第44卷 第7期
1995 年 7 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 44, No. 7
July, 1995

双参数变形量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示

张 德 兴
(大庆石油学院基础课部，安达 151400)

于 肇 贤[1)]
(胜利油田职工大学，东营 257004)

于 舸
(大庆石油学院基础课部，安达 151400)

(1994 年 4 月 17 日收到)

给出双参数变形量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示.

PACC: 0365;0210;0220

1 引 言

近年来，量子代数的研究引起了物理学与数学工作者的极大兴趣. 人们发现，量子代数与当前理论物理与数学研究的一些热门课题，如统计可解模型、量子反散射方法、共形场论、link 与 knot 的分类等问题有着密切的联系[1,2]. 为了更有效地研究量子代数在物理学中的应用，必须系统地发展它的表示理论.

需要指出的是，现在人们的研究兴趣大多集中在量子代数的单参数量子变形. 实际上，从物理应用的角度来看，多个变形参数的量子代数及其变形振子表示有时可能更有用一些[2]. 虽然在数学上可以证明两个或多个参数的量子代数能够经过某些变换回到单参数情形，但是正如 Wess 与 Zumine 所指出的[3]，多个变形参数在本质上是相互独立的. 因此，多参数变形的量子代数及其表示的研究对于发展量子代数在物理学上的应用是有实际意义的. 最近，有关双参数变形量子代数的研究取得了一些进展[2,4]. 本文旨在将于祖荣[5]研究过的量子 Lie 超代数 $SL_q(2/1)$ 的不可约表示推广到双参数变形情况，即给出双参数变形量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示.

---

1) 通讯联系人.

2 双参数变形量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$

选用 Chevalley 基,其中 h_i, x_i 和 $y_i (i = 1,2)$ 满足对易关系

$$[h_1, h_2] = 0, \tag{1a}$$

$$[h_i, x_j] = a_{ij}x_j, \quad [h_i, y_j] = -a_{ij}y_j \quad (i,j = 1,2), \tag{1b}$$

$$x_1y_1 - s^2y_1x_1 = [h_1]_{q,s}, \quad s^2x_2y_2 + y_2x_2 = [h_2]_{q,s^{-1}}. \tag{1c}$$

还满足 Serre 类关系

$$s^{-2}x_1^2x_2 + x_2x_1^2 = [2]_{q,s}x_1x_2x_1, \tag{1d}$$

$$y_1^2y_2 + s^{-2}y_2y_1^2 = [2]_{q,s}y_1y_2y_1, \tag{1e}$$

式中矩阵 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 记号 $[f]_{q,s} = s^{1-f}(q^f - q^{-f})/(q - q^{-1})$, f 可以是一个数或算符.

引入双参数变形玻色(费密)振子的产生(湮没)算符 $a_i^+(a_i, i = 1,2)$ 和 $b^+(b)$, 它们满足对易关系

$$[N_i', a_j'^+] = \delta_{ij}a_j'^+, [N_i', a_j'] = -\delta_{ij}a_j', \tag{2a}$$

$$a_1'a_1'^+ - s^{-1}qa_1'^+a_1' = (sq)^{-N_1'}, a_2'a_2'^+ - sq^{-1}a_2'^+a_2' = (sq)^{N_2'}, \tag{2b}$$

$$[M', b'^+] = b'^+, \quad [M', b'] = -b', \tag{2c}$$

$$s^2b'b'^+ + sqb'^+b' = (sq)^{M'} \tag{2d}$$

和

$$a_1'^+a_1' = [N_1']_{q,s}, a_1'a_1'^+ = [N_1' + 1]_{q,s}, \tag{3a}$$

$$a_2'^+a_2' = [N_2']_{q,s^{-1}}, a_2'a_2'^+ = [N_2' + 1]_{q,s^{-1}}, \tag{3b}$$

$$b'^+b' = [M']_{q,s^{-1}}, \quad b'b'^+ = -[M' - 1]_{q,s^{-1}}, \tag{3c}$$

$$b'^+b'^+ = b'b' = 0, \tag{3d}$$

式中 M' 和 $N_i'(i = 1,2)$ 分别是双参数变形费密振子和玻色振子的数算数.

