

三维各向同性振子的 q 形变及其波函数

潘 峰^① 许佩军

辽宁师范大学物理系, 大连 116022

1992 年 8 月 12 日收到

详细分析了三维各向同性振子的三种典型的 q 形变形式. 这三种 q 形变哈密顿量分别具有 S_3 , $SU_q(2)$, 及 $U_q(3)$ 对称性. 特别地, 在第三种情形下给出 $U_q(3) \supset SO_q(3)$ 的具体实现. 利用形变泛函映射, 讨论了 q 形变振子与经典振子间的关系.

PACC: 0365; 0220; 0210

一、引 言

近年来, 量子群^[1-3]及其表示论在物理学中的进一步应用越来越受到广泛的关注. 最近的进展表明, 某些分子的振动谱可以用一维 q 形变振子模型来描述^[4]; 某些分子的转动谱及原子核的转动谱能较准确地用 $SU_q(2)$ 模型来描述^[5,6]. 在原子核的 $SU_q(2)$ 模型中, 其形变参数 $\tau^2 (q = e^{i\tau})$ 对应于可变转动惯量模型中的软度系数^[6]. 为了将量子群理论进一步应用于量子多体问题, 除了一些已知的量子群链外, 还需要构造其它的一些代数链. 当 $q = 1$ 时, 这些代数链对应于一些已知的经典群链. 例如, $SU_q(3)$ 的 $SO_q(3)$ 子代数的构造就是一个在应用中急待解决的问题^[7].

作为量子群在量子体系中的进一步应用, 本文将详细分析三维各向同性振子的 q 形变. 特别地, 利用形变泛函映射构造了 $SU_q(3)$ 的 $SO_{q'}(3)$ 子代数, 其中 q 和 q' 是两个相互独立的形变参数, 并且利用这一方法还讨论了 q 形变振子与经典振子间的关系.

二、量子群 $U_q(3)$ 及其子代数

由于三维各向同性振子的 q 形变与量子群 $U_q(3)$ 的对称表示有很大的联系, 本节将讨论 $U_q(3)$ 的一些代数链.

量子群 $U_q(3)$ 的生成元可抽象地记为 $E_{ij}^q (1 \leq i, j \leq 3)$, 其对易关系为^[8]

$$\begin{aligned} [E_{ij}^q, E_{ii}^q] &= -E_{ij}^q, & [E_{ij}^q, E_{jj}^q] &= E_{ij}^q, \\ [E_{ij}^q, E_{ji}^q] &= [E_{ii}^q - E_{jj}^q]^q, & \text{当 } i \neq j \text{ 时,} \end{aligned} \quad (1)$$

及

^① ICTP, P. O. Box 586, 34100 Trieste, Italy.

$$E_{12}^q E_{23}^q - q^{-1} E_{23}^q E_{12}^q = E_{13}^q q^{E_{22}^q},$$

$$\dots$$
(2)

等等. 可以证明此时的升(降)算符 $E_{12}^q, E_{23}^q (E_{21}^q, E_{32}^q)$ 满足 Serre 关系, 其中对任意的 x ,

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (3)$$

$U_q(3)$ 的正则子代数是 $SU_q(2) \times U_1$, 其生成元为 $E_{ij}^q (1 \leq i, j \leq 2)$ 和 E_{33}^q . 为了讨论 $U_q(3)$ 的非正则子代数, 先介绍一下 $U_q(n)$ 和 $SU_q(2)$ 的形变泛函实现. 在以下的讨论中, 假定 q 不是单位根的情况.

经典李代数 $U(n)$ 的生成元可抽象地表为 $E_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 并满足对易关系:

$$[E_{ij}, E_{lk}] = \delta_{jl} E_{ik} - \delta_{ik} E_{lj} \quad (4)$$

利用对易关系(4)式可以证明如下形变泛函算符:

$$E_{ii}^q = F_{ii}(E_{ii}) = E_{ii},$$

$$E_{ij}^q = F_{ij}(E_{ik}) = \left\{ \frac{[E_{ii}^q]}{E_{ii}} \right\}^{\frac{1}{2}} E_{ij} \left\{ \frac{[E_{jj}^q]}{E_{jj}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad i \neq j \quad (5)$$

