

序参量守恒系统中空间相关的界面生长

韩 飞 马本堃

北京师范大学物理系, 北京 100875

1992年11月20日收到

用重整化群方法分析了序参量守恒系统在空间关联下的界面生长行为. 得到了标度指数 χ 和 z 作为空间维数 d 和相关指数 ρ 的函数. 结果表明, 序参量守恒条件使生长弛豫时间增长, 空间相关使生长表面粗化. 并与 E. Medina 等人 and T. Sun 等人的结果作了比较.

PACC: 6830

一、引 言

表面和界面的生长动力学一直是一个对理论和实践都富有挑战性的问题^[1-13], 许多生长现象都与它密切相关. 如分子束外延和化学沉积的层状生长^[3], 有序相的亚稳分解过程^[4], 扩散控制聚集(DLA)和 Eden 模型中的聚集生长表面^[5]等等. 这些现象的共同之处是都具有一个活跃的表面和界面. 人们通过大量的研究发现, 生长表面和界面在时间和空间上满足标度关系. 即有 $W(L, t) \equiv [\langle h^2(L, t) \rangle]^{1/2} \approx L^\chi f(t/L^z)$, 式中 W 是平均界面宽度, h 是界面高度, L 是特征长度, χ 是粗糙指数, z 是动力学指数. f 是标度函数, 最早是由 Family 和 Vicsek 引入的^[10], 它具有如下性质: $y \ll 1$ 时, $f(y) \approx y^\beta$, $\beta = \frac{\chi}{z}$; $y \gg 1$ 时, $f(y) \rightarrow \text{常数}$. 指数 χ, z 和标度函数 f 便描述了界面的特征. 对界面生长的研究大量的数值模拟工作^[10-12, 14, 15], 结果证实了这种标度关系. 近来, 在临界现象的研究中获得了很大成功的重整化群方法, 被发展运用到了界面生长动力学的研究中, 取得了许多进展^[8, 16-20], 在描述界面生长动力学当中比较成功的是 Kardar, Parisi 和 Zhang (KPZ) 发展的 Burgers 方程, 这是一个含时间的非线性偏微分方程(下面称作 KPZ 方程), 其形式为^[8, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t), \\ \langle \eta(x, t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle &= 2D \delta(x - x') \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (1)$$

KPZ 对此方程作了详细的研究. Sun, Guo 和 Grant(缩写为 SGG)分析了在序参量守恒系统中类似的方程^[19], Medina, Hwa, Kardar 和 Zhang(缩写为 MHKZ)研究了该方程在相关噪声下的行为^[20], 这些都将在本文中与我们的结果作一一比较.

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助的项目.

二、空间关联下的重整化分析

从临界现象的研究中知道,非平衡系统的标度和普适性不仅决定于序参量的对称性和空间维数,而且还取决于守恒律、模间耦合和泊松括号关系^[16].本文利用重整化群方法研究序参量守恒系统下具有空间关联的表面生长过程,序参量守恒系统中的表面和界面生长用如下方程描述^[19]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla^2[\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2] + \eta(x, t). \quad (2)$$

通过傅里叶变换,方程化为

$$H(\mathbf{k}, \omega) = h_0(\mathbf{k}, \omega) - \frac{\lambda}{2} G_0(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k}^2 \times \int_{q, \Omega} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q}) h(\mathbf{q}, \Omega) h(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \Omega), \quad (3)$$

式中

$$h_0(\mathbf{k}, \omega) = G_0(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}, \omega), G_0(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \nu \mathbf{k}^4)^{-1},$$

$$\int_{q, \Omega} = \int d^d \mathbf{q} d\Omega (2\pi)^{-(d+1)} \quad (d \text{ 是空间维数}).$$

空间关联噪声的形式为

$$\begin{aligned} \langle \eta(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= \nabla^2 2\mathcal{D}(\mathbf{k}) \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \\ &= 2\mathcal{D}(\mathbf{k}) \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'). \end{aligned} \quad (4)$$

