

六顶角带谱参数杨-Baxter 方程的解*

王世坤¹⁾ 吴 可²⁾ 孙晓东¹⁾ 费少明²⁾

1) (中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

2) (中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

(1994 年 2 月 3 日收到)

通过五个解变换, 四组非退化基本解和七组退化解, 给出了精确可解统计模型理论中六顶角带谱参数杨-Baxter 方程的全部解. 并讨论了解的么正条件.

PACC: 0210; 0220; 1110

在精确求解完全可积统计模型的研究中, 杨振宁和 Baxter 独立地提出了一个非常重要的非线性代数方程, 称为带谱参数的 Y-B 方程^[1]:

$$S_{12}(u)S_{23}(u+v)S_{12}(v) = S_{23}(v)S_{12}(u+v)S_{23}(u), \quad (1)$$

这里 u 和 v 是复参数. 如果找到了方程(1)的解, 则相应的统计模型可以精确求解.

求解带谱参数 Y-B 方程的解, 就是找一个 n^2 阶的函数方阵 $S(u) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n^2}$, 满足方程(1). 其中

$$S_{12}(u) = S(u) \otimes E, \quad S_{23}(u) = E \otimes S(u),$$

这里 E 是 n 阶单位方阵, 符号 $\otimes$ 表示两个矩阵的直积. 1967 年杨振宁在研究一维 Schrödinger 多体系统精确解时, 给出了带谱参数 Y-B 方程的第一个解^[2]:

$$S(u) = \frac{1}{u + i\eta} \begin{pmatrix} u - i\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\eta & u & 0 \\ 0 & u & -i\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u - i\eta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

这个解称为杨解或有理解. 1972 年 Baxter 在研究六顶角统计模型时, 则给出了三角解^[3]:

$$S(u) = \begin{pmatrix} \sin(u + \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\eta) & \sin(u) & 0 \\ 0 & \sin(u) & \sin(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(u + \eta) \end{pmatrix} \quad (3)$$

称为 Baxter 解. (2)和(3)式为 4×4 函数方阵, 它们的 $a_{11}(u)$, $a_{22}(u)$, $a_{23}(u)$, $a_{32}(u)$, $a_{33}(u)$ 和 $a_{44}(u)$ 分量均不恒为零. 称这样的解为非退化的六顶角带谱参数的解, 而称某些分量为零的解为退化的六顶角带谱参数的解, u 是谱参数, η 为量子参数.

* 国家科委攀登项目基金, 国家自然科学基金和中国科学院自然科学基金资助的课题.

现在我们准备找出所有的六顶角带谱参数的解。为方便起见,我们设

$$\begin{aligned} a_{11}(u) &= a_1(u), & a_{22}(u) &= a_2(u), & a_{33}(u) &= a_3(u), \\ a_{32}(u) &= a_6(u), & a_{33}(u) &= a_3(u), & a_{44}(u) &= a_4(u), \end{aligned}$$

即

$$S(u) = \begin{pmatrix} a_1(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(u) & a_5(u) & 0 \\ 0 & a_6(u) & a_3(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4(u) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

直接记为 $S(u) = \langle a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u) \rangle$, 此时, 方程(1)等价于下面 13 个方程:

$$P_0: a_2(u)a_2(v)a_3(u+v) - a_3(u)a_3(v)a_2(u+v) = 0; \quad (4a)$$

$$P_1: a_1(u)a_1(v)a_2(u+v) - a_2(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_6(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0,$$

$$P_2: a_1(u)a_2(v)a_5(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_3(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0, \quad (4b)$$

$$P_3: a_2(u)a_1(v)a_6(u+v) - a_2(u)a_6(v)a_1(u+v) - a_6(u)a_3(v)a_2(u+v) = 0;$$

$$P_4: a_4(u)a_4(v)a_2(u+v) - a_2(u)a_2(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_6(v)a_2(u+v) = 0,$$

$$P_5: a_4(u)a_2(v)a_6(u+v) - a_6(u)a_2(v)a_4(u+v) - a_3(u)a_6(v)a_2(u+v) = 0, \quad (4c)$$

$$P_6: a_2(u)a_4(v)a_5(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_3(v)a_2(u+v) = 0;$$

