

在矩形样品中 Rymaszewski 公式的 适用条件的分析*

孙以材

(河北工业大学电子工程系, 天津 300130)

石俊生

(云南师范大学物理系, 昆明 650092)

(1994年6月21日收到)

用有限元法计算了用 Rymaszewski 公式测量矩形样品薄层电阻时的理论误差与探针距及其游移度、探针离开边界距离的关系; 找出了实际测量时理论误差小于 3% 可放置直线四探针的中央区宽度, 并给予实验验证. 同时对利用无限系列镜像理论证明得出小矩形样品的薄层电阻测量不受样品边界和探针游移的影响的新方案提出了异议.

PACC: 0750; 0270; 0660

1 引言

Rymaszewski^[1]曾提出用四探针技术测量半导体薄层电阻时可消除因探针不等距产生误差的方法. 如图 1 所示, 设四个不等距探针排成一线, 位于无限大均匀导电薄层上, 两次测量满足下列方程:

$$\exp\left(-\frac{2\pi R_1}{R_s}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi R_2}{R_s}\right) = 1, \quad (1)$$

其中 R_s 为样品的薄层电阻, $R_1 = V_1/I_1$, $R_2 = V_2/I_2$, V_1 , V_2 为两次测量中 C, D 和 B, C 探针间的电压.

(1)式表明, 薄层电阻 R_s 只依赖于 R_1 和 R_2 , 与针距无关. 根据(1)式可以导出计算薄层电阻 R_s 的公式^[1]

$$R_s = \frac{\pi}{\ln 2} (R_1 + R_2) f(R_1/R_2), \quad (2)$$

当 $I_1 = I_2 = I$ 时,

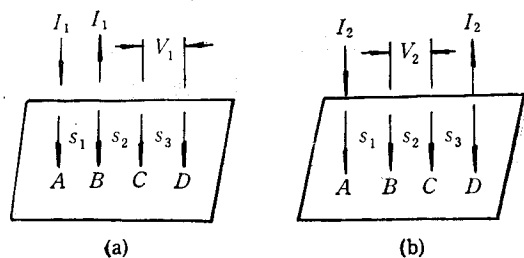


图1 不等距四探针的 Rymaszewski 方法 (a) A, B 为通电流探针, C, D 为测电压探针; (b) A, D 为通电流探针, B, C 为测电压探针

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$R_s = \frac{\pi}{\ln 2} \left(\frac{V_1 + V_2}{I} \right) f(V_1/V_2), \quad (3)$$

其中 $f(V_1/V_2)$ 为 Van der Pauw 函数^[1,3].

对于等距四探针而言, 用 Rymaszewski 法时两次测得的电压 V_1 与 V_2 之间的关系为^[4]

$$V_1/V_2 = 4.532/21.84 = 0.208,$$

且

$$f(V_1/V_2) = 0.828,$$

V_1 和 V_2 相差不超过一个数量级. 在实际大样品的薄层电阻测量时, 选取合适的电流值, 便可保证 V_1 和 V_2 都能测准.

文献[2]中提出, (3)式无论对无穷大薄层还是有限尺寸样品, 都不必要求探针之间的距离相等, 测量结果与探针间距及其游移无关, 消除了针距不等引起的误差; 同时这种方法对矩形或圆形小样品不需要另加边界修正, 只从两次测量即可得出薄层电阻. 我们在实际矩形样品测量中使用过此公式, 但发现测量结果与探针针距及游移和探针离开边界距离有着明显的关系. 下面利用有限元方法就 (3) 式在矩形样品中的适用条件进行计算分析, 同时也给予实验证实.

