	0.857	0.917	0.944	0.962	0.971	/

(2) 振荡的平顶 贝塞耳函数 J_n 的所有零点之间的间隔都相等, 由(47)式, 可以得到

$$R_{m+1n} - R_{mn} = \pi. \quad (51)$$

因为

$$z_{m+1}^{(n)}/z_m^{(n)} = R_{m+1n}/R_{mn},$$

$$(z_{m+1}^{(n)} - z_m^{(n)})/z_m^{(n)} = (R_{m+1n} - R_{mn})/R_{mn} = \pi/R_{mn},$$

所以

$$\Delta z_{m+1m}^{(n)} = z_m^{(n)} \pi / R_{mn}. \quad (52)$$

当 n 增加时, R_{mn} 增加, $z_m^{(n)}$ 减小. 所以 $\Delta z_{m+1m}^{(n)}$ 亦减小, 即 n 越大, 振荡越厉害. 但振荡的幅度却减小, 因为 $|J_{n+1}^{\text{peak}}| < |J_n^{\text{peak}}|$. 换言之, 对于高次谐波, 将有一个趋于平的顶部.

5. 相干谐波的线宽

从(42)式可以求出有量纲的复数电场

$$\begin{aligned} E_n(z) &= \frac{\sqrt{2} m c^2 k_n}{e} a_n(z) \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{2} \pi e n_0 a_0 F_{L\theta n}}{\gamma_0} \int_0^z J_n(|A_{n1}(z')|) e^{-i \Delta k_n z'} dz', \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} |A_{n1}(z)| &= \frac{\omega_n}{c} \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \int_0^z \Delta \gamma_{\text{mod}} dz' \\ &= \alpha(z) \omega_n. \end{aligned} \quad (54)$$

由于相干谐波的功率在饱和点达到最大值, 因此现在来求在饱和点处有量纲复数电场的逆 Fourier 变换.

$$\begin{aligned} E(z_c^{(n)}, t) &= \sum_n E_n(z_c^{(n)}) e^{i(k_n z_c^{(n)} - \omega_n t)} \\ &= \frac{T}{2\pi} \int E(z_c^{(n)}, \omega) e^{-i\omega(t - z_c^{(n)}/c)} d\omega \\ &= (-1)^n \frac{T}{2\pi} \frac{\sqrt{2} \pi e n_0 z_c^{(n)} F_{L\theta n}}{\gamma_0} \int_0^1 \frac{e^{-i k_n \omega z_c^{(n)} x} g(t, z_c^{(n)}, x)}{\tau_R(x)} dx, \end{aligned} \quad (55)$$

$$g(t, z_c^{(n)}, x) = \begin{cases} \frac{z(-i)^n T_n\left(\frac{t - \tau_d(z_c^{(n)}, x)}{\tau_R(x)}\right)}{\left[1 - \left(\frac{t - \tau_d(z_c^{(n)}, x)}{\tau_R(x)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{t - \tau_d(z_c^{(n)}, x)}{\tau_R(x)}\right)^2 < 1; \\ 0 & \left(\frac{t - \tau_d(z_c^{(n)}, x)}{\tau_R(x)}\right)^2 > 1. \end{cases} \quad (56)$$

此处 T_n 为第一类 Chebyshev 多项式^[9], τ_d 为推迟时间

$$\begin{aligned} \tau_d(z_c^{(n)}, x) &= \frac{z_c^{(n)}}{c} + \frac{z_c^{(n)}}{c} \frac{\mu^2}{2\gamma_0^2} x \\ &\approx z_c^{(n)}/c. \end{aligned} \quad (57)$$

$\tau_R(x)$ 为超辐射寿命函数,

$$\tau_R(x) = \frac{z_c^{(n)}}{c} \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \int_0^x \Delta\gamma_{\text{mod}} dx. \quad (58)$$

$$\text{令 } y = (t - \tau_d^{(n)})/\tau_R(x), \quad (59)$$

$$\tau_d^{(n)} = z_c^{(n)}/c. \quad (60)$$

由(58)和(59)式,可求出

$$\frac{dx}{\tau_R(x)} = \frac{dy}{\tau_R^{(n)}\eta(y)y} \quad (61)$$

$$\tau_R^{(n)} = \frac{z_c^{(n)}}{c} \frac{\mu^2}{\gamma_0^3} \int_0^1 \Delta\gamma_{\text{mod}} dx, \quad (62)$$

$$\eta(y) = \frac{\Delta\gamma_{\text{mod}}(y)}{\int_0^1 \Delta\gamma_{\text{mod}} dx}. \quad (63)$$

由(59)式还可求出

$$x = \phi\left(\frac{t - \tau_d^{(n)}}{y}\right). \quad (64)$$

此处 ϕ 为 x 和 y 的关系函数.