$$P_7: a_1(u)a_1(v)a_3(u+v) - a_3(u)a_3(v)a_1(u+v) - a_6(u)a_5(v)a_3(u+v) = 0,$$

$$P_8: a_1(u)a_3(v)a_5(u+v) - a_5(u)a_3(v)a_1(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_3(u+v) = 0,$$

$$P_9: a_3(u)a_1(v)a_6(u+v) - a_3(u)a_6(v)a_1(u+v) - a_6(u)a_2(v)a_3(u+v) = 0, \quad (4d)$$

$$P_{10}: a_4(u)a_4(v)a_3(u+v) - a_3(u)a_3(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_6(v)a_3(u+v) = 0,$$

$$P_{11}: a_4(u)a_3(v)a_6(u+v) - a_6(u)a_3(v)a_4(u+v) - a_2(u)a_6(v)a_3(u+v) = 0,$$

$$P_{12}: a_3(u)a_4(v)a_5(u+v) - a_3(u)a_5(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_3(u+v) = 0.$$

容易看出, 第一个方程仅有指标 2, 3, 下指标 2 和 3 交换后, P_0 保持不变, 而从 (4b) 和 (4c) 式就可以得到 (4d) 式; 同样, 我们同时交换下指标 1 和 4, 5 和 6, 则由 (4b) 式可以得到 (4c) 式, 而 (4a) 和 (4d) 不变。因此有

(A) 若 $S(u) = \langle a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u) \rangle$ 为(1)式的解, 则

$$S(u) = \langle a_1(u), a_3(u), a_2(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u) \rangle,$$

$$S(u) = \langle a_4(u), a_2(u), a_3(u), a_1(u), a_6(u), a_5(u) \rangle,$$

$$S(u) = \langle a_4(u), a_3(u), a_2(u), a_1(u), a_6(u), a_5(u) \rangle$$

也是方程的解。

此外, 直接利用方程 (4a)–(4d), 可以验证尚有如下解的变换, 若 $S(u) = \langle a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u) \rangle$ 是方程(1)的解, 则

(B) $f(u)S(u)$ 也是非退化六顶角带谱参数 Y-B 的解, $f(u)$ 是任一不恒为零的函数;

(C) $S(u) = \langle a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_4(u), \mu^{-1}a_5(u), \mu a_6(u) \rangle$ 也是 Y-B 方程的解, μ

是不为零的常数;

(D) $S(u) = \langle a_1(u), e^{ku}a_2(u), e^{-ku}a_3(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u) \rangle$ 也是 Y-B 方程的解, k 是任一复数;

(E) $S(u) = \langle a_1(\mu u), a_2(\mu u), a_3(\mu u), a_4(\mu u), a_5(\mu u), a_6(\mu u) \rangle$ 也是 Y-B 方程的解, μ 是不等于零的复参数.

我们分别称 (A), (B), (C), (D), (E) 为六顶角带谱参数 Y-B 方程的解变换 A, B, C, D, E .

我们首先讨论非退化的解. 既然 $a_2(u) \neq 0$, 由 (P_0) 的恒等式可以得到

$$\frac{a_3}{a_2}(u+v) = \frac{a_3}{a_2}(u) \frac{a_3}{a_2}(v),$$

则必有 $a_3(u) = e^{mu}a_2(u)$, m 是一固定参数. 因此, 在解变换 D 意义下, 可以设

$$a_2(u) = a_3(u). \quad (5)$$

(P_1) 的等式是关于宗量 u 和 v 的一个恒等式, 与宗量形式无关, 或者讲, u 和 v 对换之后, 恒等式仍成立, 即

$$a_1(u)a_1(v)a_2(u+v) - a_2(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_5(u)a_6(v)a_2(u+v) = 0. \quad (6)$$

(6) 式和 (P_1) 的等式相减:

$$[a_6(u)a_5(v) - a_5(u)a_6(v)]a_2(u+v) = 0.$$

因为 $a_2(u+v) \neq 0$, 在 $a_1(u)$ 是 u 的解析函数的假定下, 有

$$a_6(u)a_5(v) - a_5(u)a_6(v) \equiv 0.$$

否则有 (u_0, v_0) 使 $a_6(u_0)a_5(v_0) - a_5(u_0)a_6(v_0) \neq 0$, 则在 (u_0, v_0) 的邻近 $a_6(u)a_5(v) - a_5(u)a_6(v) \neq 0$, 那么在 (u_0, v_0) 的局部, $a_2(u+v) = 0$, 由解析函数的恒定理, $a_2(u) \equiv 0$. 因此 $a_5(u) = ka_6(u)$, k 是不为零的常数. 由解变换 C 不妨假设