定义 $SL_{q,s}(2/1)$ 的两个辅助算符 x_3, y_3 为

$$x_3 = s^{N_1'}(x_1x_2 - sqx_2x_1) = s^{N_1'}s^{N_2'}q^{-N_2'}a_1'^+b', \tag{4a}$$

$$y_3 = s^{-N_2'}(y_2y_1 - sq^{-1}y_1y_2)s^{N_1'} = s^{-N_2'}q^{N_2'}b'^+a_1's^{N_1'}. \tag{4b}$$

x_3 和 y_3 满足

$$s^{-1}x_1^2x_3 + s^{-1}x_3x_1^2 = [2]_{q,s}x_1x_3x_1, \tag{5a}$$

$$s^{-1}y_1^2y_3 + s^3y_3y_1^2 = [2]_{q,s^{-1}}y_1y_3y_1. \tag{5b}$$

至此,我们可以得到 $SL_{q,s}(2/1)$ 的双参数变形振子实现

$$h_1 = N_1' - N_2', \quad h_2 = N_2' + M', \tag{6a}$$

$$x_1 = a_1'^+a_2', \quad x_2 = a_2'^+b', \quad x_3 = s^{N_1'}s^{N_2'}q^{-N_2'}a_1'^+b', \tag{6b}$$

$$y_1 = a_2'^+a_1', y_2 = b'^+a_2', \quad y_3 = s^{-N_2'}q^{N_2'}b'^+a_1's^{N_1'}. \tag{6c}$$

(6)式除了满足(1)式外,还满足

$$x_3y_3 + s^{-2}y_3x_3 = [h_1 + h_2]_{q,s^{-1}} \tag{7}$$

和

$$q^{-1}x_1^2y_3 + s^{-2}qy_3x_1^2 = [2]_{q,s}x_1y_3x_1, \tag{8a}$$

$$q^{-1}y_1^2x_3 + s^{-2}qx_3y_1^2 = [2]_{q,s}y_1x_3y_1. \tag{8b}$$

3 决定 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示的方法

定义 $SL_{q,s}(2/1)$ 的生成元为

$$J_0' = (N_1' - N_2')/2,\ J_+' = a_1'^+a_2',\ J_-' = a_2'^+a_1', \tag{9a}$$

$$Q' = h_1 + 2h_2 = N_1' + N_2' + 2M', \tag{9b}$$

$$T_{1/2}' = -y_2 = -b'^+a_2'\quad T_{-1/2}' = y_3' = b'^+a_1's^{N_1'}, \tag{9c}$$

$$V_{1/2}' = x_3' = s^{N_1'}a_1'^+b',\ V_{-1/2}' = x_2 = a_2'^+b'. \tag{9d}$$

由 (9c),(9d) 式不难得到

$$V_\tau' = (-1)^{\frac{1}{2}-\tau}(T_{-\tau}')^+,\ \tau = \pm 1/2. \tag{10}$$

将(9)式代入(1),(7)和(8)式,得

$$[J_0',J_\pm'] = \pm J_\pm',\ s^{-1}J_+'J_-' - sJ_-'J_+' = s^{-2J_0'}[2J_0']_q, \tag{11a}$$

$$[Q',J_0'] = [Q_1',J_\pm'] = 0, \tag{11b}$$

$$[J_0,T_\tau'] = \tau T_\tau',\ [Q',T_\tau'] = T_\tau', \tag{11c}$$

$$[J_0',V_\tau'] = \tau V_\tau',\ [Q',V_\tau'] = -V_\tau' \tag{11d}$$

和

$$J_+'^2T_{-1/2}' + T_{-1/2}'J_+'^2 = [2]_qJ_+'T_{-1/2}'J_+' \tag{12a}$$

$$sJ_-'^2T_{1/2}' + s^{-1}T_{1/2}'J_-'^2 = [2]_qJ_-'T_{1/2}'J_-', \tag{12b}$$

$$s^{-1}J_+'^2V_{-1/2}' + sV_{-1/2}'J_+'^2 = [2]_qJ_+'V_{-1/2}'J_+', \tag{12c}$$

$$J_-'^2V_{1/2}' + V_{1/2}'J_-'^2 = [2]_qJ_-'V_{1/2}'J_-', \tag{12d}$$

式中记号 $[f]_q = (q^f - q^{-f})/(q - q^{-1})$，此外从 (3d) 式可得

$$\{T_{1/2}',T_{-1/2}'\} = \{V_{1/2}',V_{-1/2}'\} = 0. \tag{13}$$

很明显，$J_0',J_\pm'$ 是 $SL_{q,s}(2/1)$ Lie 超代数的生成元。令 $|\varepsilon jm\rangle'$ 为表示空间 L 中的正交归一基矢,对算符 Q',J_0' 和 $J_\pm'$ 分别有

