

观测窗中多元非线性时间序列的分析

袁 坚 肖先赐

(电子科技大学电子工程系, 成都 610054)

(1997 年 4 月 11 日收到)

从观察的角度去了解原有系统的特性, 不同程度上会受到观测手段的限制. 针对一个观测窗口获得的多元时间序列, 利用一种能够更好地体现多元时间序列复杂的时空结构的多元奇异系统分析方法, 研究多元序列的相关维数和最大李雅普诺夫指数的变化. 利用多层感知器神经网络模型分析其可预测性. 研究发现, 随着观测窗中多元时间序列的变量数目的增加, 反映出的复杂性有所提高, 稳定性会产生波动, 且相应的可预测性也会产生一些差异.

PACC: 0545

1 引 言

时间序列分析主要体现在预测、建模和特征刻画三个方面. 预测就是对系统的演化作短期的精确预报. 建模则表现出对系统长期行为的准确描述. 预测和建模虽是相互覆盖的两个方面, 但在一定程度上表现出不同的特点. 例如, 用线性模型方法对非线性时间序列作局部预测, 一定程度上可以得到较准确的结果, 但并不能反应序列长期的形态. 而基于神经网络的非线性模型以数十个数据便可在一定程度上体现出混沌序列的长期形态^[1], 却又无法用于精确的预测. 预测和建模有时又表现为一个过程的两个方面. 系统特征描述的目的则是试图通过较少的先验知识或无任何先验知识的条件下确定系统的基本特征, 如系统的自由度的数目等. 系统的复杂程度显然与预测所用模型的复杂程度不同, 但是对系统性质的了解又有助于预测和建模, 例如确定嵌入维数及了解可预测性等. 同时从建模的角度提供足够的分析数据显然又有助于对系统特性的了解. 可以看出, 时间序列分析的三个方面交织在一起, 相互依赖. 从圣塔菲(Santa Fe)时间序列预测和分析竞赛结果就可看出这样一个趋势: 简单的“黑匣子”方法一般都失败, 而所有入围的成功者都经过了数据的仔细分析处理过程^[2].

多元非线性时间序列的研究比单变量时间序列的研究要少得多. 绝大多数相空间重构及其分析的应用都是针对从单一传感器上得到的单变量时间序列. 延时重构只是由于同时获取多个传感器上一定精度的数据出现困难时, 对标量时间序列采取的一个折衷方法. 描述一个非线性系统的各个变量之间并不是相互独立的, 各变量之间的相关程度不同, 且反映系统的动力学特征的水平也有差异. 当系统的多个变量可以同时观测时, 我们所获取的信息应该比同样长度的单变量序列要多^[3]. 实际应用中确实有可能得到多个通道的时间序列观测值, 例如, 在旋转热对流实验中, 在不同位置放置 16 个探头对温度进行

测量^[4].从重构的相图和相关维数的估计来看,多个通道数据的分析比单个通道获得更好的结果.另外,在圣塔菲时间序列预测和分析竞赛中,有一组由心率、呼吸和血氧浓度等生理数据组成的多变量时间序列^[5].对这一组长达 283 min 记录下来的数据,考虑到信号的非平稳性、外界的影响和各变量间复杂的关系等因素,对数据的分析需格外仔细.从本质而言,仅就这三个变量的数据进行分析,要想真正反映出复杂的生理机制比较困难,分析的结果也正说明了这一点.由此可见,实际应用中往往一方面会表现出一定的复杂性和特殊性,另一方面在探索事物的本质上又存在着一定的共性.

对一个系统进行观测时,有时会有多个变量同时出现在一个观测窗中的情况,例如,在频域上观察到几个窄带的信号,每个窄带信号都代表一个通信电台发射的信号.在频谱上信号的频率显然只能从小到大排列,于是,当通信电台是跳频电台时,我们在频谱上观察到的频率的跳变也总是从小到大排列,也就无法具体跟踪某一个电台频率跳变的规律.所得到的多元变量序列与原来每个电台对应一个变量构成的多元序列完全不同.两种多元序列虽有本质的联系,但所反应的特性已完全不同.尤其是对用混沌跳频码控制跳频变化的跳频多址通信网^[6],我们在频域观测的限制更使对抗跳频通信的难度增大.非线性复杂程度较高,周期长的混沌跳频码具有良好的自相关、互相关特性和平衡特性(即各个频隙出现的概率一致),且混沌固有的不稳定性,使其能够以一种混沌序列构成数量很大的跳频码.每个跳频电台以不同初始值的混沌控制频率变化,在任一时刻上的频率都不会完全一样.从观察的角度去了解其本质,一定程度上会受到观测手段的限制,那么能否从这样的观察窗口看到原有系统的变化规律呢?本文将对此进行讨论.