2 基本原理

用 Rymaszewski 公式测定样品的方块电阻时, 电流从探针 A 流入, 流经样品平面后从另一探针 B 流出, 如图 2 所示. 围绕探针 A 在样品面上作一任意封闭面, 由欧姆定律则有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = I/\sigma,$$

其中 $\mathbf{E}$ 为电场强度, $d\mathbf{S}$ 为面元矢量, σ 为样品材料的电导率, I 为由 A 点注入并流经样品的电流强度. 由奥-高定理可知, 在探针 A 处有正电荷^[5]

$$q_A = I/4\pi\sigma. \quad (4)$$

同样在探针 B 处应有负电荷

$$q_B = -I/4\pi\sigma. \quad (5)$$

这样可把电流场问题转化成静电场问题进行处理, 电流场中电势分布即为静电场中的电势分布. 整个区域的边值问题为求解泊松方程,

$$\Delta u = -4\pi\rho_e, \quad (6)$$

令

$$f = 4\pi\rho_e, \text{ 则 } \Delta u = f, \quad (7)$$

边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界的单位法向矢量; ρ_e 为电荷的面密度.

在本文所用有限元方法中, 将求解区域剖分成三角形单元. 为了计算方便, 假设电荷 q_A, q_B 均匀分布在探针节点周围的六个三角形单元中, 设 S 为这些三角形单元面积的总

和,如图 2 所示,则

$$\rho_e = \begin{cases} q_A/S & (\text{探针 } A \text{ 周围的各单元}); \\ q_B/S & (\text{探针 } B \text{ 周围的各单元}); \\ 0 & (\text{其余各单元}). \end{cases}$$

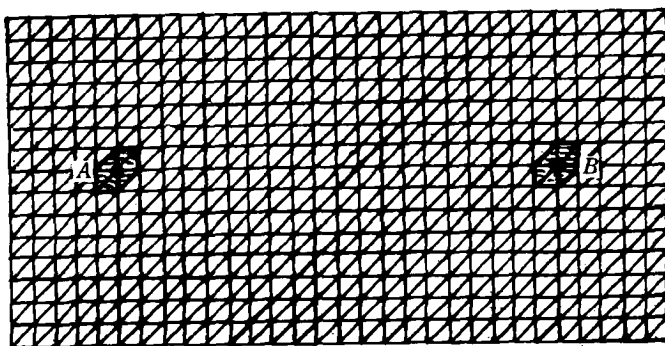


图 2 样品面的剖分及电荷在电流流入探针 A 及流出探针 B 附近相关三角形单元中的分布(阴影区)

有限元方法中利用变分原理将上面边值问题转化成泛函 $I(u)$ 极值问题^[4],

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u)^2 d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega = \min, \quad (8)$$

其中边界条件 $\partial u / \partial n = 0$ 自然满足.

区域剖分后可得 n 个节点,其中任一点的电势 u 近似用节点电势值 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 展开

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

其中 N_i 叫基函数,只与剖分单元形状有关.

求泛函极小值 $\delta I(u) = 0$,

$$\text{即} \quad \partial I / \partial u = 0, \quad (10)$$

将(9)式代入(8)式泛函,并令泛函 $I(u)$ 对每一变量 u_i 的偏导数为零,则有

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} u_j = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

其中

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \nabla N_j d\Omega, \quad F_i = \int_{\Omega} f N_i d\Omega.$$

这是一 n 阶线性方程组,可写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

这样把关于电势 u 的微分方程变成关于节点电势 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 线性方程组。

从自动剖分, 求解线性方程组到画电流场等势线均使用自己编制的《计算二维电流场电势分布软件包》。当两个通电流探针分别置于某两个节点上, 求得全部节点的电势 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 之后, 这样即可得到所设两个电压探针节点间的电势差 V 。为了方便起见, 将电势差以 $\ln 2 \cdot IR_s^0 \pi^{-1}$ 为单位的 U 输出, 其中 R_s^0 为设置的样品的薄层电阻。

令 $V = \ln 2 \cdot IR_s^0 \pi^{-1} U$, 代入(3)式中得

$$R_s = (U_1 + U_2)f(U_1/U_2)R_s^0 = KR_s^0, \quad (13)$$

$$K = (U_1 + U_2)f(U_1/U_2), \quad (14)$$

其中 R_s 为按(3)式用 Rymaszewski 公式计算得到的薄层电阻。

对于有限尺寸样品, 只要证明在某种条件下 K 等于 1 或接近于 1, Rymaszewski 测量方法就可以在此条件下使用, 否则便不适用。本文就矩形样品条件下, 改变探针离开样品边界的距离及针距, 使用有限元方法计算出 Rymaszewski 方法两次测量所得电势差 U_1 及 U_2 , 再用(14)式计算出 K 值, 即可找出适用 Rymaszewski 方法的区域及条件。

