

引力场中标量粒子波方程的 玻姆量子势描述

王一鹏

华北电力学院基础部, 保定 071003

1992 年 9 月 22 日收到

对于引力场中标量粒子的 Klein-Gordon 方程, 在引入玻姆量子势后, 可写出类似于经典粒子的轨道运动方程, 继而可表示成重新定义的度规空间中的测地线方程.

PACC: 0365;0490

一、引 言

玻姆于 1952 年引入量子势概念, 企图对量子力学作出一种新的解释^[1]. 其目的是想在量子力学中重新导入经典粒子轨道运动这样的概念. 要导入这概念, 通常的做法是将量子力学方程在 WKB 近似中求解^[2], 但这样做仅是给出由量子力学过渡到经典对应的关系. 按玻姆则是要在严格的非近似中, 由量子力学方程导出一种可解释成经典轨道运动的等价方程. 在这些方程中, 除出现通常的经典势外, 还出现仅在量子力学中所特有而被他称为“量子势”的项. 玻姆企图由此达到对量子力学新的决定论式的解释, 而代替原有的量子力学的整个框架.

但玻姆的思想通常只对非相对论量子论为可行. 在相对论量子力学中, 只对无自旋粒子为可行. 对自旋粒子, 如对狄喇克方程, 就出现了困难, 更不用说是在引力场中的情况了. 然而对于狭义相对论中的标量粒子波方程, 即 Klein-Gordon 方程, 玻姆的思想是可以实现的, 对此 Holland^[3]已作了详细的推导和分析. 我们发现, 将他的结果推广到广义相对论引力场的情况, 是很直接的. 这时导入的粒子轨道运动明显不符等效原理. 仿他的做法, 在同时导入到与该粒子状态相关的度规空间中后, 才使得轨道运动成为该空间中的测地线, 但这时已无等效原理成立的实际物理意义, 只是一种数学描述方式而已.

二、引力场中 Klein-Gordon 方程的量子势描述

描述标量粒子的相对论性波方程, 即 Klein-Gordon 方程

$$(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu)(i\hbar\partial^\mu + \frac{e}{c}A^\mu)\psi = m_0^2c^2\psi. \quad (1)$$

在闵可夫斯基空间中, 采用度规为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. 此方程在广义相对论引力场 ($g_{\mu\nu}$) 中, 可写为如下形式^[4]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) - \frac{2i}{\hbar} \frac{e}{c} A^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\hbar^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{e^2}{c^2} A_\mu A^\mu \right) \psi = 0, \quad (2)$$

其中 $A_\mu A^\mu = V - (\mathbf{A})^2$, A_μ 为电磁四矢. 算符 $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)$ 即广义达朗贝算符 $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ 在广义相对论中的推广, 本文中仍把它记作 \square .

现将 $\psi(x)$ 按一般方法写成如下指数形式:

$$\psi(x) = R(x) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x) \right], \quad (3)$$

其中 $R(x)$ 和 $S(x)$ 均为实函数. 将(3)式代入方程(2), 则方程(2)可分解成为对 R 和 S 的如下方程组:

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) = M_0^2 c^2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \right] = 0, \quad (5)$$

其中

$$M_0^2 = m_0^2 \left(1 + \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \frac{\square R}{R} \right) \equiv m_0^2 (1 + Q), \quad (6)$$

量 $Q = \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \frac{\square R}{R}$ 即玻姆所导入的所谓量子势^[1]. 为导入粒子轨道运动的概念, 定义如下正则动量 1-形:

$$P = P_\mu dx^\mu, \quad P_\mu \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad (7)$$

同时导入速度场 u^μ

$$\begin{aligned} M_0 c u^\mu &= g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \\ &= g^{\mu\nu} (P_\nu - \frac{e}{c} A_\nu). \end{aligned} \quad (8)$$

从(4)式可见 u^μ 是么模的

$$u_\mu u^\mu = 1, \quad (9)$$

于是粒子运动的轨道方程可由下式定义:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (10)$$

其中 τ 为原时. 现对(8)式两边沿轨线再次对 τ 求共变导数, 得

$$C \frac{DM_0}{D\tau} u^\mu + CM_0 \frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{Dg^{\mu\nu}}{D\tau} \left(P_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) + g^{\mu\nu} \left(\frac{DP_\nu}{D\tau} - \frac{e}{c} \frac{DA_\nu}{D\tau} \right). \quad (11)$$