本文主要研究由 Kent 映射^[6]构成的多元序列体现在一个观测窗中的多元序列.采用了一种能够更好地体现多元时间序列复杂的时空结构的多元奇异系统分析(multivariate singular systems analysis,简称 M-SSA)方法,研究多元序列的相关维数和最大李雅普诺夫指数的变化,且利用多层感知器神经网络模型分析其可预测性.研究发现,随着观测窗中的多元时间序列的变量数目的增加,反映出的复杂性有所提高,稳定性会有一些波动,而相应的可预测性会产生一些差异.这一特点在解决具体应用问题时具有一定的意义.

2 Kent 映射与观测窗中的多元序列

Kent 映射^[7,6]定义为

$$x(i+1) = \begin{cases} x(i)/a & 0 \leq x(i) < a, \\ [1-x(i)]/(1-a) & a \leq x(i) \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $0 < a < 1$, $0 \leq x(i) \leq 1$.产生的序列在 $[0, 1]$ 区间均匀分布^[7].在此选择 $a = 0.2$ ^[6].可以计算出其相关维数 $D_c \approx 1.0$,最大李雅普诺夫指数 $\lambda_1 \approx 0.45$ ^[8].

若观测到 L 个变量的多元时间序列,则在某时刻 t 构成的矢量为

$$\mathbf{X}_t = (x_t^1 x_t^2 \cdots x_t^L), \quad (2)$$

其中 $x_t^j (1 \leq j \leq L)$ 为第 j 个变量,若 $\{x_t^j (t=1, 2, \cdots, N)\}$ 是由(1)式在不同初始条件下产生的序列,则 $\{\mathbf{X}_t (t=1, 2, \cdots, N)\}$ 代表了一个多元的 Kent 混沌序列.如果观测窗中的 x_t^j

在每一时刻都是由小至大排列,那么构成的 $\{\mathbf{X}_t(t=1,2,\cdots,N)\}$ 便不再是一个多元的 Kent 混沌序列,这样的多元序列应该具有与多元 Kent 序列完全不同的动力学特征.多元 Kent 序列的每个变量都具有 Kent 映射的性质,那么多元 Kent 序列动力学特性也就应该与 Kent 映射的特性一致^[3].多元 Kent 序列反映在一个总是由小至大排列的观测窗中的多变量序列 $\mathbf{X}_t$,与 Kent 序列已完全不同.图 1 为三元 Kent 序列(图(a))在这样的观测窗中表现为完全不同的三元时间序列(图(b)).