满足 $U_1(n)$ 的对易关系. 映射 F_{ij} 是 $U(n)$ 生成元 E_{ik} 的泛函, 并且存在逆映射 F^{-1} , 它给出了 $U(n)$ 生成元用 $U_q(n)$ 生成元的形变泛函实现. 计算表明, (5)式给出的形变泛函实现仅对 $U_q(n)$ 的对称表示成立. 而一般表示下的 $U_q(n)$ 生成元可以用量子群的余积关系得到

$$\Delta E_{ii}^q = 1 \otimes E_{ii}^q + E_{ii}^q \otimes 1,$$

$$\Delta E_{ij}^q = q^{\frac{1}{2}(E_{ii}^q - E_{jj}^q)} \otimes E_{ij}^q + E_{ij}^q \otimes q^{-\frac{1}{2}(E_{ii}^q - E_{jj}^q)}, \quad (6)$$

$i \neq j$ 形变泛函实现的 $U_q(n)$ 除了以上给出的余积外, 还存在如下 $U(n)$ 的直积诱导出的余积关系. 其中 $U(n)$ 的直积满足

$$\Delta E_{ij} = 1 \otimes E_{ij} + E_{ij} \otimes 1, \quad (7)$$

(7)式诱导出的 $U_q(n)$ 的算子 $F_{ij}(\Delta E_{ik}) = E_{ij}^q$ 显然满足量子群 $U_q(n)$ 的对易关系, 从而诱导出了与(6)式不同的余表示的定义^[9]. 由于 $F_{ij}(E_{ik})$ 仅适用于对称表示, 所以余表示 ΔE_{ik} 也必须是对称的, 此时(6)与(7)式诱导出的余表示 $F_{ij}(\Delta E_{ik})$ 等价. 如果 ΔE_{ik} 给出的表示是对称的, 则 $F_{ij}(\Delta E_{ik})$ 不再是量子群的(余)表示. 所以(7)式诱导出的余表示很有局限性, 而(6)式则是更为一般的定义.

为了保证算符 $E_{ij}^q (i \neq j)$ 的厄密性, 要求形变参数 q 为实数或复因子 $q = e^{i\tau}$, 并满足

$$|\tau|N < \pi, \quad (8)$$

其中 N 是 $\sum_{i=1}^n E_{ii}$ 的本征值.

另一方面, 文献[9]给出 $SU_q(2) \hookrightarrow SO_q(3)$ 的另一种形变泛函实现: 首先将 $SU(2)$ 的 Casimir 算符写为 $\hat{j}(\hat{j} + 1)$, 其中 $\hat{j}$ 是算符.

$$\hat{j} = \{(1 + 4\hat{C}_2)^{\frac{1}{2}} - 1\}/2 \quad (9)$$

$\hat{C}_2$ 是 $SU(2)$ 的 Casimir 算符, 它可用 $SU(2)$ 的生成元 $j_{\pm}, j_0$ 表为

$$\hat{C}_2 = 2j_- j_+ + j_0(j_0 + 1), \quad (10)$$

利用对易关系

$$[j_0, j_{\pm}] = \pm j_{\pm}, \quad [j_+, j_-] = j_0 \quad (11)$$

可以证明如下形变泛函:

$$\begin{aligned} J_0^q &= Q_0(j_0) = j_0, \\ J_+^q &= Q_+(j_0, j_+) = ([j_0 + \hat{j}]_q [j_0 - \hat{j} - 1]_q / (j_0 + \hat{j})(j_0 - \hat{j} - 1))^{\frac{1}{2}} j_+, \\ J_-^q &= Q_-(j_0, j_+) = j_- ([j_0 + \hat{j}]_q [j_0 - \hat{j} - 1]_q / (j_0 + \hat{j})(j_0 - \hat{j} - 1))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

满足 $SU_q(2)$ 的对易关系

$$[J_0^q, J_{\pm}^q] = \pm J_{\pm}^q, \quad [J_+^q, J_-^q] = \frac{1}{2} [2J_0^q] \quad (13)$$

如果要使算符 $J_{\pm}^q$ 为厄密算符, q 必须为实数或复数因子 $q = e^{i\tau}$, 并满足 $(2j+1)|\tau| < \pi$, 其中 j 是 $\hat{j}$ 的本征值. 否则 $SU_q(2)$ 的表示是非幺正的.

