

对 Hawking-Unruh 效应的新认识^{*}

赵 峰 刘 辽

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(1996 年 8 月 19 日收到)

Hawking-Unruh 效应既可以看作时间尺度变换的补偿效应, 又可以看作能量尺度变换的补偿效应. 温度以补偿场纯规范势的形式出现, 反映真空能量零点的改变. Hawking-Unruh 效应是惯性效应的一部分, 惯性效应起源于加速引起的真空变化.

PACC: 9760L; 0420

1 引 言

时间的均匀性或平移不变性, 导致能量守恒. 当这种均匀性从“整体”过渡到“局域”时, 会产生相应的补偿效应. 文献[1, 2]中讨论的时间尺度压缩和时间尺度变换, 就是时间均匀性局域化的一种表现. 我们已经指出, 这种与共形等度规映射相联系的时间尺度变换, 的确会导致补偿效应的出现. Hawking-Unruh 温度表现为补偿场的纯规范势. 本文将指出, 时间尺度压缩对应着能量尺度的伸张, 时间尺度变换对应着能量尺度变换. Hawking-Unruh 效应实质上是能量尺度变换的补偿效应. 在坐标变换下, 能量尺度的变换伴随着真空能量零点的下移, 使原来的真空涨落零点能实化, 以 Hawking-Unruh 热效应的形式出现. 下面我们就以 Minkowski 时空为例来进行讨论.

2 时间尺度变换

四维 Minkowski 时空^[3]

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

在 Rindler 变换下,

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (2)$$

可改写为 $ds^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2,$ (3)

其中二维子时空线元分别为

$$ds^2 = \Omega_1^2 d\tilde{s}_1^2, \quad d\tilde{s}^2 = \Omega_2^2 d\tilde{s}_2^2. \quad (4)$$

这里 $\Omega_1^2 = 1, \quad \Omega_2^2 = e^{2a\xi}, \quad d\tilde{s}_1^2 = -dt^2 + dx^2, \quad \tilde{d}s_2^2 = -d\eta^2 + d\xi^2,$ (5)

Ω_1 和 Ω_2 分别是坐标长度 $d\tilde{s}_1$ 与 $d\tilde{s}_2$ 的尺度因子, 表征坐标长度的尺度伸缩. 显然, 尺度

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

因子不仅在不同坐标系下不同(分别表现为 Ω_1 和 Ω_2), 而且一般还是时空点的函数.

设 B_μ 为二维子时空中的无穷小矢量, 其固有长度为 $L = (B_\mu B^\mu)^{1/2} = d\hat{s}$, 坐标长度分别为 $l = d\hat{s}_1$ 和 $l' = d\hat{s}_2$. 由于固有长度在平移下不变, 从(4)式可得

$$\delta \ln \Omega_1 = -\delta \ln l, \quad \delta \ln \Omega_2 = -\delta \ln l'. \quad (6)$$

当取 $x^\mu = (t, x)$, $x'^\mu = (\eta, \xi)$ 时, 有

$$\Gamma_{a\mu}^a = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \sqrt{-g} = 2 \frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial x^\mu}, \quad (7)$$

$$\Gamma_{a\mu}^{'a} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \ln \sqrt{-g'} = 2 \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial x'^\mu}. \quad (8)$$

定义

$$A_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{a\mu}^a, \quad A'_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{a\mu}^{'a}, \quad (9)$$

从(7)和(8)式可得

$$\begin{aligned} A_\mu dx^\mu &= \delta \ln \Omega_1, \\ A'_\mu dx'^\mu &= \delta \ln \Omega_2. \end{aligned} \quad (10)$$

把(6)式代入得

$$\delta \ln l = -A_\mu dx^\mu, \quad \delta \ln l' = -A'_\mu dx'^\mu. \quad (11)$$

可见, 坐标长度在平移下发生了变化, A_μ 就是变化率. 这可归因于坐标长度的尺度基准在平移下发生了变化. 依据 Weyl 的思想^[4], 可以认为尺度基准的变化产生了一个补偿场, A_μ 就是补偿场的势. 从(9)式可知, A_μ 就是仿射联络的缩并, 在坐标变换下应按下式变换:

$$A'_\mu = A_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right). \quad (12)$$

可见, A_μ 不是矢量. 由于补偿场强为零,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\lambda\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\nu, \mu}^\lambda - \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\mu, \nu}^\lambda = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu} = 0. \quad (13)$$

尺度基准虽然随时空点变化, 但与平移路径无关. 注意, 这里的讨论是在二维子时空中进行的, $F_{\mu\nu}$, A_μ , B_μ 均为二维子时空中的量. 由于我们采用自然单位制, 从(4)式可知, 时间坐标 $dt, d\eta$ 的尺度, 分别与空间坐标 $dx, d\xi$ 的尺度相同. 所以, 上面讨论的坐标尺度, 实质上就是时间尺度. 二维子时空与四维时空的坐标时间相同, 所以, 尺度变换(12)式, 不仅可以看作二维子时空中的时间尺度变换, 也可看作四维时空中的时间尺度变换.