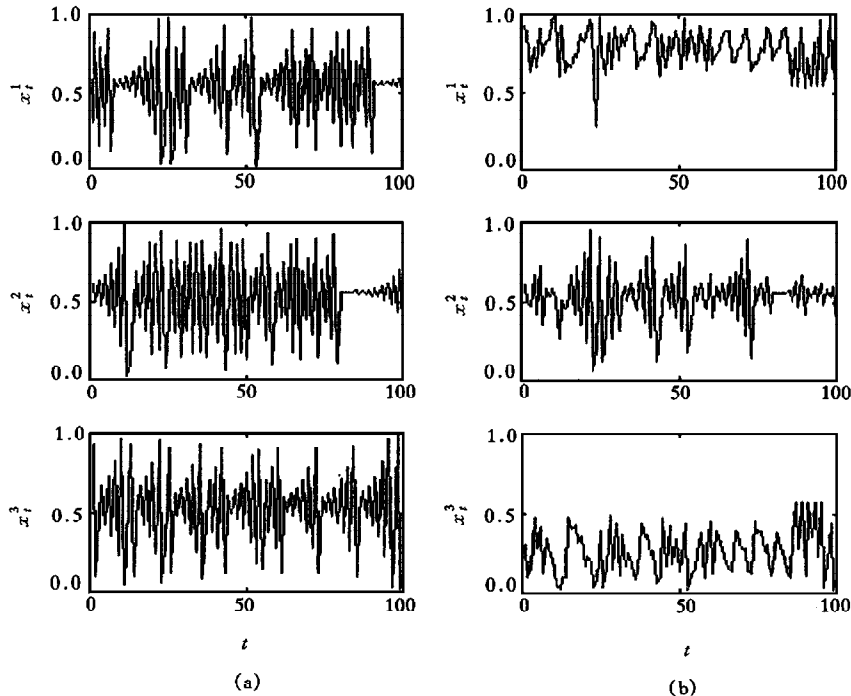


图 1 三元 Kent 序列组成的三元时间序列(a)和三元 Kent 序列反映在一个总是由小至大排列的观测窗中新的三元时间序列(b)

3 多元时间序列的分析

多元时间序列的分析与标量时间序列的分析一样,首先需要由时间序列重构状态空间.重构是分析时间序列和建立预测模型必不可少的一个步骤.对于多元时间序列,可由观测矢量 $\mathbf{X}_t$ 用延时重构的方法构造出重构状态矢量

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{X}_{t-(m-1)\tau} \mathbf{X}_{t-(m-2)\tau} \cdots \mathbf{X}_t)^T, \quad (3)$$

其中 m 和 τ 分别为嵌入维数和重构延时.这样就将(2)式定义的子空间嵌入到 m 维的重构空间里.这可称作多通道嵌入^[3],以区别于针对标量时间序列的延时嵌入.显然(3)式中的有效嵌入维数为 $L \times m$,相应的多通道嵌入空间中的轨迹可表示为一个 $(L \times m) \times$

$(N - (m - 1)\tau)$ 的矩阵

$$\mathbf{Y} = \{ \mathbf{Y}(t) (t = 1, 2, \dots, (N - (m - 1)\tau)) \}. \quad (4)$$

基于重构轨迹 $\mathbf{Y}$, 即可估计相关维数和最大李雅普诺夫指数等动力学不变量. 然而重构窗口的选择不当导致的重构质量问题, 会引起估计的不准确, 如同 Broomhead 等人提出的奇异系统分析 (SSA) 方法^[9] (也叫主元分析法) 用以改善重构质量, 以及 Read 提出的针对多元时间序列的 M-SSA 方法^[4]. 因为由重构轨迹构造的协方差矩阵的秩很大程度上受到重构窗口选择的影响, 所以嵌入维数一般还不能和协方差矩阵的秩等同起来^[4]. 关于这一点有时会产生一些错误的认识^[10]. 相关的讨论还可参阅文献[3]. 另外, 文献[3]中提出的再嵌入的方法本质上与 M-SSA 方法有着异曲同工之处, 且对嵌入维数等的选择问题提出了许多经验性的建议.

若用 $\mathbf{A}$ 表示 $\mathbf{Y}$ 的协方差矩阵, 则

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T, \quad (5)$$

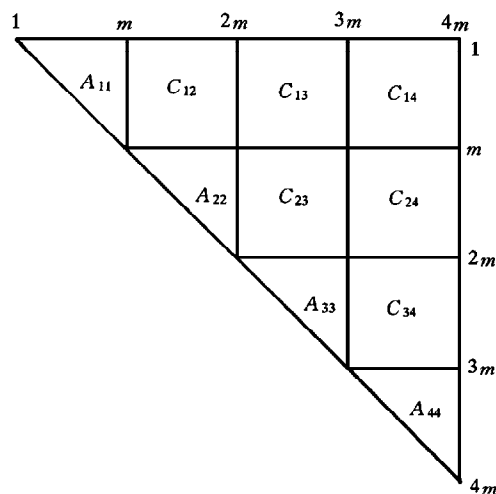


图 2 多元时间序列的重构轨迹构成的协方差矩阵的上三角部分

这一多元时间序列的重构轨迹构成的协方差矩阵为实对称矩阵. 若(2)式中 $L=4$, 则 $\{ \mathbf{X}_i(t = 1, 2, \dots, N) \}$ 为一个四元时间序列. 相应的协方差矩阵 $\mathbf{A}$ 的上三角部分如图 2 所示. 图 2 中 A_{11} , A_{22} , A_{33} 和 A_{44} 分别对应变量 x_1^1 , x_1^2 , x_1^3 和 x_1^4 的自协方差矩阵的上三角部分, 而 C_{12} , C_{13} , C_{14} , C_{23} , C_{24} 和 C_{34} 则为各个变量之间的互协方差矩阵. 这样一个包含自协方差和互协方差元素的矩阵, 经过特征分解后得到的特征矢量, 即对应着反映多元序列在时间和空间总体模式的正交基, 亦即 M-SSA 方法能更好地体现出多元序列复杂的时空结构^[4], 进一步的正交变换等处理与 SSA 方法一致.