3 计算结果

对长宽比为 2 倍的长方形样品进行计算, 且将其长宽分别等分成 30 个和 15 个单位。因而本有限元程序将此长方形剖分成 31×16 个节点, 900 个三角形单元, 如图 2 所示。

3.1 四根探针位于样品纵向长度边缘上的电势分布

图 3 示出这种情况下的电势分布。等势线与相应边界垂直。相对于零势线, 两边电势符号相反。同时图 3 中也给出了探针等距时使用 Rymaszewski 公式两次计算的 U_1 和 U_2 值。将它们代入(14)式, 求得 $K = 2.038$ 。这说明 Rymaszewski 公式不成立。Van der Pauw (VDP) 曾证明, 当探针在样品边缘时, 两次测量满足下列方程^[3]:

$$\exp(-\pi V_1/IR_s) + \exp(-\pi V_2/IR_s) = 1,$$

$$R_s = \frac{\pi}{2 \ln 2} \left(\frac{V_1 + V_2}{I} \right) f(V_1/V_2).$$

将 $V = \ln 2 \cdot IR_s^0 \pi^{-1} U$ 代入上式得

$$R_s = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) f(U_1/U_2) R_s^0.$$

将计算得到的 $U_1 = 3.53 \times 10^{-2}$, $U_2 = 0.737$ 代入上式得

$$R_s = 1.019 R_s^0 \approx R_s^0.$$

故用 VDP 公式计算出的薄层电阻此时正好等于所设置的薄层电阻。另外, 也计算了探针不等距各种情况, 使用 Rymaszewski 公式计算的结果 K 值均在 2.038—2.059 之间, Rymaszewski 公式不成立, 恰好满足 VDP 方程。表明我们的计算结果与 VDP 理论一致。这说明四根探针在样品边缘情况下 VDP 理论的正确性。而且也与实验结果 (见下文表 2) 一致, 说明有限元计算的正确性。