方程(3),(4)便成为我们对非线性项进行重整化的出发点. h 关于 λ 的微扰圈图展开如图1所示.其中($\rightarrow$)表示传播子 G_0 ,($\times$)表示噪声 $\eta(\mathbf{k}, \omega)$,有效响应函数 $G(\mathbf{k}, \omega)$ (定义为 $h(\mathbf{k}, \omega) = G(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}, \omega)$)的单圈图展开见图2(a),最低阶修正为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \omega) &= G_0(\mathbf{k}, \omega) + 4\left(\frac{-\lambda}{2}\right)^2 G_0^2(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k}^4 \int_{q, \Omega} [\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q}) (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{k} \\ &\quad \times G_0(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \Omega) G_0(\mathbf{q}, \Omega) G_0(-\mathbf{q}, -\Omega) 2\mathcal{D}(\mathbf{q}, \Omega)] + O(\lambda^4). \end{aligned} \quad (5)$$

有效谱函数 $\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{k}, \omega)$ 定义为

$$\langle h^*(\mathbf{k}, \omega) h(\mathbf{k}, \omega) \rangle = 2G(\mathbf{k}, \omega) G(-\mathbf{k}, -\omega) \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{k}, \omega).$$

单圈图展开见图2(b),一阶修正为

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{k}, \omega) &= 2\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) \\ &\quad + 2\left(\frac{-\lambda}{2}\right)^2 \int_{q, \Omega} [\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 [G_0(\mathbf{q}, \Omega) G_0(-\mathbf{q}, -\Omega) \\ &\quad \times G_0(-\mathbf{k} + \mathbf{q}, -\omega + \Omega) G_0(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \Omega) 2\mathcal{D}(\mathbf{q}, \Omega) 2\mathcal{D}(-\mathbf{q}, -\Omega)] \\ &\quad + O(\lambda^4). \end{aligned} \quad (6)$$

有效顶角函数的圈图修正见图2(c),顶角函数定义为

$$\Gamma_0(\mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b) = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{k}_b G_0(\mathbf{k}_a) G_0(\mathbf{k}_b).$$

单圈图修正为

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c,$$

$$\Gamma_a = \Gamma_0 \{ 1 + 4 \left(\frac{-\lambda}{2} \right)^2 k^2 \int_{q,0} \left(\frac{k_1}{2} + k_2 - q \right) \cdot q \left(\frac{k_1}{2} - k_2 + q \right) \cdot (-q) \\ \times G_0 \left(\frac{k_1}{2} + k_2 \right) G_0 \left(\frac{k_1}{2} - k_2 \right) G_0(q) G_0(-q) 2\mathbb{D}(q) \} + O(\lambda^4). \quad (7)$$

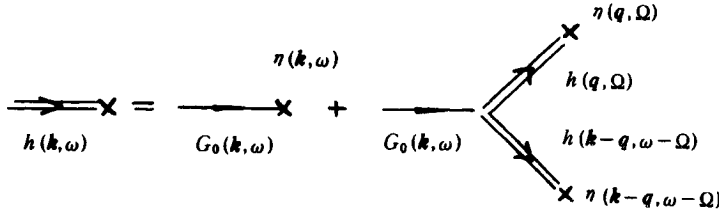


图1 非线性积分方程(3)的圈图表示,是其它微扰圈图的起点

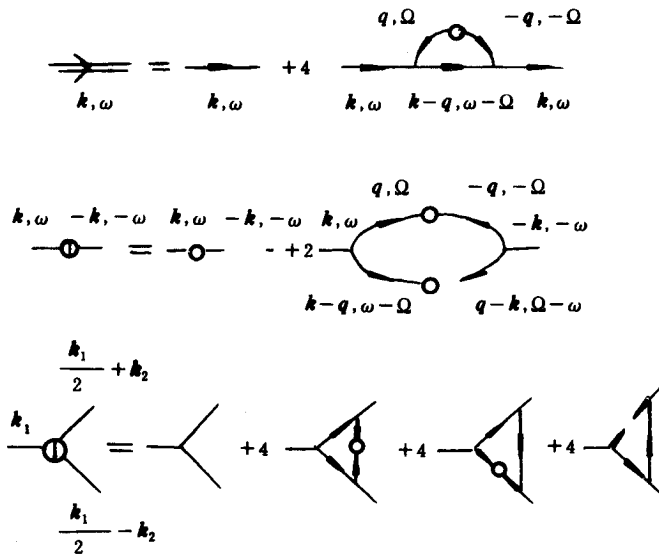


图2 噪声平均后的微扰圈图描述 (a)有效传播子或响应函数;