$$'\langle\varepsilon'j'm'|Q'|\varepsilon jm\rangle' = \varepsilon\delta_{\varepsilon'\varepsilon}\delta_{j'j}\delta_{m'm}, \tag{14a}$$

$$'\langle\varepsilon'j'm'|J_0'|\varepsilon jm\rangle' = m\delta_{\varepsilon'\varepsilon}\delta_{j'j}\delta_{m'm}, \tag{14b}$$

$$'\langle\varepsilon'j'm'|J_+'|\varepsilon jm\rangle' = \sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}[j+m+1]_{q,s}}\,\delta_{\varepsilon'\varepsilon}\delta_{j'j}\delta_{m'm+1}, \tag{14c}$$

$$'\langle\varepsilon'j'm'|J_-'|\varepsilon jm\rangle' = \sqrt{[j+m]_{q,s}[j-m+1]_{q,s^{-1}}}\,\delta_{\varepsilon'\varepsilon}\delta_{j'j}\delta_{m'm-1}. \tag{14d}$$

为了计算 T_τ' 和 V_τ' 在 $|\varepsilon jm\rangle'$ 上的矩阵元,利用 (12a),(12b),(14c) 和 (14d) 式可得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left[j'+m+\frac{3}{2}\right]_{q,s}\left[j'-m-\frac{1}{2}\right]_{q,s^{-1}}\left[j'+m+\frac{1}{2}\right]_{q,s}\left[j'-m+\frac{1}{2}\right]_{q,s^{-1}}}\\
&\quad\times{}'\left\langle\varepsilon+1,j',\ m-\frac{1}{2}\middle|T_{-1/2}'\middle|\varepsilon,j,m\right\rangle'\\
&\quad+\sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}[j+m+1]_{q,s}[j-m-1]_{q,s^{-1}}[j+m+2]_{q,s}}\\
&\quad\times{}'\left\langle\varepsilon+1,j',m+\frac{3}{2}\middle|T_{-1/2}'\middle|\varepsilon,j,m+2\right\rangle'
\end{aligned}$$

$$= [2]_q\sqrt{\left[j'+m+\frac{3}{2}\right]_{q,s}\left[j'-m-\frac{1}{2}\right]_{q,s^{-1}}[j-m]_{q,s^{-1}}[j+m+1]_{q,s}}$$
$$\times {}'\left\langle \varepsilon+1,j',m+\frac{1}{2}|T'_{-1/2}|\varepsilon,j,m+1\right\rangle', \tag{15a}$$

$$s\sqrt{\left[j'-m+\frac{3}{2}\right]_{q,s^{-1}}\left[j'+m-\frac{1}{2}\right]_{q,s}\left[j'-m+\frac{1}{2}\right]_{q,s^{-1}}\left[j'+m+\frac{1}{2}\right]_{q,s}}$$
$$\times {}'\left\langle \varepsilon+1,j',m+\frac{1}{2}|T'_{1/2}|\varepsilon,j,m\right\rangle'$$
$$+s^{-1}\sqrt{[j+m]_{q,s}[j-m+1]_{q,s^{-1}}[j+m-1]_{q,s}[j-m+2]_{q,s^{-1}}}$$
$$\times {}'\left\langle \varepsilon+1,j',m-\frac{3}{2}|T'_{1/2}|\varepsilon,j,m-2\right\rangle'$$
$$= [2]_q\sqrt{\left[j'-m+\frac{3}{2}\right]_{q,s^{-1}}\left[j+m-\frac{1}{2}\right]_{q,s}[j+m]_{q,s}[j-m+1]_{q,s^{-1}}}$$
$$\times {}'\left\langle \varepsilon+1,j',m-\frac{1}{2}|T'_{1/2}|\varepsilon,j,m-1\right\rangle'. \tag{15b}$$

解 (15a) 和 (15b) 式可得

$${}'\langle\varepsilon+1,j',m'|T'_{-1/2}|\varepsilon,j,m\rangle' = \frac{'\langle\varepsilon+1,j'\|T'\|\varepsilon,j\rangle'}{\sqrt{[2j'+1]_{q,s}}}$$
$$\times f(q,s)C^{(-\frac{1}{2})}_{q,s}\left(jm\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}|j'm'\right), \tag{16a}$$

$${}'\langle\varepsilon+1,j',m'|T'_{1/2}|\varepsilon,j,m\rangle' = \frac{'\langle\varepsilon+1,j'\|T'\|\varepsilon,j\rangle'}{\sqrt{[2j'+1]_{q,s}}}\,g(q,s)C^{(\frac{1}{2})}_{q,s}$$
$$\times\left(jm\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|j'm'\right), \tag{16b}$$