$$a_6(u) = a_5(u). \quad (7)$$

所以, 方程 (4a)–(4d) 在解变换 (C) 和 (D) 的意义下等价于下面六个方程:

$$\begin{aligned} & a_1(u)a_1(v)a_2(u+v) - a_2(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_5(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0, \\ & a_1(u)a_2(v)a_5(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0, \\ & a_2(u)a_1(v)a_5(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_1(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_2(u+v) = 0; \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & a_4(u)a_4(v)a_2(u+v) - a_2(u)a_2(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0, \\ & a_4(u)a_2(v)a_5(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_4(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0, \\ & a_2(u)a_4(v)a_5(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_4(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_2(u+v) = 0. \end{aligned} \quad (8b)$$

把恒等式组 (8a) 中指标 1 换为 4, 即可得到 (8b) 式, 故只须解 (8a) 式. (8a) 式等价于下面方程组:

$$a_1(u)a_2(v)a_5(u+v) - a_5(u)a_2(v)a_1(u+v) - a_2(u)a_5(v)a_2(u+v) = 0; \quad (9a)$$

$$-a_2(u)a_2(v)a_1(u+v) + (a_1(u)a_1(v) - a_5(u)a_5(v))a_2(u+v) = 0; \quad (9b)$$

$$M(u, v)a_2(u+v) = 0. \quad (9c)$$

其中

$$M(u, v) = a_2^2(u)a_5(v)a_1(v) - a_1(u)a_5(u)a_2^2(v) + a_1(u)a_5(u)a_1^2(v)$$

$$-a_1^2(u)a_5(v)a_1(v) - a_5^2(u)a_5(v)a_1(v) + a_1(u)a_5(u)a_5^2(v).$$

既然 $a_2(u+v) \neq 0$, 则应当有

$$M(u, v) = 0,$$

或者

$$[a_1^2(v) + a_5^2(v) - a_2^2(v)](a_1(u)a_5(u)) = [a_1^2(u) + a_5^2(u) - a_2^2(u)](a_1(v)a_5(v)), \quad (10a)$$

恒等式(10a)与宗量取法无关, 则又应有

$$\begin{aligned} & [a_1^2(u+v) + a_5^2(u+v) - a_2^2(u+v)](a_1(u)a_5(u)) \\ & = [a_1^2(u) + a_5^2(u) - a_2^2(u)](a_1(u+v)a_5(u+v)), \end{aligned} \quad (10b)$$

用整序原理^[4,9]或直接(复杂一些)可以证明恒等式组(8a)等价于恒等式(9a), (10a)和(10b)。故而, 求解(9a)和(10a)式即可。由(10a)式可得到

$$a_1^2(u) + a_5^2(u) - a_2^2(u) - 2a_1(u)a_5(u)\lambda = 0, \quad (11)$$

其中 λ 是独立于宗量 u 的复常数。(11)式是阶为 $d=2$ 的齐次式, 代表了复投影空间 CP^2 中的一条代数曲线, 其亏格 g 为

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 0.$$

此即说明六顶角带谱参数的 Y-B 方程不可能有亏格的解。

由解变换 B , 不妨取 $a_2(u) = 1$, 则(9a)和(10a)式化为

$$a_5(v) = a_1(u)a_5(u+v) - a_5(u)a_1(u+v), \quad (12a)$$

$$[(a_1^2(u) + a_5^2(u) - 1)](a_1(v)a_5(v)) = (a_1^2(v) + a_5^2(v) - 1)(a_1(u)a_5(u)), \quad (12b)$$