利用以上的形变泛函实现, 容易得到 $U_q(3)$ 的 $SO(3)$ 子代数如下. 设 $E_{ij}^q \{1 \leq i, j \leq 3\}$ 是 $U_q(3)$ 的生成元, 则 $SO(3)$ 的生成元可表为

$$\begin{aligned} L_0 &= E_{11}^q - E_{22}^q, \\ L_+ &= (E_{11}^q / [E_{11}^q]_q)^{\frac{1}{2}} E_{13}^q (E_{33}^q / [E_{33}^q]_q)^{\frac{1}{2}} + (E_{33}^q / [E_{33}^q]_q)^{\frac{1}{2}} E_{32}^q (E_{22}^q / [E_{22}^q]_q)^{\frac{1}{2}}, \\ L_- &= (E_{33}^q / [E_{33}^q]_q)^{\frac{1}{2}} E_{31}^q (E_{11}^q / [E_{11}^q]_q)^{\frac{1}{2}} + (E_{22}^q / [E_{22}^q]_q)^{\frac{1}{2}} E_{23}^q (E_{33}^q / [E_{33}^q]_q)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

并满足对易关系:

$$[L_0, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = L_0 \quad (15)$$

在(14)式中要保证 L_+, L_- 的厄密性, 要求 q 为实数或复数因子 $q = e^{i\tau}$, 并满足 $|\tau|N < \pi$, 其中 N 是 $\sum_{i=1}^3 E_{ii}^q$ 的本征值. 此时量子群的对称余表示(6)式诱导出 $SO(3)$ 的直积表示. 显然此时 $L_0(\Delta E_{ij}^q), L_{\pm}(\Delta E_{ij}^q)$ 仍然满足对易关系(15)式.

进一步利用 $SU_q(2) \sim SO_q(3)$ 的形变泛函实现, 最后得 $SO_q(3)$ 子代数的生成元如下:

$$\begin{aligned} L_0' &= L_0, \\ L_+^q &= ([L_0 + \hat{l}]_{q'} [L_0 - 1 - \hat{l}]_{q'} / (L_0 + \hat{l})(L_0 - 1 - \hat{l}))^{\frac{1}{2}} L_+, \\ L_-^q &= L_- ([L_0 + \hat{l}]_{q'} [L_0 - 1 - \hat{l}]_{q'} / (L_0 + \hat{l})(L_0 - 1 - \hat{l}))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\hat{l}$ 是算符,

$$\hat{l} = ((1 + 4\hat{C}_2)^{\frac{1}{2}} - 1)/2, \quad (17a)$$

$$\hat{C}_2 = 2L_- L_+ + L_0(L_0 + 1), \quad (17b)$$

并满足对易关系

$$[L_0', L_{\pm}'] = \pm L_{\pm}', \quad [L_+^q, L_-^q] = \frac{1}{2} [2L_0'], \quad (18)$$

其中算符 $L_0, L_{\pm}$ 由(14)式给出. 此时 $U_q(3)$ 的对称余表示 ΔE_{ij}^q 诱导出 $SO_q(3)$ 的余表示. 显然 $L_0'(\Delta E_{ij}^q), L_{\pm}'(\Delta E_{ij}^q)$ 仍然满足对易关系(18)式. 在(16)式中要保证算符 L_+^q, L_-^q 的厄密性, 要求 q 满足(15)式以下给出的条件, 并且要求 q' 为实数或复数因子 $q' = e^{i\tau'}$.

并满足 $|\tau'| (2N+1) < \pi$, 其中 N 是 $\sum_{i=1}^3 E_i^q$ 的本征值. 从而实现了代数链 $U_q(3) \supset SO_q(3) \supset SO(2)$, 其中 q 和 q' 是两个相互独立的形变参数. 对于 $U_q(3)$ 的对称表示, 当 q 和 q' 都不是单位根时, $U_q(3) \supset SO_q(3)$ 的约化规则与 $U(3) \supset SO(3)$ 的约化规则相同.

三、三维各向同性振子的 q 形变

三维各向同性振子的 q 形变不是唯一的. 下面介绍几种典型的 q 形变形式.