式中 $C^{(\tau)}_{q,s}\left(jm\frac{1}{2}\tau|j'm'\right)\left(\tau=\pm\frac{1}{2}\right)$ 为 $SL_{q,s}(2)$ 的 Wigner 系数. (16a) 和 (16b) 式可以认作类 Wigner-Eckart 定理. (16a) 和 (16b) 式中的 $f(q,s)$, $g(q,s)$ 分别是与 q,s 有关的系数. 对于算符 $V'_\tau\left(\tau=\pm\frac{1}{2}\right)$ 也会有类似的结果. 因此可认为 T'_τ,V'_τ 是 $SL_{q,s}(2)$ 的 1/2 阶类张量算符.

注意到 $T'_\tau,V'_\tau\left(\tau=\pm\frac{1}{2}\right)$ 的表达式 ((9c) 和 (9d)), 由 (1c) 和(7)式,不难得到

$$T'_{1/2}V'_{-1/2}+s^2V'_{-1/2}T'_{1/2} = -\left[\frac{Q'}{2}-J'_0\right]_{q,s^{-1}}, \tag{17a}$$

$$s^{-2}T'_{-1/2}V'_{1/2}+V'_{1/2}T'_{-1/2} = \left[\frac{Q'}{2}+J'_0\right]_{q,s^{-1}}. \tag{17b}$$

下面利用 (17a) 和 (17b) 式计算 $'\langle\varepsilon+1,j'\|T'\|\varepsilon,j\rangle'$ 和 $'\langle\varepsilon-1,j'\|V'\|\varepsilon,j\rangle'$.由

(17a) 式得

$$
\begin{aligned}
&-{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&\quad\times[j-m+1]_{q,s}/[2j+1]_{q,s}[2j+2]_{q,s} \\
&\quad+{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&\quad\times[j+m]_{q,s}/[2j]_{q,s}[2j+1]_{q,s} \\
&\quad+s^{2}{}'\left\langle \varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\quad\times[j+m+1]_{q,s}/[2j+1]_{q,s}[2j+2]_{q,s} \\
&\quad-s^{2}{}'\left\langle \varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\quad\times[j-m]_{q,s^{-1}}/[2j]_{q,s}[2j+1]_{q,s} \\
&=-\left[\frac{\varepsilon}{2}-m\right]_{q,s^{-1}},
\end{aligned}
\tag{18a}
$$

由 (17b) 式得

$$
\begin{aligned}
&s^{-2}{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&\quad\times[j+m+1]_{q,s}/[2j+1]_{q,s}[2j+2]_{q,s} \\
&\quad-s^{-2}{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&\quad\times[j-m]_{q,s^{-1}}/[2j]_{q,s}[2j+1]_{q,s} \\
&\quad-{}'\left\langle \varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\quad\times[j-m+1]_{q,s^{-1}}/[2j+1]_{q,s}[2j+2]_{q,s} \\
&\quad+{}'\left\langle \varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\quad\times[j+m]_{q,s}/[2j]_{q,s}[2j+1]_{q,s}=\left[\frac{\varepsilon}{2}+m\right]_{q,s^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{18b}
$$

令 (18a) 式中 $m=j+1$，则 (18a) 式可写为

$$
\begin{aligned}
&{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&=-s^{2}{}'\left\langle \varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\quad\times[2j]_{q,s}/[2j+1]_{q,s} \\
&\quad-{}'\left\langle \varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\right\rangle'/[2j+1]_{q,s} \\
&\quad-[2j]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon}{2}-j-1\right]_{q,s^{-1}}.
\end{aligned}
\tag{19a}
$$

令 (18b) 式中 $m=j$，则 (18b) 式可写为

$$
\begin{aligned}
&{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1,\ j+\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle' \\
&\quad = s^2[2j+2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon}{2}+j\right]_{q,s}^{-1} \\
&\qquad + {}'\left\langle \varepsilon+1, j+\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1,\ j+\frac{1}{2}\right\rangle' s^2/[2j+1]_{q,s} \\
&\qquad - {}'\left\langle \varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon, j\right\rangle''\left\langle \varepsilon, j\|V'\|\varepsilon+1, j-\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\qquad \times s^2[2j+2]_{q,s}/[2j+1]_{q,s}. \qquad (19b)
\end{aligned}
$$