在(12a)式中依次取 $v=0, u=0, u=-v$, 则分别有

$$a_5(0) = 0, \quad a_1(0) = 1, \quad a_5(u) = -a_5(-u). \quad (13)$$

(12a)式等价于

$$a_5(u+v) = a_1(-u)a_5(v) + a_5(u)a_1(v), \quad (14)$$

假定 $a_1(u), a_5(u)$ 均为一阶可微, 关于宗量 v 微分(14)式两边, 然后取 $v=0$ 得

$$a_5'(u) = -a_1'(0)a_5(u) + a_5'(0)a_1(u), \quad (15)$$

设 $a_1'(0) = m, a_5'(0) = n$,

$$a_5'(u) = na_1(u) - ma_5(u). \quad (16)$$

先关于宗量 u 微分(12b)式两边, 关于宗量 v 再微分得到的等式, 则有

$$\begin{aligned} & [a_1(u)a_1'(u) + a_5(u)a_5'(u)](a_1'(v)a_5(v) + a_1(v)a_5'(v)) \\ & = [a_1(v)a_1'(v) + a_5(v)a_5'(v)](a_1'(u)a_5(u) + a_1(u)a_5'(u)). \end{aligned} \quad (17)$$

取 $v=0$, 并结合(13)式中的结果有

$$(na_1(u) - ma_5(u))a_1'(u) - (ma_1(u) - na_5(u))a_5'(u) = 0, \quad (18)$$

把(16)式代入(18)式得

$$a_5'(u)(a_1'(u) - (ma_1(u) - na_5(u))) = 0, \quad (19)$$

其中 $a_5'(u) \neq 0$, 否则 $a_5(u) = a_5(0) = 0$, 与所设 $a_5(u) \neq 0$ 矛盾。因此, 我们得到方程组:

$$a_5'(u) = na_1(u) - ma_5(u), \quad a_5(0) = 0,$$

$$a_1'(u) = ma_1(u) - na_5(u), \quad a_1(0) = 1, \quad (20)$$

m 和 n 不能同时为零。并且 $n \neq 0$, 否则

$$a_1'(u) = -ma_5(u), \quad a_5(u) = Ae^{-mu} = 0.$$

设 $m^2 - n^2 \neq 0$, 则方程(20)有解

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \sinh(Ku + \eta)/\sinh(\eta), \\ a_5(u) &= \sinh(Ku)/\sinh(\eta), \end{aligned} \quad (21)$$

和

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \sinh(Ku + \eta)/\sinh(\eta), \\ a_5(u) &= -\sinh(Ku)/\sinh(\eta), \end{aligned} \quad (22)$$

这里 $n = K/\sinh(\eta)$, $m = K\cosh(\eta)/\sinh(\eta)$.

用同样方法可得方程组(8b)的解:

$$\begin{aligned} a_4(u) &= \sinh(Lu + \zeta)/\sinh(\zeta), \\ a_5(u) &= \sinh(Lu)/\sinh(\zeta), \end{aligned} \quad (23)$$

和

$$\begin{aligned} a_4(u) &= \sinh(Lu + \zeta)/\sinh(\zeta), \\ a_5(u) &= -\sinh(Lu)/\sinh(\zeta), \end{aligned} \quad (24)$$

这里 $n = L/\sinh(\zeta)$, $m = L\cosh(\zeta)/\sinh(\zeta)$, $m = a_4'(0)$, $n = a_5'(0)$.

(8a) 和 (8b) 式联立要求 (8a) 和 (8b) 式的 $a_2(u)$, $a_5(u)$ 必须相同。结合解变换 A 和 E , 可用(21)–(24)式得到非退化六顶角带谱参数 Y-B 方程的两组解:

第一组:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \sinh(u + \eta)/\sinh(-u + \eta), \\ a_2(u) &= a_3(u) = \sinh(\eta)/\sinh(-u + \eta), \\ a_4(u) &= \sinh(u + \eta)/\sinh(-u + \eta), \\ a_5(u) &= a_6(u) = \sinh(u)/\sinh(-u + \eta), \end{aligned} \quad (25a)$$

第二组:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \sinh(u + \eta)/\sinh(-u + \eta), \\ a_2(u) &= a_3(u) = \sinh(\eta)/\sinh(-u + \eta), \\ a_4(u) &= 1, \\ a_5(u) &= a_6(u) = \sinh(u)/\sinh(-u + \eta), \end{aligned} \quad (25b)$$

如对 (25a) 式作解变换 B , 取 $f(u)$ 为常数 $i \sinh(\eta)$, 再作解变换 E , 取 $\mu = i$ 并令 $\eta = i\xi$, 则得到 Baxter 所给出的三角解(3)式。

现在讨论 $m^2 = n^2$ 退化的情况。此时

$$a_1''(u) = a_5''(u) = 0.$$

得到两组解:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= mu + 1, \\ a_2(u) &= 1, \\ a_4(u) &= mu + 1, \\ a_5(u) &= mu, \quad m \neq 0 \end{aligned} \quad (26a)$$