将(61)和(64)式代入(55)式,并注意积分限的改变

$$x = 0, y = 1 \quad (\text{因为 } y > 1, T_n(y) = 0); \quad (65)$$

$$x = 1, y = \frac{t - \tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}},$$

得到

$$E(z_c^{(n)}, t) = 2(i)^n \frac{T}{2\pi} \frac{\sqrt{2} \pi e n_0 a_\omega z_c^{(n)} F_{L\theta n}}{\gamma_0} \int_{\frac{t - \tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}}}^1 \frac{f_n(y) dy}{\tau_R^{(n)} \eta(y)}, \quad (66)$$

$$f_n(y) = \frac{e^{-i n k \omega z_c^{(n)} \phi\left(\frac{t - \tau_d^{(n)}}{y}\right)} T_n(y)}{y \sqrt{1 - y^2}}. \quad (67)$$

如果定义一个平均超辐射寿命

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{\tau_R}\right)^{(n)}} &= \int_{\frac{t-\tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}}}^1 \frac{f_n(y) dy}{\tau_R^{(n)} \eta(y)} \bigg/ \int_{\frac{t-\tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}}}^1 f_n(y) dy \\ &= \frac{1}{\tau_R^{(n)}} \overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(n)}},\end{aligned}\quad (68)$$

那么(66)式变为

$$E(z_c^{(n)}, t) = 2(i)^n \frac{T}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi} \epsilon n_0 a_\omega z_c^{(n)} F_{L\theta n}}{\gamma_0} \overline{\left(\frac{1}{\tau_R}\right)^{(n)}} \int_{\frac{t-\tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}}}^1 f_n(y) dy. \quad (69)$$

利用测不准关系,由(68)式,可以求得相干谐波的平均绝对线宽为

$$\overline{\Delta\omega_R^{(n)}} = \overline{\left(\frac{1}{\tau_R}\right)^{(n)}} = \Delta\omega_R^{(n)} \overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(n)}}, \quad (70)$$

$$\Delta\omega_R^{(n)} = 1/\tau_R^{(n)}. \quad (71)$$

于是,相干谐波相对线宽之间的关系,利用(62),(50)和(70)式,可给出

$$\frac{\overline{\Delta\omega_R^{(n)}}}{\omega_n} = \frac{R_{11}}{R_{1n}} \frac{\overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(n)}}}{\overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(1)}}}. \quad (72)$$

此处 R_{11} 和 R_{1n} 分别为贝塞尔函数 J_1 和 J_n 的第一个零点位置。

如果在从基模接近饱和到相干谐波达到饱和的整个区间内

$$\Delta\gamma_{\text{mod}} = \text{const}, \quad (73)$$

那么

$$\overline{(1/\eta)^{(n)}} = \overline{(1/\eta)^{(1)}}, \quad (74)$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\overline{\Delta\omega_R^{(n)}}/\omega_n}{\overline{\Delta\omega_R^{(1)}}/\omega_1} = \frac{R_{11}}{R_{1n}} < 1. \quad (75)$$

但实验测量的结果^[1]为

$$\frac{\overline{\Delta\omega_R^{(n)}}/\omega_n}{\overline{\Delta\omega_R^{(1)}}/\omega_1} \geq 1. \quad (76)$$

这表明 $\Delta\gamma_{\text{mod}}$ 在从基模接近饱和到相干谐波达到饱和的区间内是变化的,而且有

$$\overline{(1/\eta)^{(n)}} > \overline{(1/\eta)^{(1)}}. \quad (77)$$

事实上,因为

$$\eta(y) = \frac{\Delta\gamma_{\text{mod}}(y)}{\int_0^1 \Delta\gamma_{\text{mod}} dx}, \quad (78)$$

$$\frac{t-\tau_d^{(1)}}{\tau_R^{(1)}} < \frac{t-\tau_d^{(n)}}{\tau_R^{(n)}} \quad (\text{因为 } z_c^{(n)} < z_c^{(1)}), \quad (79)$$

$$f_n(y) = \frac{e^{-i\pi k \omega_0^{(n)} \phi\left(\frac{t-\tau_d^{(n)}}{y}\right)} T_n(y)}{y\sqrt{1-y^2}}, \quad (80)$$

所以,虽然 $\overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(U)}}$ 和 $\overline{\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(n)}}$ 都是函数 $\frac{1}{\Delta x_{\text{mod}}(y)}$ 被加权平均,但由于它们的平均区间和权重不同,所得结果亦不同. 对于实验^[1]情况,有

$$\frac{R_{11}}{R_{1n}} \frac{\overline{(1/\eta)^{(n)}}}{\overline{(1/\eta)^{(U)}}} \geq 1. \quad (81)$$

由(72)式,如果设计一种激光器,使得

$$\frac{\overline{(1/\eta)^{(n)}}}{\overline{(1/\eta)^{(U)}}} < 1, \quad (82)$$

那么,可以得到较窄线宽的高次相干谐波.

三、结 论

本文中给出在自由电子激光共振腔中由基模群聚产生的相干谐波的功率表达式,不仅解释了相干谐波的时间剖型和线宽,而且指出减小相干谐波线宽的方向.

- [1] Douglas J. Bamford and David A. G. Deacon, *Phys. Rev. Lett.*, 62(1989), 1106.
- [2] 于敏,强激光与粒子束,3(2)(1991),127.
- [3] W. B. Colson, G. Dattoli and F. Ciocci, *Phys. Rev.*, A31(1985), 828.
- [4] 王竹溪、郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社,北京,(1965),470页.
- [5] Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, (1966), p. 773—795.

TEMPORAL PROFILE AND LINEWIDTH OF THE COHERENT HARMONIC EMISSION GENERATED BY THE FUNDAMENTAL MODE BUNCHING

DING WU

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088

(Received 28 March 1991; revised manuscript received 25 October 1991)

ABSTRACT

In this paper, we have obtained the power expression of the coherent harmonic emission generated by the fundamental mode bunching, and explained their temporal profile and linewidth.

PACC: 4255T; 0250; 0260