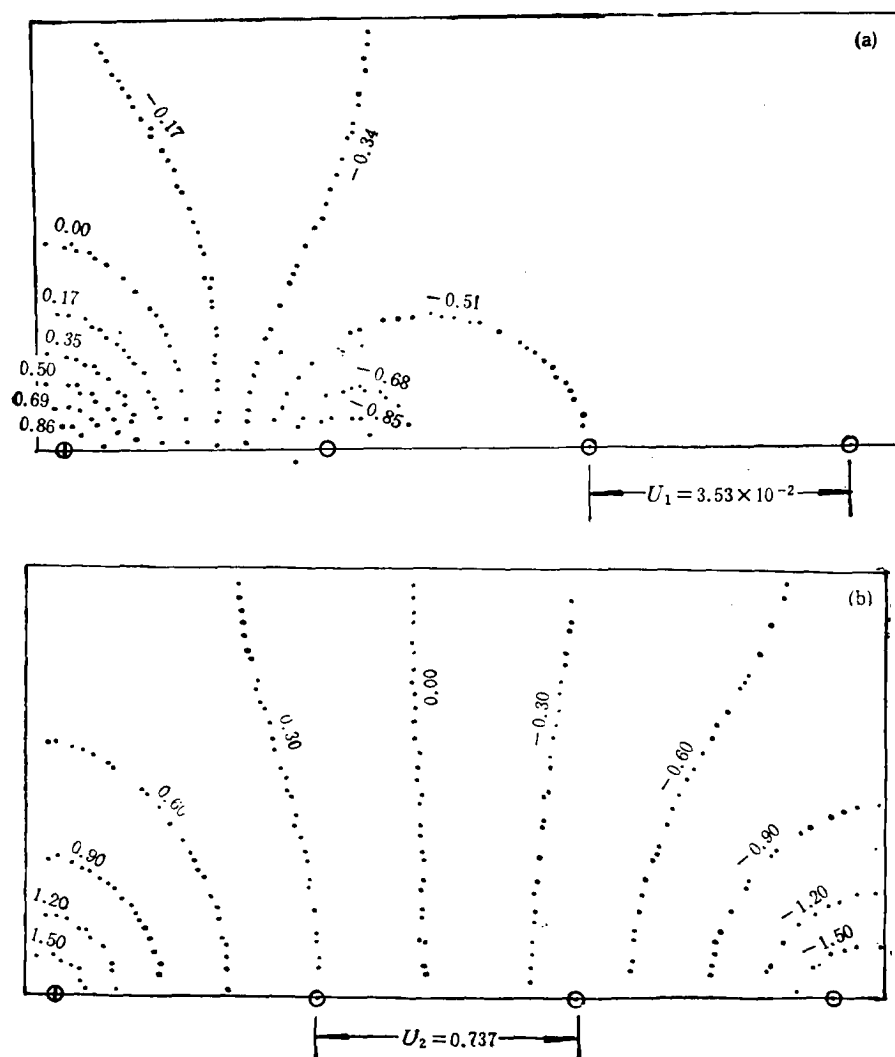


图3 电流注入点 $\oplus$, $\ominus$ 在样品边缘上的电势分布 (a) 为第一次测量时的情况, 相应电压探针间的电压 $U_1 = 3.53 \times 10^{-2}$; (b) 为第二次测量时的情况, 相应 $U_2 = 0.737$

3.2 四根探针在中心线上的电势分布

图4示出这种情况下的电势分布。等势线与相应边界垂直。相对于零势线, 两边电势符号相反。图4中也给出了探针等距时使用 Rymaszewski 公式两次计算得到的 U_1 和 U_2 值。两者相差约三个数量级。将它们代入(14)式, 求得 $K = 1.009$ 。同时也对不同间距的等距探针情况作了计算。使用 Rymaszewski 公式计算的结果, K 在 1—1.009 之间, 说明 Rymaszewski 公式成立。另外, 也对长宽比为 5 倍的长方形作了计算。在针距与长方形宽之比小于 1 的条件下, K 值在 1—1.030 之间。我们认为 Rymaszewski 公式在此