和

$$\begin{aligned} a_1(u) &= mu + 1, \\ a_2(u) &= 1, \\ a_4(u) &= -mu + 1, \\ a_5(u) &= mu, \quad m \neq 0. \end{aligned} \quad (26b)$$

如对 (26a) 式作解变换 B , 取

$$f(u) = \frac{1}{(u + i\eta)m},$$

并令 $1/m = -i\eta$, 则得到杨解(2)式。在解变换意义下, (26a) 和 (26b) 式可写为

第三组:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= (u - i\eta)/(u + i\eta), \\ a_2(u) &= a_3(u) = -i\eta/(u + i\eta), \\ a_4(u) &= (u - i\eta)/(u + i\eta), \\ a_5(u) &= a_6(u) = u/(u + i\eta), \end{aligned} \quad (27a)$$

第四组:

$$\begin{aligned} a_1(u) &= (u - i\eta)/(u + i\eta), \\ a_2(u) &= a_3(u) = -i\eta/(u + i\eta), \\ a_4(u) &= -1, \\ a_5(u) &= a_6(u) = u/(u + i\eta). \end{aligned} \quad (27b)$$

因此, 我们可以得到如下结论:

定理 在解变换 A, B, C, D, E 意义下非退化六顶角带谱参数 $Y-B$ 方程的全部解共有四组: (25a) 和 (25b) 式是三角解, (27a) 和 (27b) 式是有理解。并且, 六顶角 $Y-B$ 方程不可能有高亏格的解。

文献[6, 7, 8]也讨论了六顶角 $Y-B$ 方程带谱参数的解, 并且给出了一个变形的解:

$$S(u) = \begin{pmatrix} 1 - xq^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - q^2)x & q(1 - x) & 0 \\ 0 & q(1 - x) & 1 - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x - q^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

若对本文第二组三角解 (25b) 式先施行解变换 B , 令 $f(u) = e^{-u}e^{-\eta}\sinh(-u + \eta)$, 再施行解变换 D , 令 $k = -1$, 最后取 $x = e^{-2u}$, $q = e^{-\eta}$ 就得到了(28)式。

下面我们来讨论解的么正性问题, 文献[1, 9]中给出的带谱参数 $Y-B$ 方程的解的么正条件为

$$S(u)S(-u) = I. \quad (29)$$

直接验证可知方程 (25a), (25b), (27a) 和 (27b) 四组解均满足么正条件, 而且解变换 A, C, D, E 保持么正条件, 解变换 B 当且仅当 $f(u)f(-u) = 1$ 时也保持么正条件。

(25a) 和 (25b) 两组解有单周期 $2\pi i$, (27a) 和 (27b) 式无周期。解变换 A, C, E 保持 (25a) 和 (25b) 式的单周期 $2\pi i$, 解变换 B 当且仅当 $f(u)$ 有单周期 $2\pi i$, 解变换 D 当且仅当 k 为整数时也保持 (25a) 和 (25b) 式的单周期 $2\pi i$ 。(27a) 和 (27b)

式在解变换 A, B, C, D, E 作用下仍无周期。

以上我们讨论了非退化解, 下面我们根据方程组 (4a)–(4d) 讨论退化的情形。

情形一 若 $a_2(u) = a_3(u) \equiv 0$, 则 $a_1(u), a_4(u), a_5(u), a_6(u)$ 可为任意函数。

情形二 若 $a_2(u)$ 和 $a_3(u)$ 之中只有一个恒为零, 则不妨设 $a_2(u) \neq 0, a_3(u) \equiv 0$,

1) 若此时 $a_5(u) = a_6(u) \equiv 0$, 则在解变换意义下的解为

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \exp(k_1 u), \\ a_2(u) &= 1, \\ a_4(u) &= \exp(k_4 u), \\ a_3(u) &= a_5(u) = a_6(u) = 0, \end{aligned}$$

其中 k_1, k_4 为任意常数。

2) 若 $a_5(u)$ 和 $a_6(u)$ 之中只有一个恒为零, 则不妨设 $a_5(u) \neq 0, a_6(u) \equiv 0$, 则在解变换意义下的解有四组:

