第 45 卷 第 3 期 1996 年 3 月
1000-3290/96/45(03)/0353-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 45, No. 3, March, 1996
©1996 Chin. Phys. Soc.

不确定关系的经典类比

黄湘友
(北京大学物理系,北京 100871)
(1994 年 12 月 19 日收到)

与量子力学不确定关系相类似的关系在经典力学中也存在.利用这关系计算了几个具体实例.从计算中可看出一个波函数经典极限下只能描述系综.

PACC: 0365; 0320; 0520

1 引 言

不确定关系的真正物理阐述是量子力学中一个相当深奥的问题.这问题与量子力学的解释有密切关系.它常与统计、测量、观测者及互补原理纠缠在一起[1—4].笔者认为从经典力学的角度来研究不确定关系较为有利.经典力学不存在解释问题,我们可摆脱上述问题的缠绕而看出不确定关系的物理实质.

经典力学中一个粒子的运动或状态由牛顿方程的解和初值决定.如果初值能完全给定,我们得到完全描述.如果初值以概率给出,我们得到统计描述.在后一种情况下我们的描述对象为一个系综或者说统计地描述一个粒子.对一个经典统计系综,可以建立一个与量子力学不确定关系相类似的关系.这关系有助于我们分析大量子数条件下波函数的统计性根源.由所计算的几个实例可看出,大量子数经典极限下一个波函数只能描述系综.

量子力学经典极限方法用得较多的是小普朗克常数 $\hbar\to 0$ 极限和大量子数 $n\to\infty$ 极限.这两种极限一般地不互相等价[5].值得指出,我们不能仅令 $\hbar\to 0$ 作为极限手续.因为 $\hbar$ 是物理常数,仅当含 $\hbar$ 的项与其它项相比可忽略地小时,才可对该项使用 $\hbar\to 0$[6,7].在某些文献中,调整单位制而使普朗克常数为 1.这种情况下 $\hbar\to 0$ 没法使用但 $n\to\infty$ 的使用不受影响.近年来还出现几种综合极限方法.Peter Rowe[8]令 $n\to\infty$, $\hbar\to 0$ 但固定 $n\hbar$ 为实际测得的普朗克常数.Hassoun 和 Kobe[9]令 $n\to\infty$, $\hbar\to 0$ 但固定 $n\hbar$ 为适当的经典作用量.笔者曾令 $n\to\infty$, $\hbar\to 0$ 但固定 $E(n,\hbar)$ 为被测粒子的实际能量值[7].在所有这些极限方法中,以大量子数方法最为合理和可靠.因为量子数本身是可变参数,大量子数的使用不会对被研究的力学量值和波函数造成任何损害.本文使用大能量 $\langle E\rangle\to\infty$ 极限来进行量子结果与经典结果的比较.这极限等价于大量子数极限.

2 经典不确定关系

不失一般性考察一个经典粒子在束缚势场 $V(x)$ 中的运动.令 $x(E,t)$ 为牛顿方程

满足初始条件 $x(E,0)=x_1$ 的特解，x_1 为粒子在势场中的左返折点. 则这粒子运动的通解 可写为 $x(E,t-t')$. 能量 E 及 t' 或 $x_0=x(E,-t')$ 可看作初值. 任一时刻 t 力学量 $f(x,p)$ 的值为

$$f(t)=f(x(E,t-t'),p(E,t-t')), \tag{1}$$

$p(E,t-t')=m\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 为粒子动量.

设初值有一概率分布 $\rho(E,t')\geqslant 0$ 且 $\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\rho(E,t')=1$，则力学量 f 的平均值为

$$\bar{f}=\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\rho(E,t')f(x(E,t-t'),p(E,t-t')). \tag{2}$$

仅当 $\rho(E,t')=\delta(E-E_0)\delta(t'-t_0)$ 时，由(2)式表示的描述为完全描述. 一般地(2)式给出统计描述.