用 M-SSA 方法得到的重构轨迹, 可以估计相关维数和最大李雅普诺夫指数. 维

数体现出动力系统的复杂程度, 李雅普诺夫指数则表征了动力系统的稳定性. 相关维数的定义为

$$D_c = -\lim_{r \rightarrow 0} [\ln C_m(r) / \ln r], \quad (6)$$

其中 $C_m(r)$ 为相关累积量,

$$C_m(r) = \frac{1}{N_M^2} \sum_{i,j}^{N_M} H\{r - \|\mathbf{Y}(i) - \mathbf{Y}(j)\|\}, \quad (7)$$

其中 N_M 为重构轨迹的长度, $H\{\cdot\}$ 为 Heaviside 函数, $\|\cdot\|$ 为范数. 为了避免同一轨迹上的邻近点引起虚假的维数估计, 在此采用的是一种改进的 Grassberger-Procaccia 算

法^[11,3].

Rosenstein 等人提出的计算最大李雅普诺夫指数的方法对嵌入维数、延迟时间、数据长度和噪声的变化等表现出较好的鲁棒性^[12]. 我们在此选用这一方法计算最大李雅普诺夫指数 λ_1 . 设 $d(t)$ 表示相邻两点 (不在同一轨迹上) 的距离, 则

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t}, \quad (8)$$

其中 C 为初始分岔. 对重构轨迹上的某一点 $Y(j)$ 而言, $C_j = d_j(0) = \min \|Y(j) - Y(\hat{j})\|$, C_j 为第 j 个点与最接近它的点 $\hat{j}$ (不在同一轨迹上) 间的距离, 则

$$d_j(i) = C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)} \quad (9)$$

为 $i\Delta t$ 时刻的分岔, $\ln d_j(i) - i\Delta t$ 曲线的斜率便体现出了 λ_1 , 即

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{i\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad (10)$$

其中 $\langle \rangle$ 为对所有 j 的平均.

动力系统的重构其实是一个逆问题^[13]. 通过动力系统的状态反过来去构造系统的模型, 即建立

$$Y(t+1) = F(Y(t)) \quad (11)$$

中的函数 F . 对于多元时间序列, 进一步将 (11) 式写成

$$X_{t+1} = F_1(Y(t)), \quad (12)$$

这就变成了一个多输出的预测模型的构造问题. 构造一个函数 $\hat{F}_1$ 逼近 F_1 有许多方法^[13], 而神经网络所具有的高度非线性拓扑结构, 使其成为混沌系统建模的理想工具^[1]. 圣塔菲时间序列预测和分析竞赛的结果也说明了这一点^[2]. 在此我们选择利用 BP 算法训练的多层感知器去构造 $\hat{F}_1$, 以此来说明多元序列的可预测性和长期形态.

4 观测窗中多元时间序列的分析

第 2 节中已经说明, 多元 Kent 序列在一个由小至大排列的观测窗中表现为一个完全不同的多元序列. 多元 Kent 序列中的每个序列表现出 Kent 映射的性质, 那么观测窗中的每个序列性质如何呢? 图 3 为两个 Kent 序列在这样的观测窗中得到的两个新序列的相关维数估计曲线. 计算中取数据长度 $N=3000$, 延迟时间 $\tau=1$. 可以看出, 估计出的相关维数 $D_c \approx 2.5$, 与 Kent 序列的相关维数 $D_c \approx 1.0$ 相比有所提高, 体现出完全不同的性质. 另外, 两个序列的相关维数接近一致, 这与 Kent 序列均匀分布在值域上的性质有关. 而在多于二元的多元序列的情况下, 情形要复杂些, 计算出的相关维数并不接近一致, 这可从图 1(b) 中看出. 对于多元序列各序列的特点下面不作讨论, 重点讨论整个多元序列表现出的性质.