另外，由(13)式可得到

$$
\begin{aligned}
&{}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1,\ j+\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon-2, j\right\rangle'[2j]_{q,s}[j+1]_{q,s} \\
&\quad = {}'\left\langle \varepsilon, j\|T'\|\varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\|T'\|\varepsilon-2, j-\frac{1}{2}\right\rangle' \\
&\qquad \times[j]_{q,s}[2j+2]_{q,s}, \qquad (20a) \\
&{}'\left\langle \varepsilon-2, j\|V'\|\varepsilon-1,\ j+\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j+\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle'[2j]_{q,s}[j+1]_{q,s} \\
&\quad = {}'\left\langle \varepsilon-2, j\|V'\|\varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\right\rangle''\left\langle \varepsilon-1, j-\frac{1}{2}\|V'\|\varepsilon, j\right\rangle'[j]_{q,s}[2j+2]_{q,s}. \\
&\qquad (20b)
\end{aligned}
$$

选择基矢 $|\varepsilon jm\rangle'$ 的位相使得约化矩阵元 $'\langle\varepsilon', j'\|V'\|\varepsilon, j\rangle'$ 是正的实数，由 (19a), (19b),(20a) 和 (20b) 式可确定 $'\langle\varepsilon', j'\|T'\|\varepsilon, j\rangle'$的值，这样就可解决 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示.

4 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示

由第 3 节讨论知道，与量子超代数 $SL_q(2/1)$ 相类似，对于固定 (ε_{max}, j_0)，应有五种不同类型的 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示.

1. 只有 (ε_{max}, j_0) 是可能的. 由(19)式知，$\varepsilon_{max}=0$，$j=0$，即表示是一维的 (图 1).

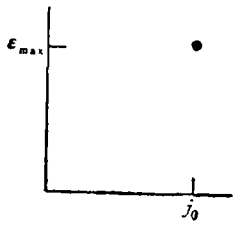

图 1

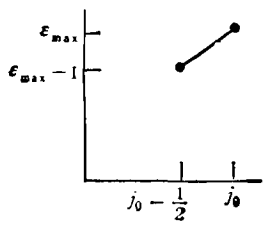

图 2

2. 只有 (ε_{max}, j_0) 和 $\left(\varepsilon_{max}-1, j_0-\frac{1}{2}\right)$ 是可能的. 由 (19a) 式知，$\varepsilon_{max}=-2j_0$

以及

$$\left\langle \varepsilon_{\max}, j_0 \| T' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon_{\max}, j_0 \right\rangle' = -[2j_0]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-1\right]_{q,s^{-1}}, \tag{21}$$

即表示为 $(4j_0+1)$ 维表示 $\left(j_0=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right)$ (图 2).

3. 只有 $(\varepsilon_{\max}, j_0)$ 和 $\left(\varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2}\right)$ 是可能的. 此时 $\varepsilon_{\max}=2(j_0+1)$, 以及

$$\left\langle \varepsilon_{\max}, j_0 \| T' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon_{\max}, j_0 \right\rangle' = s^2[2j_0+2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}+j_0\right]_{q,s^{-1}}, \tag{22}$$

即表示为 $(4j_0+3)$ 维表示 $\left(j_0=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right)$ (图 3).

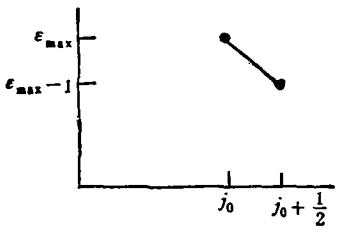

图 3

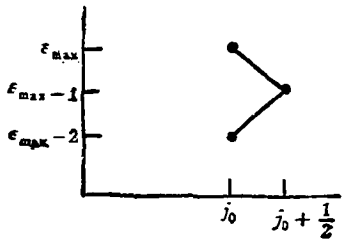

图 4

4. 只有 $(\varepsilon_{\max}, j_0)$, $\left(\varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2}\right)$ 和 $(\varepsilon_{\max}-2, j_0)$ 是可能的. 由 (19a), (19b) 式知, $j_0=0$, $\varepsilon_{\max}=$ 任意值. 此时

$$\left\langle \varepsilon_{\max}, 0 \| T' \| \varepsilon_{\max}-1, \frac{1}{2} \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-1, \frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon_{\max}, 0 \right\rangle' = s^2[2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}\right]_{q,s^{-1}}, \tag{23a}$$

$$\left\langle \varepsilon_{\max}-1, \frac{1}{2} \| T' \| \varepsilon_{\max}-2, 0 \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-2, 0 \| V' \| \varepsilon_{\max}-1, \frac{1}{2} \right\rangle' = [2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}-1\right]_{q,s^{-1}}, \tag{23b}$$

即表示为 4 维表示(图 4).