1. 利用 q 玻色子算符^[10] $\{a_{iq}^+, a_{iq}, N_i, i = 1, 2, 3\}$, 可将形变振子的哈密顿量写为

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega}{2} \sum_i (a_{iq}^+ a_{iq} + a_{iq} a_{iq}^+) = \frac{\hbar\omega}{2} \sum_i \{[N_i + 1]_q + [N_i]_q\}. \quad (19)$$

(19)式可看成是三个一维形变振子^[11,12]的简单迭加形式. 这时 $\hat{H}_1$ 关于指标 1, 2, 3 的任意交换是不变的, 所以 $\hat{H}_1$ 具有 S_3 分立对称性, 当然还具有 $U_1 \times U_1 \times U_1$ 连续对称性.

(19)式的本征函数可用 $U_q(3) \supset U_1 \times U_1 \times U_1$ 的波函数来标记.

$$\left| \begin{matrix} \{n00\} \\ n_1, n_2, n_3 = n - n_1 - n_2 \end{matrix} \right\rangle_q = \frac{a_{1q}^{+n_1} a_{2q}^{+n_2} a_{3q}^{+n-n_1-n_2}}{\{[n_1]_q! [n_2]_q! [n_3]_q!\}^{\frac{1}{2}}} |0\rangle_q \quad (20)$$

其中 $|0\rangle_q$ 是 q 玻色子真空态, n_1, n_2, n_3 是 $U_1 \times U_1 \times U_1$ 的量子数, 它们是对整数 n 的一个剖分. 由于体系的 S_3 对称性, (19)式给出的能级仍然存在简并情况. 为此, 设 $x = \max(n_1, n_2, n_3) \geq y \geq \min(n_1, n_2, n_3)$ 则用

$$\left| \begin{matrix} \{n00\} \\ x, y, z \end{matrix} \right\rangle_q \quad (21)$$

来标记波函数(20)式, 其中当 n 一定时, (x, y, z) 的取值为 $(n, 0, 0), (n-1, 1, 0), (n-2, 2, 0), \dots$. 利用 S_3 群元的交换关系容易证明, 当 $x = y = z$ 时, 能级是不简并的; 当 $x = y$ 或 $y = z$ 时, 能级是 3 重简并的; 当 $x \neq y \neq z$ 时, 能级是 6 重简并的.

2. 利用 1 中给出的形变玻色子算符, 可以将三维 q 振子的哈密顿量写为

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega}{2} \{q^{-N_2} (a_{1q}^+ a_{1q} + a_{1q} a_{1q}^+ q^{-1}) + q^{N_1} (a_{2q}^+ a_{2q} + a_{2q} a_{2q}^+ q) + a_{3q}^+ a_{3q} + a_{3q} a_{3q}^+\}. \quad (22)$$

当 $q \neq 1$ 时, (22)式给出的 q 形变振子的两个振动自由度之间产生了耦合. (22)式在 $q \rightarrow q^{-1}$ 的变换下是不变的, 并且当 q 为复数时 $\hat{H}_1$ 仍然是厄密的. 利用 q 玻色子算符的对易关系, 还可把(22)式简化为

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega}{2} \{[N_1 + N_2 + 2]_q + [N_1 + N_2]_q + [N_3 + 1]_q + [N_3]_q\}. \quad (23)$$

容易看出系统具有 $SU_q(2)$ 对称性. $SU_q(2)$ 的生成元可用 q 玻色子算符表为

$$J_+^q = a_{1q}^+ a_{2q}, \quad J_-^q = a_{2q}^+ a_{1q}, \quad J_0^q = \frac{1}{2} (N_1 - N_2). \quad (24)$$

所以(23)式的本征函数除了可用 1 给出的 $U_q(3) \supset U_1 \times U_1 \times U_1$ 波函数来标记外, 也可用 $U_q(3) \supset SU_q(2) \times U_1$ 波函数来标记, 其一般表达式为^[8]

$$\left| \begin{matrix} \{n00\} \\ jm \end{matrix} \right\rangle_q = \frac{a_{1q}^{+j+m} a_{2q}^{+j-m} a_{3q}^{+n-2j}}{\{[n-2j]_q! [j+m]_q! [j-m]_q!\}^{\frac{1}{2}}} |0\rangle_q. \quad (25)$$

当 $U_q(3)$ 的表示 $\{n00\}$ 一定时, j 的取值为 $0, 1/2, 1, 3/2, \dots, n/2$. 所以此时振子能级的简并度与三维轴对称振子的简并度是一致的.