令 $f=x$，则由(1)和(2)式得

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=\bar{p}. \tag{3}$$

在(2)式中令 $f=p$，则由牛顿方程得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}t}=-\overline{\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}}. \tag{4}$$

(3)和(4)式可称为经典力学中的 Ehrenfest 定理.

令 $A=x(E,t-t')-\bar{x}$，$B=p(E,t-t')-\bar{p}$，设 ξ 为实参数，由(2)式知力学量 $(A\xi+B)^2$ 的平均值恒为正，

$$\overline{(A\xi+B)^2}=\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\rho(E,t')(A\xi+B)^2\geqslant 0, \tag{5}$$

$$\overline{A^2}\xi^2+2\overline{AB}\xi+\overline{B^2}\geqslant 0. \tag{6}$$

(6)式成立的条件为

$$\overline{A^2}\,\overline{B^2}\geqslant(\overline{AB})^2$$

或

$$\overline{(x-\bar{x})^2}\,\overline{(p-\bar{p})^2}\geqslant[\overline{(x-\bar{x})(p-\bar{p})}]^2. \tag{7}$$

(7)式可称为经典力学系综中的不确定关系.

3 实 例

给定一个波函数，我们想寻求初值概率密度使由(2)式算得的 $\overline{(x-\bar{x})^2}$ 和 $\overline{(p-\bar{p})^2}$ 与经典极限下由波函数算得的相应量一致. 本文仅就几个实例列出它们的概率密度 $\rho(E,t')$.

3.1 无穷深势阱中的定态

设有一经典粒子处在 $[-a,a]$ 间的无穷深势阱中，这粒子运动的通解为

$$x(E,t-t')=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2E}{m}}(t-t')-a, & t'\leqslant t\leqslant t'+T/2;\\ -\sqrt{\dfrac{2E}{m}}(t-t')+3a, & t'+T/2\leqslant t\leqslant t'+T,\end{cases} \tag{8}$$

式中 E 为能量，$T = 4a\sqrt{m/2E}$ 为运动周期，$t = t'$ 为粒子到达左返折点 $x_1 = -a$ 的时刻.

考虑这力学体系的一个系综,这系综中每一成员都有相同的能量 E_n 但粒子到达左返折点的时刻完全无规.这系综的初值概率密度为

$$\rho(E,t') = \frac{1}{T}\delta(E - E_n) \qquad 0 \leqslant t' \leqslant T. \tag{9}$$

由(2)和(9)式算得

$$\bar{x} = 0, \qquad \overline{x^2} = a^2/3; \tag{10}$$

$$\bar{p} = 0, \qquad \overline{p^2} = 2mE_n; \tag{11}$$

$$\overline{(x - \bar{x})^2}\,\overline{(p - \bar{p})^2} = \frac{2}{3}ma^2E_n. \tag{12}$$

另一方面这体系的量子力学定态波函数为 $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi}{2a}(x + a)$，能量本征值为 $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/8ma^2$，量子力学中的平均值为

$$< x > = 0, \qquad < x^2 > = a^2/3 - 2a^2/n^2\pi^2; \tag{13}$$

$$< p > = 0, \qquad < p^2 > = 2mE_n; \tag{14}$$

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{2}{3}ma^2E_n(1 - 6/n^2\pi^2). \tag{15}$$

当 E_n 大时经典系综的(10)—(12)式与量子力学的(13)—(15)式一致.

3.2 简谐振子定态

经典简谐振子的通解为 $x(E,t-t') = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\omega(t-t') = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos(\omega t - \theta')$，$p(E,\theta',t) = \sqrt{2mE}\sin(\omega t - \theta')$，$\theta' = \omega t'$ 为初位相.这时(2)式可写为

$$\bar{f} = \int_0^\infty \mathrm{d}E\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta'\rho(E,\theta')f(x(E,\theta',t),p(E,\theta',t)). \tag{16}$$

考察 $\rho(E,\theta') = \frac{1}{2\pi}\delta(E - E_n)$ 的系综,由(16)式得

$$\bar{x} = 0, \qquad \overline{x^2} = E_n/m\omega^2; \tag{17}$$

$$\bar{p} = 0, \qquad \overline{p^2} = mE_n; \tag{18}$$

$$\overline{(x - \bar{x})^2}\,\overline{(p - \bar{p})^2} = E_n^2/\omega^2. \tag{19}$$

另一方面由量子力学定态波函数及平均值公式算得的结果与(17)—(19)式一致.可见谐振子定态波函数 $\psi_n(x)$ 描述一系综,系综成员有相同能量 E_n 但初位相无规分布.