5. $(\varepsilon_{\max}, j_0)$, $\left(\varepsilon_{\max}-1, j_0\pm\frac{1}{2}\right)$ 和 $(\varepsilon_{\max}-2, j_0)$ 均可能. 由 (19a), (19b) 式可得

$$\left\langle \varepsilon_{\max}, j_0 \| T' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon_{\max}, j_0 \right\rangle' = s^2[2j_0+2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}+j_0\right]_{q,s^{-1}}, \tag{24a}$$

$$\left\langle \varepsilon_{\max}, j_0 \| T' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon_{\max}, j_0 \right\rangle' = -[2j_0]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-1\right]_{q,s^{-1}}, \tag{24b}$$

$$\left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \| T' \| \varepsilon_{\max}-2, j_0 \right\rangle' \left\langle \varepsilon_{\max}-2, j_0 \| V' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0+\frac{1}{2} \right\rangle' = -[2j_0+2]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-1\right]_{q,s^{-1}}, \tag{24c}$$

$$\left\langle \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \| T' \| \varepsilon_{\max}-2, j_0 \right\rangle' \times \left\langle \varepsilon_{\max}-2, j_0 \| V' \| \varepsilon_{\max}-1, j_0-\frac{1}{2} \right\rangle' = s^2[2j_0]_{q,s}\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}+j_0\right]_{q,s^{-1}}, \tag{24d}$$

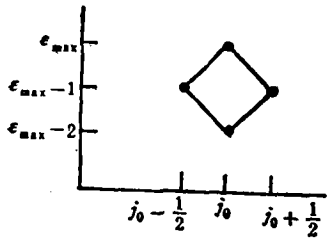

图 5

即表示为 $(8j_0+4)$ 维表示 $\left(j_0=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right)$ (图 5).

由(21)—(24)式可知,约化矩阵元 $\left\langle \varepsilon, j \| T' \| \varepsilon-1, j\pm\frac{1}{2} \right\rangle'$ 的值 (位相) 由下式决定:

$$\left\langle \varepsilon, j \| T' \| \varepsilon-1, j\pm\frac{1}{2} \right\rangle' = \begin{cases} \left\langle \varepsilon-1, j\pm\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon, j \right\rangle' & \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{2}+j_0>0 \text{ 或 } \frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-1<0\right) \\ -\left\langle \varepsilon-1, j\pm\frac{1}{2} \| V' \| \varepsilon, j \right\rangle' & \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{2}+j_0<0 \text{ 或 } \frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-1>0\right). \end{cases} \tag{25}$$

5 讨 论

本文给出双参数变形量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$ 的不可约表示. 特别地,当 $S\to 1$ 时,本文将回到文献[5]的结果. 限于篇幅,本文未能给出量子 Lie 超代数 $SL_{q,s}(2/1)$ 的 Wigner 系数. 这方面的工作将另文讨论.

感谢同济大学于祖荣教授就文献[5]中的有关问题给予的帮助. 感谢山东大学侯云智教授有益的讨论.

[1] N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.*, **123**(1989),177.
[2] 井思聪，中国科学技术大学学报，**23**(1993),55.
[3] A. Schrirrmacher, J. Wess and B. Zumine, *Z. Phys.*, **C49**(1991), 317.
[4] 于肇贤等，高能物理与核物理，**19**(1995),256.
[5] 于祖荣，高能物理与核物理，**16**(1992),1035.

IRREDUCIBLE REPRESENTATION OF THE DOUBLE-PARAMETER DEFORMED QUANTUM LIE SUPERALGEBRA $SL_{q,s}(2/1)$

ZHANG DE-XING
(Department of Fundamental Courses, Daqing Institute of Petroleum, Anda 151400)

YU ZHAO-XIAN
(Shengli Oilfield Workers University, Dongying 257004)

YU KE
(Department of Fundamental Courses, Daqing Institute of Petroleum, Anda 151400)

(Received 17 April 1994)

ABSTRACT

The irreducible representations of the double-parameter deformed quantum Lie superalgebra $SL_{q,s}(2/1)$ are given.

PACC: 0365;0210;0220