(b)有效噪声谱密度函数;(c)有效顶角函数或耦合常数

分,积去快模并取 $\omega \rightarrow 0$ 极限,得到

$$G^<(\mathbf{k}, 0) = G_0(\mathbf{k}, 0) \left[1 + \delta l \cdot K_d \frac{\lambda^2 \bar{\mathcal{D}}_1(1)}{\nu^3} \frac{d-4+f_1(1)}{4d} \right], \quad (8)$$

$$2\mathcal{D}^<(\mathbf{k}, 0) = 2\mathcal{D}(\mathbf{k}, 0) + 2\delta l \cdot K_d \frac{\lambda^2}{4\nu^3} \bar{\mathcal{D}}_2^2(1), \quad (9)$$

$$\Gamma^<(\mathbf{k}, 0) = \Gamma_0(\mathbf{k}, 0) \left[1 - \delta l \cdot K_d \frac{\lambda^2 \bar{\mathcal{D}}_3(1)}{\nu_3} \frac{k^2}{2d} \right], \quad (10)$$

式中 $\bar{\mathcal{D}}_1(1), \bar{\mathcal{D}}_2(1), \bar{\mathcal{D}}_3(1)$ 均为积分函数,

$$\bar{\mathcal{D}}_1(q) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\mathcal{D}(q, \nu q^2 z)}{(1+z^2)^2}, f_1(q) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \frac{\partial \ln \mathcal{D}(\mathbf{k}, 0)}{\partial \ln k} \Big|_{\mathbf{k}=q}$$

图2中的微扰序列在 $q \rightarrow 0$ 极限时发散. 重整化过程等于对微扰序列重新取和以避免这种奇异性. 其主要过程有这样三步: 1. 积分仅在 $\Lambda e^{-l} \leq k < \Lambda$ (Λ 是动量截断因子, 下面取 $\Lambda=1$) 的动量区间中进行, 积分在这个范围内没有奇异点, 只有

(a) 通过所谓的“去快模”产生的对 $\nu, \mathcal{D}, \lambda$ 的解析修正.

2. 在完成上述1之后, 通过重新标度 $k \rightarrow k e^{-l}$ 恢复原方程形式, 参量 $\nu, \mathcal{D}, \lambda$ 则

(b) 加上了从1中得来的积分修正项. 3. 在固定点, 使方程标度不变, 便可得到指数 χ 和 z 的值. 根据这样的步骤分析方程(5)–(7). 先将布里渊区分成两个部分, 大动量部分 $k^> \in [\Lambda e^{-l}, \Lambda]$, 将被积分掉, 保留长波长部分 $k^< \in [0, \Lambda e^{-l}]$, 通过复杂繁琐的积

$$\mathcal{D}_2^2(1) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\mathcal{D}^2(1, \nu z)}{(1+z^2)^2},$$

$$\mathcal{D}_3(1) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \mathcal{D}(1, \nu z) \frac{1-3z^2}{(1+z^2)^3},$$

$z = \Omega/\nu q^4, K_d = S_d/(2\pi)^d, S_d$ 是 d 维球的表面积. (计算过程可见文献[20]).