从(4)式知, $L^2 = \Omega_1^2 l^2 = \Omega_2^2 l'^2$, 即

$$l' = \Omega^{-1} l, \quad (14)$$

$$\Omega = \Omega_2 / \Omega_1. \quad (15)$$

把(14)式代入(11)式可得

$$A'_\mu = A_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x'^\mu}. \quad (16)$$

容易验证, (12)式的最后一项就是(16)式的最后一项. 把(5)和(15)式代入(16)式, 可得

$$\partial \ln \Omega / \partial \xi = a, \quad \partial \ln \Omega / \partial \eta = 0, \quad (17)$$

a 是 Rindler 观测者的坐标加速度, 也是 Rindler 视界上的表面重力, 它决定 Rindler 时空

的温度

$$T = a/2\pi k_B, \quad (18)$$

k_B 是玻耳兹曼常数. 可见, Rindler 时空的 Hawking-Unruh 效应作为时间尺度变换的补偿效应出现, 温度表现为补偿场的纯规范势.

3 能量尺度变换

如果不确定关系

$$\Delta t \Delta \omega \sim \hbar \quad (19)$$

在任何坐标系下, 在任何时空点均成立, 则时间尺度变换必然伴随着能量尺度变换. 时间尺度压缩必然伴随着能量尺度的伸张. 所以, Hawking-Unruh 效应也可看作能量尺度变换导致的补偿效应. 为了弄清楚这一点, 我们考查 Rindler 时空中的狄喇克能级.

在 Rindler 系下, 哈密顿-雅可比方程为^[5]

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \mu^2 = 0, \quad (20)$$

其中 $S = \int L d\tau$ 为哈密顿主函数, μ 为粒子静质量, L 为拉格朗日函数. 分离变量

$$S = -\omega\eta + X(\xi) + Y(y) + Z(z), \quad (21)$$

则(20)式化成

$$g^{00}\omega^2 + g^{11}(X')^2 + g^{22}(Y')^2 + g^{33}(Z')^2 + \mu^2 = 0, \quad (22)$$

其中 $X' = dX/d\xi$, $Y' = dY/dy$, $Z' = dZ/dz$. 不难看出

$$g^{00}\omega^2 + \mu^2 = -[g^{11}(X')^2 + g^{22}(Y')^2 + g^{33}(Z')^2] \leq 0, \quad (23)$$

所以有

$$\omega^2 \geq -g_{00}\mu^2, \quad (24)$$

即

$$\omega \geq \omega^+ = \sqrt{-g_{00}}\mu, \quad \omega \leq \omega^- = -\sqrt{-g_{00}}\mu. \quad (25)$$

ω^+ 与 ω^- 之间为禁区. 这就是 Rindler 时空中的狄喇克能级.

禁区半宽度为

$$\Delta\omega' = \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-) = \sqrt{-g_{00}}\mu, \quad (26)$$

利用(3)和(5)式, 得

$$\Delta\omega' = \Omega_2\mu = e^{a\xi}\mu. \quad (27)$$

Minkowski 时空中狄喇克能级的禁区半宽度为

$$\Delta\omega = \Omega_1\mu = \mu, \quad (28)$$

禁区宽度的相对变化率为

$$\delta \ln \Delta\omega' = \delta \ln \Omega_2, \quad \delta \ln \Delta\omega = \delta \ln \Omega_1. \quad (29)$$

可以把禁区宽度的变化归因于能量尺度的变化. 即把禁区宽度的变小归因于能量尺度的伸张. 把(6)和(11)式代入(29)式, 得

$$\delta \ln \Delta\omega' = A'_\mu dx'^\mu, \quad \delta \ln \Delta\omega = A_\mu dx^\mu. \quad (30)$$

从(27)和(28)式可知,

$$\Delta \omega' = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Delta \omega = \Omega \Delta \omega. \quad (31)$$

由此不难得出

$$A'_\mu = A_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x'^\mu}. \quad (32)$$

它就是(16)式.可见,时间尺度的相对变化率 A_μ 也就是能量尺度的相对变化率,只不过时间尺度的压缩对应于能量尺度的伸张.此差别体现在(11)和(30)式等号右端差一个负号.正如(17)和(18)式所示,(32)式的纯规范势是 Hawking-Unruh 温度.