观测窗中的多元时间序列与多元 Kent 序列应该体现出完全不同的动力学性质. 对于观测窗中的二元时间序列, 利用 M-SSA 方法获得重构轨迹, 进一步计算相关维数和最

大李雅普诺夫指数,如图4所示.图4(a)为观测窗中二元时间序列在嵌入维数 $m=2, 4, 6, 8, 10, 12$ (从左至右)时的 $\ln C_m(r) - \ln(r/r_0)$ 曲线.取数据长度 $N=3000$, 延迟时间 $\tau=1$.可以看出,估计到的相关维数 $D_c \approx 2.5$.图4(b)为 $m=4, N=3000, \tau=1$ 时估计最大李

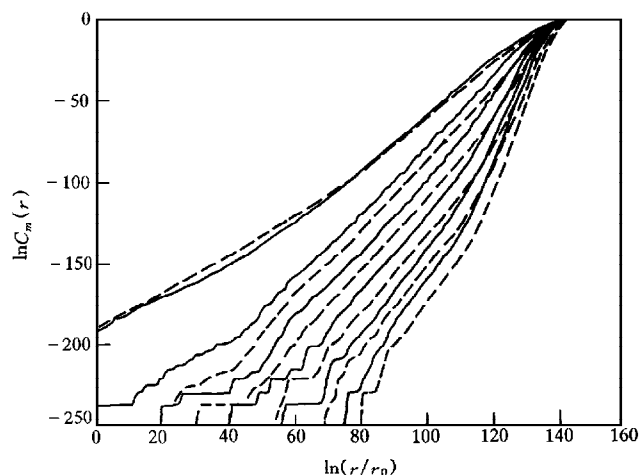


图3 二元 Kent 序列在观测窗中反映出的两个新序列的相关维数估计曲线 ---- 和 ——— 分别为这两个序列在嵌入维数 $m=2, 4, 6, 8, 10, 12$ (从左至右)时的 $\ln C_m(r) - \ln(r/r_0)$ 曲线, r/r_0 为归一化相对距离

雅普诺夫指数的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线.由斜率可估计出 $\lambda_1 \approx 0.56$.可见相关维数和最大李雅普诺夫指数都比原来的 Kent 序列 ($D_c \approx 1.0, \lambda_1 \approx 0.45$) 有所提高.说明观测窗中二元序列的复杂性的提高和稳定性的下降,但仍然体现出混沌的性质.

我们对观测窗中多于二元的多元时间序列进行了分析.图5(a)为反映观测窗中二元至十元时间序列相关维数 D_c 的变化情况,其中 $i=1$ 对应 Kent 序列的相关维数.可以看出,随着 i 的增加,所反映的相关维数逐步增加,表现出复杂性的提高.图5(b)为最大李雅普诺夫指数 λ_1 的变化情况. λ_1 的变化并不单纯,表现出非线性现象的复杂性.在 $i=4$ 处达到一个峰值,然后又开始减小.这一特点相应地在分析可预测性上得到反映.

用多层感知器构成的多元时间序列全局预测模型,既可用于一步预测,又可用于观察其产生的多元序列的长期形态是否与观测到的序列的形态一致.针对观测窗中三元时间序列的情况,用 200 个数据对利用 BP 算法训练一个三层的多层感知器(输入层:隐含层:输出层=6:80:3).图6为反映这一模型预测和长期形态的示意图.可以看出,构造的模型较好地反映出与观测序列一致的形态,并可作为全局一步预测模型.

对于不同的动力系统及使用不同的预测模型,评价可预测性可能出现较大的差异.我们仅就同样使用多层感知器作为预测模型,在达到 50% 预测准确率的条件下,所允许的绝对误差作为评价可预测性的一个标准.对于输入层和隐含层的选择,我们经反复试验,以具有较小的预测误差作为选择的标准.图7为反映观测窗中二元至十元时间序列在 50% 预测准确率条件下所允许的绝对误差的变化曲线($i=1$ 时对应 Kent 序列的情况).