进行重新标度: $\mathbf{k} \rightarrow e^{-l}\mathbf{k}, h \rightarrow e^{xl}h, t \rightarrow e^{xt}t$, 得出关于参量 $\nu, \mathcal{D}, \lambda$ 的重整化迭代关系

$$\frac{d\nu}{dl} = \nu[z - 4 - K_d \frac{\lambda^2 \mathcal{D}_1(1)}{\nu^3} \frac{d-4+f_1(1)}{4d}], \quad (11)$$

$$\frac{d\mathcal{D}(\mathbf{k})}{dl} = \mathcal{D}(\mathbf{k})[z - 2x - d - f(\mathbf{k})] + K_d \frac{\lambda^2}{4\nu^3} \mathcal{D}_2^2(1), \quad (12)$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = \lambda[\chi + z - 4 - \frac{\lambda^2 \mathcal{D}_3(1)}{\nu^3} \frac{k^2}{2d}]. \quad (13)$$

选择 χ, z 使参数 ν, λ 保持不变, 即取 $d\lambda/dl=0, d\nu/dl=0$ 得到

$$z = 4 + K_d \frac{\lambda^2 \mathcal{D}_1(1)}{\nu^3} [\frac{d-4+f_1(1)}{4d}], \quad (14)$$

$$\chi = -K_d \frac{\lambda^2 \mathcal{D}_1(1)}{\nu^3} [\frac{d-4+f_1(1)}{4d}]. \quad (15)$$

代入(12)式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{D}(\mathbf{k})}{dl} &= [4 - d - f(\mathbf{k})] \mathcal{D}(\mathbf{k}) + 3K_d [\frac{d-4+f_1(k)}{4d}] \frac{\lambda^2 \mathcal{D}(\mathbf{k}) \mathcal{D}(1)}{\nu^3} \\ &\quad + \frac{K_d}{4} \frac{\lambda^2 \mathcal{D}_2^2(1)}{\nu^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

由此式可以看出, 重整化会使谱函数增加附加的白噪声贡献. 至此我们分析的一直是普遍的噪声谱 $\mathcal{D}(k)$. 下面取噪声谱具有这样的形式 $\mathcal{D}(k) = D_0 + D_\rho K^{-2\rho+2}$, 采用无维数参量

$$U_0 = K_d \frac{\lambda^2 D_0}{\nu^3}, u_\rho = K_d \frac{\lambda^2 D_\rho}{\nu^3}, \text{取 } k \rightarrow 0 \text{ 极限, 有}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dl} &= u_0(4-d) + u_0^2 [\frac{3(d-4)}{4d} + \frac{1}{4}] + \frac{u_\rho^2}{4} + u_0 u_\rho [\frac{3(d-4)}{4d} + \frac{3(-2\rho+2)}{4d} \\ &\quad + \frac{2}{4}], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{du_\rho}{dl} = u_\rho(4-d-2\rho+2) + u_\rho^2 [\frac{3(d-4)-3(2\rho-2)}{4d}] + u_0 u_\rho [\frac{3(d-4)}{4d}]. \quad (18)$$

从(17), (18)式可以得出固定点的 (u_0, u_ρ) , 代入(14), (15)式中可以得到固定点和在 (u_0, u_ρ) 空间中的流(体为空间维数 d 和相关指数 ρ 的函数)

$$\chi = \frac{1}{3}(2-d+2\rho), z = \frac{1}{3}(10+d-2\rho).$$

从这个结果可以直观地看出, 空间相关使表面粗糙化(使 χ 增大)而高维数使表面趋于平滑.

三、结果与讨论

将所得结果与 MHKZ 和 SGG 的分析结果作比较. MHKZ 研究的是序参量不守恒系

统中空间相关的界面生长,描述界面生长的方程如(1)式,他们取谱函数 $D(k) = D_0 + D_\rho k^{-2\rho}$ 后,得到结果: $\chi = \frac{1}{3}(2-d+2\rho)$, $z = \frac{1}{3}(4+d-2\rho)$,我们对比这两个结果发现,序参量守恒条件使得 z 增大,这意味着弛豫时间变长,达到平衡的过程减慢,能量和序参量涨落的传播相对变缓,这与以往的经验是一致的,而二者的粗糙指数 χ 相同,则预示着二者过程虽有差别,但最终表面粗糙程度还是一致的.