由此可见,Hawking-Unruh 效应可以看作能量尺度变换的补偿效应.能量尺度不仅是时空点的函数,而且在坐标变换下也要变化.其变化率是二维子时空仿射联络的缩并,不是矢量.

4 结论与讨论

Hawking-Unruh 效应是时间平移不变性局域化后的产物,是时间尺度变换的补偿效应.时间尺度变换必然导致能量尺度变换,因此,Hawking-Unruh 效应又可等价地看作能量尺度变换的补偿效应.值得注意的是,这种补偿效应与共形等度规映射相关联,

$$-d\eta^2 + d\xi^2 = e^{-2\alpha\xi}(-dt^2 + dx^2). \quad (33)$$

从(4)式不难看出这一点.

另一方面,在用格林函数研究 Hawking-Unruh 效应时,发现 Minkowski 时空中的零温格林函数,在变换到 Rindler 时空后,表现为温度格林函数^[6].这表明,Rindler 时空中的 Hawking-Unruh 热能,实质上是 Minkowski 时空中的真空涨落能^[7].Hawking-Unruh 效应实际上是真空能量零点发生移动的结果.加速的 Rindler 系中的真空能量零点,比 Minkowski 时空中惯性系的真空能量零点要低 $k_B T$ 数量级. T 即(18)式所示的 Hawking-Unruh 温度.从(17)式可知,(32)式等号右端第二项(决定 Hawking 温度的 α),即纯规范势,表征真空能量零点的移动.也就是说,(32)式不仅反映不同坐标系中能量尺度变化率的关系,而且反映两个坐标系中真空能量零点的变化.

所有支持狭义相对论的实验,只不过证明了真空是洛伦兹不变的,或 Poincaré 不变的^[7].现在我们看到,当上述对称性局域化之后,真空将发生变化.在(33)式所示的共形等度规映射下,真空的变化比较简单,只是能量零点简单地向下移动,使部分真空零点能实化为热能.

从(9),(16),(17)和(18)式可以看出,Hawking-Unruh 温度与仿射联络有关,它应是惯性效应的一部分.通常的惯性力,是惯性的力学效应,Hawking-Unruh 效应则是惯性的量子效应、热效应.

由于 Hawking-Unruh 效应起源于真空能级的升降,一个自然的推论是:惯性力起源于真空的变化.这就是说,惯性力既不像牛顿认为的那样起源于绝对空间(相对于绝对空间的加速),也不像马赫断言的那样^[8],起源于遥远星系(相对于遥远星系的加速).惯性

效应实质上是一个起源于加速引起的真空“形变”的局域效应. 惯性力就是真空“形变”造成的反作用力. 按照这种看法, 惯性作用不是超距作用; 惯性力与普通力一样, 具有反作用力.

- [1] 赵 峥, 刘 辽, 物理学报, **42**(1993), 1537.
- [2] 马 勇, 赵 峥, 中国科学(A 辑), **26**(1996), 451.
- [3] W. G. Unruh, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 870.
- [4] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*(Cambridge University Press, Cambridge, 1957), p. 200.
- [5] N. Deruelle, in “Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity”, edited by R. Ruffini (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975), p. 483.
- [6] G. W. Gibbons and M. J. Perry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A358**(1978), 467.
- [7] D. W. Sciama, P. Candelas and D. Deutsch, *Advances in Physics*, **30**(1981), 327.
- [8] A. 爱因斯坦, 相对论的意义(科学出版社, 北京, 1979), 第 36 页.

A NEW UNDERSTANDING TO HAWKING-UNRUH EFFECT

ZHAO ZHENG LIU LIAO

(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

(Received 19 August 1996)

ABSTRACT

The Hawking-Unruh effect can be regarded as the compensate effect under energy-scale transformation or under time-scale transformation. The temperature appears as a pure gauge potential of the compensate field, and the state of affairs reflects the change of the zero point of vacuum energy. The Hawking-Unruh effect is a part of the inertial effect. The inertial effect originates from the variance of vacuum caused by acceleration.

PACC: 9760L; 0420