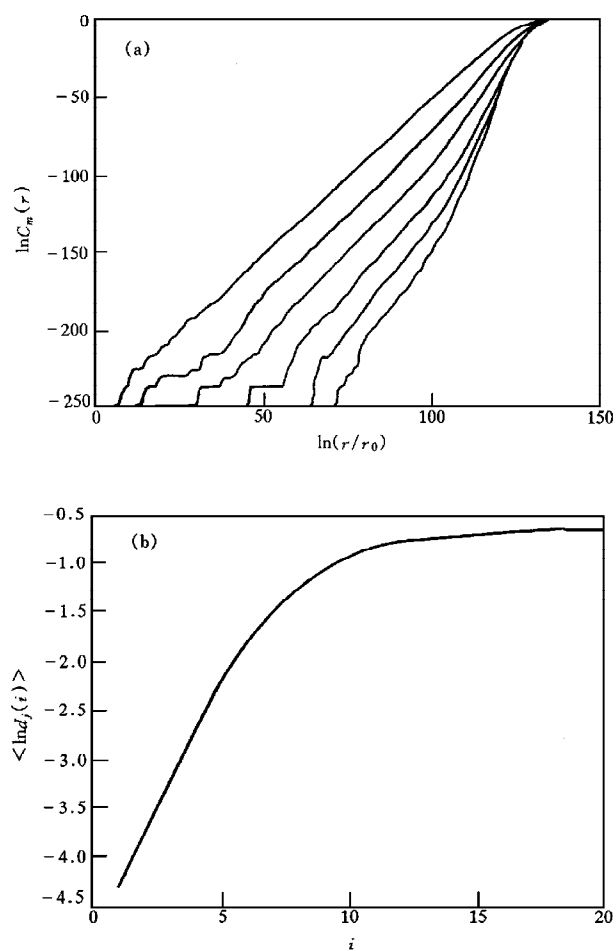


图4 观测窗中二元序列的相关维数和最大李雅普诺夫指数的估计曲线

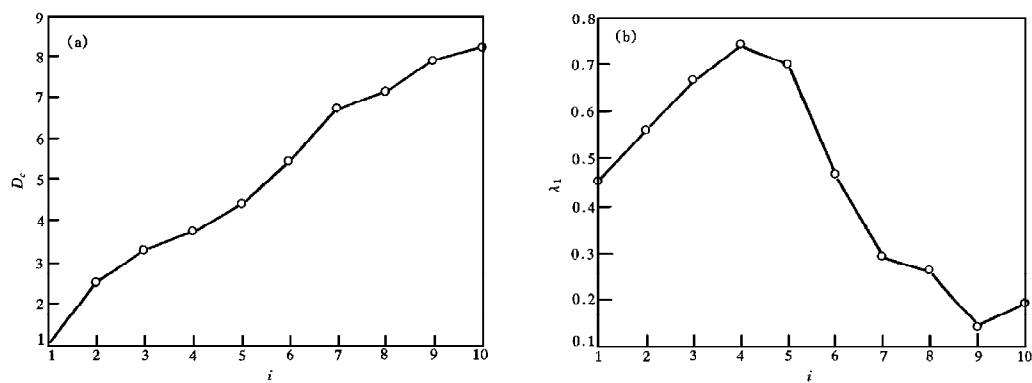


图5 随着观测窗中多元时间序列的变量数目的增加,相应的相关维数和最大李雅普诺夫指数的变化曲线

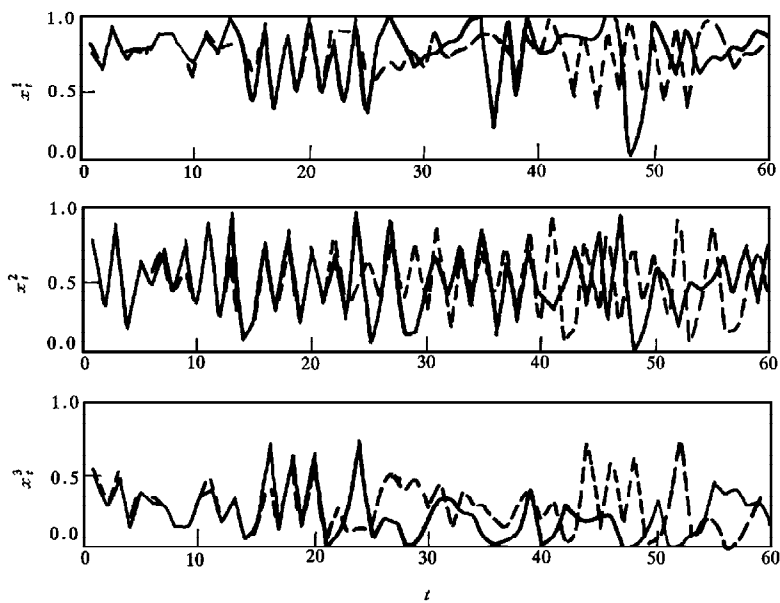


图 6 用多层感知器全局预测模型反映出的观测窗中三元序列的预测和模型叠代产生的序列形态示意图 ——为真实的观测窗中的序列;----为前 20 点为一步预测,后 40 点为模型产生的叠代多元序列

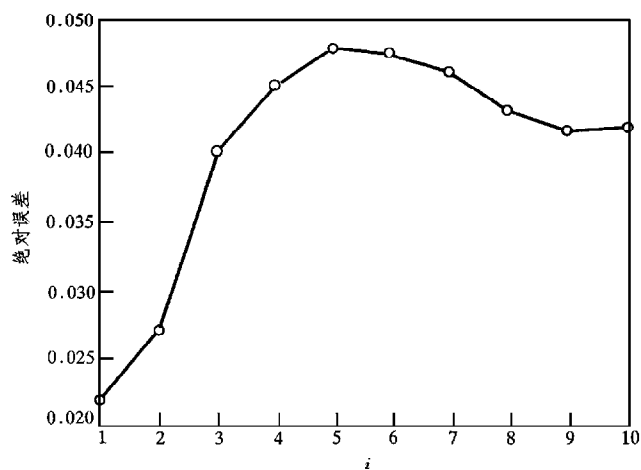


图 7 观测窗中多元时间序列在 50% 预测准确率条件下所允许的绝对误差的变化曲线

在 $i=5$ 处达到最高, 然后开始回落. 总体上看误差随 i 的增加而增加, 这从相关维数的增大反映出的复杂性的提高可以得到解释. 而误差的回落可能是受到最大李雅普诺夫指数下降的影响. 毕竟最大李雅普诺夫指数所表示出的指数分离特性, 直接关系到一步预

测的准确性.

- [1] A. M. Albano, *Physica*, **D58**(1992), 1.
- [2] N. A. Gershenfeld *et al.*, in: Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, edited by A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol. XV (Addison-Wesley, 1993), pp. 1—70.
- [3] K. Fradrich *et al.*, *Physica*, **D65**(1993), 373.
- [4] P. L. Read, *Physica*, **D69**(1993), 353.
- [5] D. R. Rigney *et al.*, in: Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, edited by A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol. XV (Addison-Wesley, 1993), pp. 105—129.
- [6] 李文化等, 通信学报, **17**(1996), 17.
- [7] H. Sakai *et al.*, *IEEE Trans. ASSP*, **28**(1980), 588.
- [8] 袁 坚等, 物理学报, **46**(1997), 1300.
- [9] D. S. Broomhead *et al.*, *Physica*, **D20**(1986), 217.
- [10] M. Palus *et al.*, *Physica*, **D55**(1992), 221.
- [11] J. Theiler, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 2427.
- [12] M. T. Rosenstein *et al.*, *Physica*, **D65**(1993), 117.
- [13] M. Casdagli, *Physica*, **D35**(1989), 335.

ANALYSIS OF THE MULTIVARIATE TIME SERIES IN AN OBSERVATION WINDOW

YUAN JIAN XIAO XIAN-CI

(Department of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

(Received 11 April 1997)

ABSTRACT

Generally, dynamical analyses of the original systems are limited to some extent by the observational methods. In this paper, by using the method of multivariate singular systems analysis (M-SSA), which combines simultaneously information sampling the complete range of the spatial cross-correlation function in signals with complex spatio-temporal structure, we study the changes of the correlation dimensions and the largest Lyapunov exponents of the multivariate time series in an observation window. And the characterization of prediction is discussed also with the multi-layer perceptron. It is shown that when the number of the variates is increased, the complexity is also increased and the stability and the characterization of prediction are different.

PACC: 0545