应用(6), (7)和(9)式, 及考虑到 A_ν 为电磁四矢, 从(11)式可推演得如下粒子的轨道运动方程:

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{1}{2} (c^2 g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\mu \ln(1 + Q) + \frac{e}{M_0 c} g^{\mu\nu} F^{\mu\lambda} u^\lambda, \quad (12)$$

其中 $F^{\mu\nu}$ 为电磁场张量, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. 如按 $d\tau = \frac{ds}{c}$, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, 用 ds -沿轨道的弧微分来写出方程, 则(12)式成为

$$\frac{D}{Ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \partial_\nu \ln(1+Q) + \frac{e}{M_0 c^2} g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds}. \quad (13)$$

这一方程即为 Holland 在狭义相对论情况所得方程的直接推广. 显然, 如不存在量子势 ($Q=0$), 则以上方程归结为荷电 e 的粒子在引力场与电磁场中的运动方程. 但如不存在电磁场 ($A_\mu=0$), 则由于量子势 Q 的存在, 粒子的运动似受到一自身引起的“量子力”(与 $\partial_\nu Q$ 成比例的项)的作用, 其运动并不归结为测地线方程:

$$\frac{D}{Ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) = 0. \quad (14)$$

这表明对一般量子粒子, 并不成立等效原理, 即在引力场中量子粒子的轨道与其质量有关(因 ψ , 从而 Q 与质量有关).

现仍按 Holland 对狭义相对论情况的做法, 推广到这里广义相对论引力场中的情况. 我们只讨论 $A_\mu=0$ 时情况. 如重新定义度规

$$ds'^2 = (1+Q)ds^2 = (1+Q)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (15)$$

$$ds' = (1+Q)^{\frac{1}{2}} ds$$

在这新定义的度规空间中, 克里斯朵夫符号 $\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}$ 与原来的克氏符号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 间有如下关系:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} [\delta^\lambda_\mu \partial_\nu \ln(1+Q) + \delta^\lambda_\nu \partial_\mu \ln(1+Q) - g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \partial_\rho \ln(1+Q)], \quad (16)$$

于是粒子轨道运动方程(13)(其中令 $F_{\mu\nu}=0$)在这新定义的度规空间中, 仍可取测地线方程(14)的形式

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds'^2} + \Gamma'^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds'} \frac{dx^\beta}{ds'} = 0. \quad (17)$$

显然, 这种空间的导入只是形式的, 无非表示在这一标量粒子波场自身结构的几何描述中, 量子粒子的“轨道运动”仍可以测地线的形式来表示.

三、结束语

以上我们作出了对引力场中的标量粒子波方程导入量子势后的轨道运动描述, 并表明引力场中自由粒子的轨道运动方程不符合测地线方程. 在量子力学中已证明作为奠定广义相对论基础的等效原理在量子力学中不成立^[5], 这里可说是对此的又一证明. 一般认为, 等效原理的问题, 是量子论与广义相对论相结合的困难所在.

玻姆当初导入量子势概念是企图给量子力学以一种决定论式的新解释. 但实际上, 这是与所谓量子力学的流体动力学解释、德布罗衣的双重解解释等等一样, 都是不能全面概括和代替量子力学的整个内容, 而只是给量子力学方程的解的数学结构给出不同侧面的描述. 我们看到, 这样做也是有助于从不同方面阐明所讨论问题的性质.

[1] D. Bohm and B. J. Hiley, *Phys. Rep.*, **144**(1987), 323.

- [2] K. Rafalli and R. Schiller, *Phys. Rev.*, **135**(1964), 279; J. Andertsch, *Phys. Rev.*, **D24**(1981),1470.
[3] P. R. Holland, *Found. Phys.*, **17**(1987),345.
[4] L. 德布罗意著,非线性波动力学,上海科学技术出版社,(1966),第 105 页.
[5] D. M. Greenberger, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983),875.

A BOHM QUANTUM-POTENTIAL DESCRIPTION FOR THE WAVE EQUATION OF SCALAR PARTICLE IN GRAVITATIONAL FIELD

WANG YI-PENG

Department of Fundamental Science, North China Institute of Electric Power, Baoding 071003

(Received 22 September 1992)

ABSTRACT

Introducing Bohm quantum-potential, from Klein-Gordon equation for scalar particle in gravitational field, an equation of trajectory-motion equation can be derived, it is similar to the classical one and it can be reduced to a geodesic equation in a redefined metric space.

PACC: 0365;0490