- i) $a_1(u) = a_3(u) = a_4(u) = a_6(u) \equiv 0, a_2(u), a_5(u)$ 为任意函数,
 - ii) $a_3(u) = a_4(u) = a_6(u) \equiv 0, a_1(u) = \exp(ku), a_2(u) = 1, a_5(u) = C \exp(ku),$
 - iii) $a_1(u) = a_3(u) = a_6(u) \equiv 0, a_4(u) = \exp(ku), a_2(u) = 1, a_5(u) = C \exp(ku),$
 - iv) $a_3(u) = a_6(u) \equiv 0, a_1(u) = a_4(u) = \exp(ku), a_2(u) = 1, a_5(u) = C \exp(ku),$
- 其中 C, k 为常数且 $C \neq 0$ 。

3) 若 $a_5(u) \neq 0$ 且 $a_6(u) \neq 0$, 则在解变换意义下的解为

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \exp(ku)/(1 - C_1^2), \\ a_2(u) &= 1, \\ a_3(u) &= 0, \\ a_4(u) &= \exp(ku)/(1 - C_1^2), \\ a_5(u) &= a_6(u) = C_1 \exp(ku)/(1 - C_1^2), \end{aligned}$$

其中 C_1, C_4, k 为常数, $C_4 = C_1$ 或 $C_4 = -1/C_1$, 且 $C_1^2 \neq 1$ 。

情形三 若 $a_2(u) \neq 0$ 且 $a_3(u) \neq 0$, 则又有以下几种情况:

1) 若此时 $a_5(u) = a_6(u) \equiv 0$, 则在解变换意义下的解为

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \exp(k_1 u), \\ a_2(u) &= a_3(u) = 1, \\ a_4(u) &= \exp(k_4 u), \\ a_5(u) &= a_6(u) = 0, \end{aligned}$$

其中 k_1, k_4 为任意常数。

2) 若 $a_5(u)$ 和 $a_6(u)$ 之中只有一个恒为零, 则不妨设 $a_5(u) \neq 0, a_6(u) \equiv 0$, 则在解变换意义下的解为

$$\begin{aligned} a_1(u) &= \exp(k_1 u), \\ a_2(u) &= a_3(u) = 1, \\ a_4(u) &= \exp(k_4 u), \\ a_5(u) &= C \sinh(k_1 u), \\ a_6(u) &= 0, \end{aligned}$$

其中 C, k_1, k_i 为常数, 且 $k_i = \pm k_1$.

3) 若 $a_5(u) \neq 0$ 且 $a_6(u) \neq 0$, 此时无退化解. 若不然, 设 $a_5(u) = 0$, 则由方程组 (4c) 可知 $a_2(u), a_3(u), a_4(u), a_6(u)$ 中至少有一个是恒为零的, 与假设矛盾, 即在此情形下只有非退化解.

- [1] 马中骥, 杨-巴可斯特方程和量子包络代数(并见其中参考文献)(科学出版社, 北京, 1993).
- [2] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, 19(1967), 1312.
- [3] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982).
- [4] 吴文俊, 几何定理机器证明的基本原理(科学出版社, 北京, 1984).
- [5] Wu Wen-tsun, *Scientia Sinica*, 21(1978), 157.
- [6] Ge Mo-Lin, Guang-Chun Liu and Kang Xue, *J. Phys. A*, 24(1991), 2679.
- [7] M. Couture, M. L. Ge, H. C. Lee and N. C. Schmeing, *J. Phys. A*, 23(1990), 4751.
- [8] L. Hlavaty, *J. Phys. A*, 20(1987), 1661.
- [9] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd *Funkts. Anal. Pril.*, 16(3) (1982), 1; *Funct. Anal. Appl.*, 16(1982), 159.

SOLUTIONS OF YANG-BAXTER EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETER FOR SIX-VERTEX MODEL

WANG SHI-KUN¹⁾ WU KE²⁾ SUN XIAO-DONG¹⁾

FEI SHAO-MING²⁾

1) (Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080)

2) (Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

(Received 3 February 1994)

ABSTRACT

In this paper, we obtain all solutions of Yang-Baxter equation with spectral parameter for six-vertex model in theory of exactly solved statistical models by four sets of non-degenerate basic solutions and seven sets of degenerate basic solutions up to five solution transformations. The unitary condition of the solutions is also discussed.

PACC: 0210; 0220; 1110