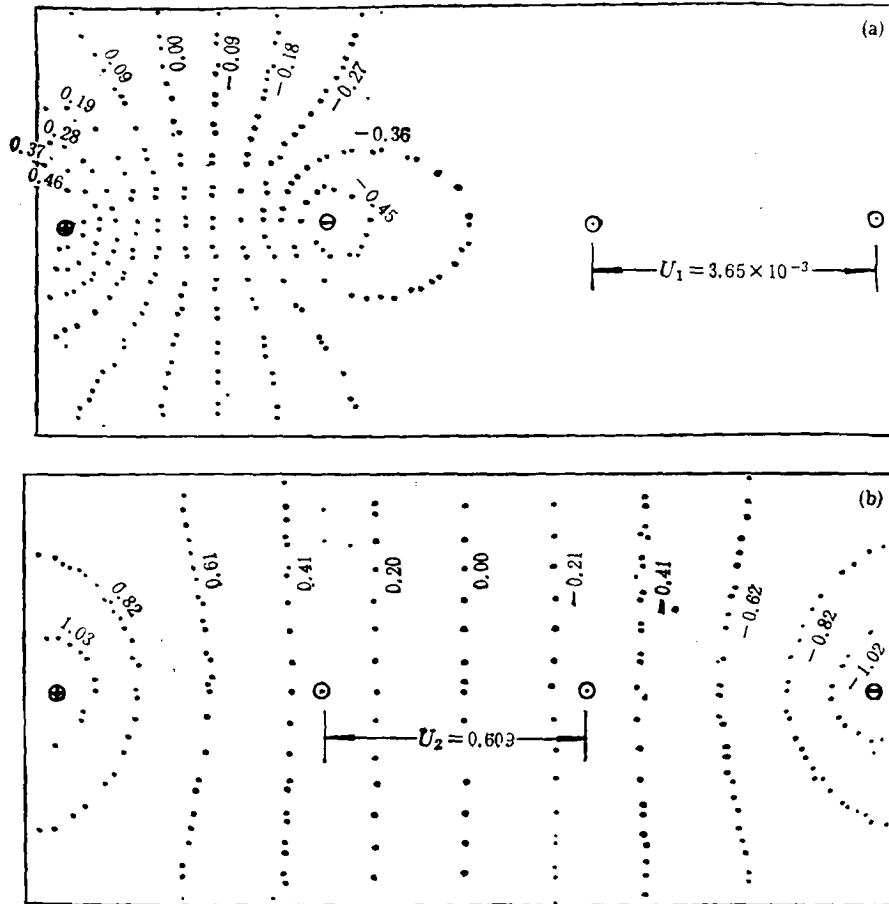


图4 电流注入点 $\oplus$ 和 $\ominus$ 在样品中心线上的电势分布 (a) 为第一次测量时的情况, 相应电压探针间的电压 $U_1 = 3.65 \times 10^{-3}$; (b) 为第二次测量时的情况, 相应 $U_2 = 0.609$

条件下成立.

3.3 四根探针在样品边缘与中心线之间的区域

设长方形的宽为 D (其长为 $3D$); 探针间距为 s ; 探针排离开平行边界的距离为 L ; 外探针离开垂直边界的最短距离为 L' , 如图5所示.

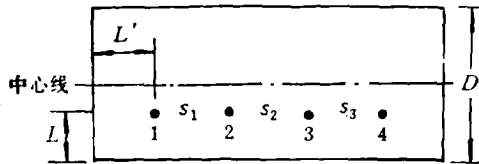


图5 探针的位置排列与样品之间的几何关系

5所示.

(1) 等距探针情况

a. K 与 L 和 s 之间的关系 计算时将最外探针离开垂直边界最短距离固定为3个单位, 即 $L' = 3$. 改变探针间距 s 和探针离开平行边界的距离 L , 计算出相应的 K 值. 计算和实验结果分别如表1和表2所示. 表1中折线下面部分即是计算得到的测量误差大致等于或小于3%的几何条件. 可以看出, 计算结果与实验结果基本一致. 图

6 给出了 K 值与 L 和 s 的关系曲线。

表 1 K 的计算值与针距 s 和探针离开平行边界距离 L 之间的关系

$L/D \backslash s/D$	3/15	4/15	5/15	6/15	7/15	8/15	9/15
0	2.059	2.050	2.043	2.041	2.040	2.039	2.038
1/15	1.715	1.820	1.877	1.910	1.931	1.944	1.951
2/15	1.360	1.511	1.621	1.699	1.754	1.791	1.815
3/15	1.160	1.275	1.382	1.472	1.543	1.597	1.632
4/15	1.069	1.134	1.207	1.281	1.346	1.400	1.439
5/15	1.031	1.060	1.098	1.142	1.186	1.227	1.258
6/15	1.015	1.024	1.038	1.054	1.074	1.093	1.110
7/15	1.009	1.010	1.011	1.013	1.016	1.018	1.021

表 1 中粗折线为测量误差大致为 3% 的分界线。

表 2 K 的实验值与针距 s 和探针离开平行边界距离 L 之间的关系

$L/D \backslash s/D$	3/15	4/15	5/15	6/15	7/15	8/15	9/15
0	2.123			2.036			2.051
1/15	1.798			1.935			2.045
3/15	1.188			1.473			1.635
5/15	1.044			1.229			1.281
7/15	1.002			1.041			1.037

b. K 与 L' 之间的关系 计算时探针间距 s 固定为 5 个单位, 探针离开平行边界的距离 L 固定为 6 个单位。改变探针离开垂直边界距离 L' , 计算出相应的 K 值。计算与实验结果如表 3 所示。 K 值约在 1.04 以内。可见, 探针离开垂直边界的距离 L' 对测量的影响不大。

(2) 探针沿探针直线纵向游移的情况

设 s_1 为探针 1, 2 间距, s_2 为探针 2, 3 间距, s_3 为探针 3, 4 间距, 如图 5 所示。计算时将探针离开垂直边界的最短距离固定为 3 个单位。探针离开平行边界的距离分两次讨论, 两次分别固定为 6 和 7 个单位。每次又分两种情况研究探针沿其直线纵向游移对 K