3.3 谐振子位相本征态

简谐振子位相本征态为[10,11]

$$|\psi_{\theta_0}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_0 - \mathrm{i}(n+1/2)\omega t}\,|n\rangle, \tag{20}$$

s 为一很大的正整数.在这态中有

$$< E > = \frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}(n + 1/2)\hbar\omega = \frac{s+1}{2}\hbar\omega; \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
<x> &= \frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}\sum_{n'=0}^{s}\langle n'|x|n\rangle e^{i(n'-n)(\omega t-\theta_0)} \\
&= \frac{1}{2(s+1)}\Big[\sum_{n=0}^{s-1}\langle n+1|x|n\rangle e^{i(\omega t-\theta_0)} + \sum_{n=1}^{s}\langle n-1|x|n\rangle e^{-i(\omega t-\theta_0)} \\
&\quad + \sum_{n'=0}^{s-1}\langle n'|x|n'+1\rangle e^{-i(\omega t-\theta_0)} + \sum_{n'=1}^{s}\langle n'|x|n'-1\rangle e^{i(\omega t-\theta_0)}\Big] \\
&= \frac{1}{s+1}\frac{1}{\omega}\cos(\omega t-\theta_0)\sum_{n=1}^{s}\sqrt{\frac{2n\hbar\omega}{m}} \approx \frac{1}{\omega(s+1)}\cos(\omega t-\theta_0)\int_1^s dn\sqrt{\frac{2n\hbar\omega}{m}} \\
&= \frac{2}{3\omega}\sqrt{\frac{2s\hbar\omega}{m}}\cos(\omega t-\theta_0) = \frac{4}{3\omega}\sqrt{\frac{<E>}{m}}\cos(\omega t-\theta_0). \qquad (22)
\end{aligned}
$$

类似地可算出

$$<x^2> = \frac{2<E>}{m\omega^2}\cos^2(\omega t-\theta_0); \qquad (23)$$

$$<p> = m\,d<x>/dt = -\frac{4}{3}\sqrt{m<E>}\sin(\omega t-\theta_0); \qquad (24)$$

$$<p^2> = 2m<E>\sin^2(\omega t-\theta_0); \qquad (25)$$

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{4}{81}\frac{<E>^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t-\theta_0)\cos^2(\omega t-\theta_0). \qquad (26)$$

另一方面考察经典简谐振子系综,系综中粒子都有相同的初位相 $\theta_0+\pi$,但能量等概率地分布在不同的 E_n 上.令 $\rho(E,\theta') = \delta(\theta'-\theta_0-\pi)\frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}\delta(E-E_n)$,$s$ 大即$<E>$大时由(16)式算得的结果与(21)—(26)式一致.由于系综中粒子的位相一致,不同能量的粒子同时通过坐标原点,这时$(\Delta x)=0$.不同能量的粒子也同时到达左、右返折点,这时有 $\Delta p=0$.

3.4 简谐振子相干态

考虑一经典简谐振子系综,其初值概率密度为

$$\rho(E,\theta') = \frac{1}{\pi\hbar\omega}\exp\Big[-\frac{2}{\hbar\omega}(\sqrt{E}-\sqrt{\bar{E}})^2 - \frac{4}{\hbar\omega}\sqrt{E\bar{E}}(1-\cos(\theta'-\theta_0))\Big], \qquad (27)$$