3. 三维各向同性振子的哈密顿量也可取为如下的 q 形变形式:

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= \frac{\hbar\omega}{2} \{q^{-N_2-N_3}(a_{1q}^+a_{1q} + q^{-2}a_{1q}a_{1q}^+) + q^{N_1+N_3}(a_{2q}^+a_{2q} + a_{2q}a_{2q}^+ q^{-2N_3}) \\ &\quad + q^{N_1-N_2}(a_{3q}^+a_{3q} + q^{2N_2+2}a_{3q}a_{3q}^+)\} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \{[N_1 + N_2 + N_3 + 3]_q + [N_1 + N_2 + N_3]_q\}.\end{aligned}\quad (26)$$

此时系统的动力学对称群是 $U_q(3)$, 其生成元是 $E_{ij}^q = a_{iq}^+a_{jq}$ ($i \neq j$), $E_i^q = N_i$ ($i=1, 2, 3$), 这时(26)式的本征函数除了可用 1 和 2 中给出的 $U_q(3) \supset U_1 \times U_1 \times U_1$ 和 $U_q(3) \supset SU_q(2) \times U_1$ 波函数来标记外, 也可用 $U_q(3) \supset SO_{q'}(3) \supset SO(2)$ 的波函数来标记, 其中 $SO_{q'}(3)$ 的生成元已由(16)式给出. 这时 $SO_{q'}(3)$ 的 Casimir 算符 $C_{2q'} = 2L_{-}^q L_{+}^q + [L_0^q]_{q'} [L_0^q + 1]_{q'} = [\hat{L}]_{q'} [\hat{L} + 1]_{q'}$ 中 $\hat{L}$ 的本征值就是 q 振子的角动量(当 $q'=1$ 时)或形变角动量(当 $q' \neq 1$ 时). 其波函数的一般形式为

$$\begin{aligned}\left| \begin{matrix} \{n00\} \\ LM \end{matrix} \right\rangle_{qq'} &= \left\{ \frac{(2L+1)!! 2^{L-M} [L+M]_{q'}!}{(n+L+1)!! (n-L)!! [L]_{q'}! [2L]_{q'}! [L-M]_{q'}!} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times (L_{-}^q)^{L-M} \left\{ \left(\frac{N_3(N_3+1)}{[N_3]_q [N_3+1]_q} \right)^{\frac{1}{2}} (a_{3q}^+)^2 - 2 \frac{N_1 N_2}{[N_1]_q [N_2]_q} a_{1q}^+ a_{2q}^+ \right\}^{\frac{1}{2}(n-L)} \times a_{1q}^{+L} |0\rangle_q,\end{aligned}\quad (27)$$

其中当 n 一定时, 形变角动量 L 的取值为 $n, n-2, n-4, \dots, 0$ 或 1 , 而 q 和 q' 是两个相互独立的形变参数.

四、讨 论

本文详细讨论了三维各向同性振子的 q 形变, 并且利用 q 玻色子算符及形变泛函映射实现了 $U_q(3) \supset SO_{q'}(3) \supset SO_2$ 这一物理基, 其中 q 和 q' 是两个相互独立的形变参数. 下面就一维 q 振子为例, 利用形变泛函映射来简短讨论一下 q 形变的物理意义. 取较简单的形式^[11,12]. 一维 q 振子哈密顿量可用形变玻色子算符写为

$$\hat{H}_q = \frac{\hbar\omega}{2} \{a_q^+ a_q + a_q a_q^+\} = \frac{1}{2} \hbar\omega \{[N+1]_q + [N]_q\}.\quad (28)$$

文献[13,14]中给出 a_q, a_q^+, N 的如下形变泛函实现, 即

$$N = a^+ a, \quad a_q^+ = \sqrt{\frac{[N]_q}{N}} a^+, \quad a_q = a \sqrt{\frac{[N]_q}{N}}\quad (29)$$