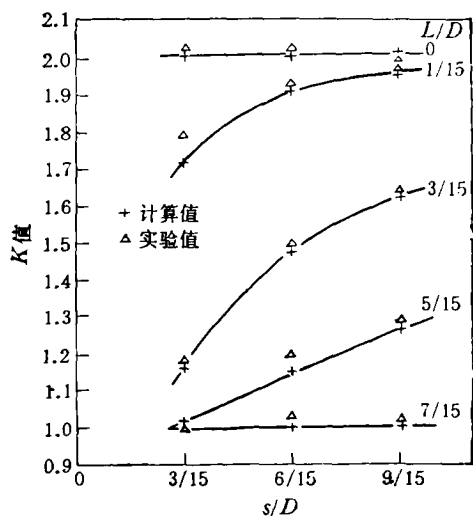


图 6 等距探针情况下, K 与 L 和 s 之间的关系。

值的影响. 一种情况是 s_1, s_2 为 6 个单位, s_3 为 7, 8, 9 个单位. 另一种情况是 s_1, s_3 为 6 个单位, s_2 为 7, 8, 9 个单位. 计算和实验结果示于表 4 中. 其中纵向游移度 $= (|\Delta \bar{s}| / \bar{s}) \times 100\%$, $\bar{s} = (s_1 + s_2 + s_3) / 3$, $|\Delta \bar{s}| = (|\bar{s} - s_1| + |\bar{s} - s_2| + |\bar{s} - s_3|) / 3$.

表 3 计算和实验 K 值与探针离开垂直边界距离 L' 之间的关系

L'/D	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15	6/15	7/15
K							
计算值	1.032	1.035	1.037	1.038	1.039	1.040	1.040
实验值	1.027	1.014	1.014	1.026	1.034	1.036	1.042

表 4 K 的计算值和实验值与探针纵向游移度的关系

两种情况	针 距 $s_1 \quad s_2 \quad s_3$	纵向游移度/ %	K 值		
				$L/D = 6/15$	$L/D = 7/15$
情况一	6 6 6	0	计算值	1.053	1.018
			实验值	1.027	1.016
	6 6 7	7	计算值	1.058	1.017
			实验值	1.034	1.022
	6 6 8	13.3	计算值	1.059	1.016
			实验值	1.027	1.020
情况二	6 6 9	19	计算值	1.060	1.016
			实验值	1.044	1.023
	6 7 6	7	计算值	1.066	1.023
			实验值	1.030	1.027
	6 8 6	13.3	计算值	1.078	1.025
			实验值	1.059	1.034
	6 9 6	19	计算值	1.091	1.027
			实验值	1.093	1.039

表 5 计算和实验的 K 值与探针横向游移度的关系

2, 4 探针横向游移量		无移动	移动半个单位	移动 1 个单位	移动 2 个单位
横向游移度		0	5%	10%	20%
K 值	计算值	1.031	*	0.953	0.427
	实验值	1.034	0.995	0.914	0.633

* 有限元程序不能计算.

(3) 探针沿其直线作横向游移情况

让 $L' = 3, s = 5, L = 6$ 个单位, 2, 4 探针横向向内移动半个、1 个及 2 个单位, 然后

进行有限元法的相应计算。表 5 中示出所得到的 K 值与横向游移度的关系。由表 5 可见, 计算结果与实验结果基本一致。其中横向游移度 $= (\Delta \bar{y}/s) \times 100\%$, $\Delta \bar{y} = (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4)/4$, $\Delta y_i (i = 1-4)$ 是探针 i 离开探针直线的垂直距离。