式中 $\bar{E},\theta_0$ 为已知参数.作变数和参数代换

$$x' = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\bar{E}}{m}}\cos\theta', \qquad p' = \sqrt{2m\bar{E}}\sin\theta', \qquad (28)$$

$$x_c = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\bar{E}}{m}}\cos\theta_0, \qquad p_c = \sqrt{2m\bar{E}}\sin\theta_0. \qquad (29)$$

由(27)式可得

$$\rho(E,\theta')dEd\theta' = \frac{1}{\pi\hbar}\exp\Big[-\frac{(p'-p_c)^2}{m\hbar\omega} - \frac{m\omega}{\hbar}(x'-x_c)^2\Big]dx'dp'. \qquad (30)$$

现在 x_c 和 p_c 为已知参数.粒子的通解记为

$$x(E,\theta',t) = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos(\omega t-\theta') = x'\cos\omega t - \frac{p'}{\omega m}\sin\omega t = x(x',p',t), \qquad (31)$$

$$p(E,\theta',t)=\sqrt{2mE}\sin(\omega t-\theta')=-\omega mx'\sin\omega t-p'\cos\omega t=p(x',p',t). \tag{32}$$

方程(16)化为

$$\bar{f}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\,\frac{1}{\pi\hbar}\exp\left[-\frac{(p'-p_c)^2}{m\hbar\omega}-\frac{m\omega}{\hbar}(x'-x_c)^2\right]$$
$$\times f(x(x',p',t),p(x',p',t)). \tag{33}$$

由(31)—(33)式以及(29)式得

$$\bar{x}=x_c\cos\omega t-\frac{p_c}{\omega m}\sin\omega t=-\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\bar{E}}{m}}\cos(\omega t-\theta_0), \tag{34}$$

$$\bar{p}=-\omega mx_c\sin\omega t-p_c\cos\omega t=\sqrt{2m\bar{E}}\sin(\omega t-\theta_0), \tag{35}$$

$$\overline{x^2}=\frac{\hbar}{2\omega m}+\frac{2E\bar{E}}{\omega^2 m}\cos^2(\omega t-\theta_0), \tag{36}$$

$$\overline{p^2}=\frac{\hbar\omega m}{2}+2m\bar{E}\sin^2(\omega t-\theta_0), \tag{37}$$

$$\overline{(x-\bar{x})^2}\,\overline{(p-\bar{p})^2}=(\hbar/2)^2. \tag{38}$$

由(36)和(37)式可知 $\bar{E}$ 大时

$$\left(\frac{\overline{p^2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\overline{x^2}\right)=\bar{E}+\frac{1}{2}\hbar\omega\approx\bar{E}. \tag{39}$$

另一方面考察 $\bar{E}$ 大时参数为 $\alpha=\sqrt{\bar{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 的相干态 $|\psi_\alpha(t)\rangle$. 这态中的平均值可写为

$$\langle f\rangle=\langle\psi_\alpha(t)|\hat{f}|\psi_\alpha(t)\rangle=\langle\psi_{\alpha'}(0)|\hat{f}|\psi_{\alpha'}(0)\rangle, \tag{40}$$

式中 $\alpha'=\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\sqrt{\bar{E}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\theta_0)}$. 由(40)式得出的相应结果与由经典粒子系综算得的结果(34)—(39)式一致[12].

4 讨　论

量子力学中不确定关系的解释大体上可分两种流派. 正统解释认为一个波函数可描述单个粒子,不确定关系来源于测量一个量时对另外的量产生的干扰[3]. 统计系综解释认为一个波函数只能描述系综,不确定关系是系综中所述量之间的统计弥散关系[1]. 本文在大$\langle E\rangle$条件下的计算结果支持后一种观点.

近年来大量子数条件下量子力学经典极限的研究已逐渐认识到一个波函数只能描述系综. 一个波函数实质上提供粒子系综的统计信息[13]. 大量子数条件下量子力学可过渡到经典力学的说法不成立[14]. 大量子数是向经典力学过渡的必要但不是充分条件[15]. 在WKB近似下一个波函数只能描述系综[7,16]. 量子力学的经典极限不是经典力学而是统计力学[6].