另外,由于守恒条件的限制,序参量守恒系统不再满足伽利略变换不变性^[20],而满足在另一变换

$$\begin{aligned} h &\rightarrow h + a \cdot X \\ X &\rightarrow X - \lambda a \nabla^2 \end{aligned}$$

下不变^[19],故标度等式满足 $\chi+z=4$.

SGG 等人分析了在白噪声作用下的序参量守恒系统中的界面生长.他们用重整化群方法得到: $\chi = \frac{1}{3}(2-d)$, $z = \frac{1}{3}(10+d)$,同时他们使用类似 Kim 和 Kosterlitz 的模型^[9]在一维情况下作了数值模拟,得到

$$\beta = \chi/z = 0.091 \pm 0.002, \chi = 0.35 \pm 0.03.$$

我们研究的系统在此基础上加入了空间相关作用,从结果中可以看到空间相关的作用是使表面粗化,表面粒子的生长不再单纯是随机的,而是与集团粒子有相互作用,这种作用影响表面的形状,使表面粗糙.目前作用机理有几种猜测^[20]:一是不可移动的杂质一旦被捕获为生长体的一部分,便阻碍进一步的生长过程;二是荷电杂质与生长体带电粒子间的相互作用会影响进一步的生长过程.

在界面生长问题当中,时间关联也将影响表面的形态,对序参量守恒系统中时间关联界面生长的研究我们将在另文给出.

- [1] D. Jasnow, Phase Transitions and Critical Phenomena, (Academic, London, 1986), Vol. 10.
- [2] J. S. Langer, *Rev. Mod. Phys.*, **52**(1980), 1.
- [3] L. L. Chang and K. Ploog, Molecular Beam Epitaxy and Heterostructures (Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1985).
- [4] D. Gunton, M. San Miguel and P. S. Sahni, Phase Transitions and Critical Phenomena (Academic, London, 1983), Vol. 8.
- [5] P. Pelcé, Dynamics of Curved Fronts (Academic, Boston, 1988).
- [6] H. E. Stanley and N. Ostrowsky, On Growth and Form (Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1985); F. Family and D. P. Landau, Kinetics of Aggregation and Gelation (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [7] F. Family and T. Vicsek, Dynamics of Fractal Surfaces (World Scientific, Singapore, 1991).
- [8] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 889.
- [9] J. M. Kim and J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 2289.
- [10] F. Family and T. Vicsek, *J. Phys. A*, **18**(1985), L75; P. Meakin and R. Jullien, *J. Phys(Paris)*, **48**(1987), 1651; D. Liu and M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B38**(1988), 4781.
- [11] M. Plischke and Z. Racz, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 3825.
- [12] P. Meakin, P. Ramanlal, L. M. Sander, and R. C. Ball, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 5091; M. Plischke, Z. Racz, and D. Liu, *Phys. Rev.*, **B35**(1987), 3485.
- [13] M. Kardar and Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2087; D. E. Wolf and J. Kertesz, *J. Phys. A* **20**(1987), L257.

- [14] R. Jullien and R. Botet, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 2055; *J. Phys. A*, **18**(1985), 2279.
- [15] J. G. Zabolitzky and D. Stauffer, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 1523; *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1809.
- [16] S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin, Reading, 1976).
- [17] P. C. Hohenberg and B. L. Halperin, *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977), 435, and references therein.
- [18] D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, *Phys. Rev.*, **A16**(1977), 732.
- [19] T. Sun, H. Guo, and M. Grant, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 6763.
- [20] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar and Y. C. Zhang, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 3053.

GROWTH OF INTERFACE WITH A LAW AND SPATIAL CORRELATIONS IN A CONSERVATIONAL SYSTEM

HAN FEI MA BEN-KUN

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 20 November 1992)

ABSTRACT

The growth behaviour of interfaces in order parameters-conservation system with spatial correlation are analysed by using renormalization-group method. The scaling exponent χ and dynamic exponent z are obtained as functions of spatial dimension d and roughening exponent ρ . The result shows that the conservation condition makes the fluctuation Propagation decay, and spatial correlations make the interface roughen. The results are also compared with that of E. Medina *et al.*^[20] and T. Sun *et al.*^[19].

PACC: 6830