4 实验结果

从上面结果看出, 实验结果与有限元理论计算结果一致。由此得出, 使用 Rymaszewski 公式测量矩形样品薄层电阻的方法受到针距及其游移度、探针离开边界距离的明显影响。从表 3 看出, 探针离开垂直边界的距离对测量结果影响较小, 可以忽略其影响。探针间距大小对测量的影响在实际测量中要与探针离开平行边界的距离一起考虑。针距越大又探针越靠近边界, 则用 Rymaszewski 公式时测量误差越大。理论误差保证在 3% 范围内(表 1 折线左下方)的允许放置探针区域的大小随针距而变。针距越大, 要求探针越靠近中心线, 则允许放置探针的区域越小, 如图 7 所示。图 7 中示出 W/D 随 s/D 增加而减小。这里的 W 是保证理论误差小于 3% 的允许放置探针的区域宽度。这一宽度是指样品中心线两侧的对称区间的总宽度。这是用 Rymaszewski 法测量薄层电阻时应满足的几何条件。由表 4, 5 看出, 探针的纵向和横向游移对测量都有影响, 且横向游移的影响更大些。游移度越大, 则误差越大。以上可见, 有限元理论计算结果与文献[2]中用无限系列镜像理论所得出的结论不一致。

使用 Rymaszewski 公式测量小矩形样品的薄层电阻, 虽然在探针位于样品中心线附近时可以成立。但是当探针间距相对比较大时, 由于 V_1 值很小(如图 4 中 V_1 与 V_2 相差三个数量级), 不易测准, 因而测量误差很大, 算出的 VDP 函数 $f(V_1/V_2)$ 的值误差也很大。只有在样品比较大而探针间距比较小时才使 V_1/V_2 比值增大, 测量才能做到精确。当直线四探针位于纵向边界时, Rymaszewski 公式根本不成立, 而 VDP 公式成立。因此应使用 VDP 公式来计算样品的薄层电阻, 而且 VDP 法比探针在样品中心时用 Rymaszewski 法精度高。这是因为前者的 V_1 值要比同样条件当探针位于样品中心线时大, 因而更易测准。

综上所述, 对矩形样品而言, 当四探针位于样品的中央时, Rymaszewski 公式成立。但随着探针排向边缘靠近, 超过图 7 所示的宽度 W (与针距有关) 时, Rymaszewski 方法便出现较大误差。当

探针接近边缘时, Rymaszewski 公式不成立, 并转变为 VDP 公式, 此时应用 VDP 方法测量其薄层电阻。用 Rymaszewski 方法时希望探针间距尽可能小, 而用 VDP 方法时希望探针间距大些。

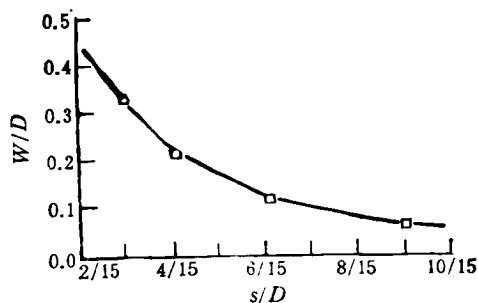


图 7 理论误差保证在 3% 之内的允许放置探针区宽度 W 与针距 s 之间的关系曲线

- [2] 宿昌厚, 物理学报, **28**(1979), 759.
- [3] L. J. Van der Pauw, *Philips Research Reports*, **13**(1958), 1.
- [4] 孙以材, 半导体测试技术(北京: 冶金工业出版社, 1984), 第 19 页.
- [5] 北京大学物理系, 电动力学(北京: 人民教育出版社, 1961), 第 92 页.
- [6] 樊明武、颜威利, 电磁场积分方程法(北京: 机械工业出版社, 1988).

A STUDY OF THE VALID CONDITIONS FOR APPLYING RYMASZEWSKI FORMULAS TO RECTANGULAR SAMPLES

SUN YI-CAI

(Department of Electronic Engineering, Hebei Technical University, Tianjin 300130)

SHI JUN-SHENG

(Department of Physics, Yunnan Normal University, Kunming 650092)

(Received 21 June 1994)

ABSTRACT

The theoretical errors of the sheet resistance measurements by using Rymaszewski method related to the probe spacings, their wanderings and the distances to the parallel edges of rectangular samples are obtained by using finite element method calculations. The width of the central area suitable for the practical measurements to set the four-point probe within a theoretical error less than 3% has been determined and confirmed with experiments.

This would be useful for the sheet resistance measurements of rectangular miniature samples. Meanwhile, we hold a view contrary the so called new method, which states that the boundary effect and probe wanderings have not any influence upon sheet resistance measurements by using Rymaszewski's formulas.

PACC: 0750; 0270; 0660