其中 a, a^+ 满足玻色子对易关系

$$[a, a^+] = 1, \quad [a, a] = [a^+, a^+] = 0.\quad (30)$$

利用(29), (28)式可表为

$$\hat{H}_q = \begin{cases} \frac{\hbar\omega}{2} \{ a^+ a \frac{\tau}{\sin\tau} (1 - \frac{\tau^2}{3!} (a^+ a)^2 + \frac{\tau^4}{5!} (a^+ a)^4 + \dots) \\ \quad + aa^+ \frac{\tau}{\sin\tau} (1 - \frac{\tau^2}{3!} (aa^+)^2 + \frac{\tau^4}{5!} (aa^+)^4 + \dots) \}, & \text{当 } q = e^\tau \text{ 时,} \\ \frac{\hbar\omega}{2} \{ a^+ a \frac{\tau}{\sin\tau} (1 + \frac{\tau^2}{3!} (a^+ a)^2 + \frac{\tau^4}{5!} (a^+ a)^4 + \dots) \\ \quad + aa^+ \frac{\tau}{\sin\tau} (1 + \frac{\tau^2}{3!} (aa^+)^2 + \frac{\tau^4}{5!} (aa^+)^4 + \dots) \}, & \text{当 } q = e^{-\tau} \text{ 时,} \end{cases} \quad (31)$$

利用 a, a^+ 与普通空间中的坐标 x 和动量 p_x 间的关系, 容易看出在 q 形变后, 线性振子变为非线性振子. 其特点是线性振子哈密顿量

$$\hat{H}_{q=1} = \frac{\hbar\omega}{2} (a^+ a + aa^+), \quad (32)$$

的本征函数也是非线性振子哈密顿量(31)式的本征函数. 从玻色子空间看, 显然该体系仍然保持 $U(1)$ 对称性. 当 τ 较小时(31)式可近似地表为

$$\hat{H}_q = \hat{H}_{q=1} \pm \tau^2 \frac{\hbar\omega}{12} ((a^+ a)^3 + (aa^+)^3). \quad (33)$$

通过形变泛函映射, 已经清楚地看到, 在 q 形变后仍然可在传统的框架内来讨论问题, 而不必引入非对易几何. 可以相信这一讨论对量子群在量子多体问题中的进一步应用具有一定的启发性.

- [1] E. K. Sklyanin, *Funct. Anal. Appl.*, **16**(1982), 262.
- [2] V. G. Drinfeld, *Proc. I. C. M. Berkeley*, (1986), p. 798.
- [3] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11**(1986), 247.
- [4] 阎宏、常哲、郭汉英, *物理学报*, **40**(1991), 1377.
- [5] D. Bonatsos *et al.*, *Chem. Phys. Lett.*, **175**(1990), 300.
- [6] D. Bonatsos *et al.*, *Phys. Lett.*, **B251**(1990), 477.
- [7] D. Bonatsos *et al.*, *J. Phys. A*, **25**(1992), L267.
- [8] Feng Pan and Jin-Quan Chen, *J. Phys. A*, **(25)**(1992), 4017.
- [9] T. Curtright, and C. Zachos, *Phys. Lett.*, **B243**(1990), 237.
- [10] C. -P. Sun and H. -C. Fu, *J. Phys. A*, **22**(1989), L983.
- [11] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A*, **22**(1989), L873.
- [12] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22**(1989), 4581.
- [13] J. Cigler, *Mh. Math.*, **88**(1979), 87.
- [14] V. Kuryshkin, *Ann. Fond L de Broglie*, **5**(1980), 111.

q -DEFORMATIONS OF THREE-DEMENSIONAL ISOTROPIC OSCILLATOR AND THEIR WAVE FUNCTIONS

PAN FENG^① XU PEI-JUN

Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116022

(Received 12 August 1992)

ABSTRACT

In this paper, three kinds of q -deformations of three-dimensional isotropic oscillator are discussed in detail, the Hamiltonians of which have S_3 , $SU_q(2)$, and $U_q(3)$ symmetries, respectively. Especially, in the third case a specific realization of $U_q(3) \supset SO_q(3)$ is given. Relation between the q -deformed oscillator and the classical one is also discussed.

PACC: 0365; 0220; 0210

^① ICTP, P.O. Box 586, 34100 Trieste, Italy.