量子力学的基本成就来源于波函数及薛定谔方程. 不确定关系来源于平均值公式. 平均值公式本来就是统计平均之意,问题是造成统计性的根源是什么. 在所讨论的前三个实

例中，x 和 p 的不确定度都可以是宏观物理量，把它们说成是测量造成的干扰没有根据．尤其是在定态，粒子的能量守恒．宏观量大小的干扰将破坏这种守恒．另一方面，把统计性归因于一个波函数包含的信息量不够的看法看来是合理的．这种解释不需引入任何物理干扰，粒子仍按牛顿方程或薛定谔方程的规律运动．选取初始波函数相当于选定初值 E，θ 的一个概率分布．由于这概率分布，E 和 θ 不再是两个完全互相独立的参数．由此也就造成 x 和 p 间的关联．典型例子是能量本征态中位相信息全部丧失，而位相本征态中粒子能量信息完全丧失．动量本征态中粒子位置信息完全丧失，而位置本征态中粒子动量信息完全丧失等．在所讨论的相干态实例中，x 和 p 的不确定度虽然都是小量，但能量的不确定度 $(\Delta E)^2 = \bar{E}\hbar\omega$ 却是相当大的．相干态是个最小波包态，它是个与经典粒子状态最接近的态．它常被用来作为一个波函数可以描述单个粒子的例子．实际上相干态描述初值概率密度为(27)式的系综．当我们对相干态的统计特性有了认识之后，正统观点很难再找出一个具体波函数说明用它可描述单个粒子．

统计系综解释认为不确定关系不是单个粒子而是系综的性质．除了概念性实验说明外[1]也有实际实验支持[17]．在铜表面上蒸镀几个原子层厚度的金．在垂直表面方向测量来自金原子俄歇电子的动量 p_x．由于能量不同，来自金和铜的俄歇电子可区分．记金原子层厚度 Δx，实验结果 $\Delta x \Delta p_x$ 明显小于 $\hbar/2$．

不确定关系是量子力学中的一个重要关系式，弄清它的物理实质有重要意义．

[1] L. E. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.*, **42** (1970), 358.

[2] D. Home and M. A. B. Whitaker, *Phys. Rep.*, **210** (1992), 225.

[3] M. Hans and W. M. de Muynck, *J. Phys.*, **A25** (1992), 4887.

[4] E. Santos, *Found. Phys.*, **22** (1992), 371.

[5] R. L. Liboff, *Physics Today.*, **37** (1984), 50.

[6] L. E. Ballentine, Quantum Mechanics (Prentice-Hall Inc., 1990), Chap. 15.

[7] X. Y. Huang, *Science in China A*, **36** (1993), 181.

[8] E. G. Peter Rowe, *Eur. J. Phys.*, **8** (1987), 81.

[9] G. Q. Hassoun and D. H. Kobe, *Amer. J. Phys.*, **57** (1989), 658.

[10] R. Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford Univ. Press, 1983).

[11] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A39** (1989), 1665.

[12] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (John Wiley and Sons, Inc., 1973), p. 107.

[13] D. Home and S. Semgupta, *Nuovo Cimento*, **82B** (1984), 214.

[14] G. G. Carbrera and M. Kiwi, *Phys. Rev.*, **A36** (1987), 2995.

[15] E. T. Jaynes and F. W. Cumming, *Proc. IEEE*, **51** (1963), 89.

[16] S. W. Qian and X. Y. Huang, *Phys. Lett.*, **A115** (1986), 319; **A117** (1986), 214.

[17] K. Gotsch *et al.*, Problems in Quantum Physics (World Scientific, Singapore, 1988), p. 510.

THE CLASSICAL ANALOGY OF UNCERTAINTY RELATION

HUANG XIANG-YOU
(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)
(Received 19 December 1994)

ABSTRACT

The relation analogous to the uncertainty relation of quantum mechanics also exists in classical mechanics. In this paper by using this relation we calculate several examples. From the results of the calculations it is obvious that a wave function can only describe the ensemble in the classical limit.

PACC: 0365; 0320; 0520