

受限分枝无规分形的分维度^{*}

梁一平

(西南师范大学物理系, 重庆 630715)

蒋一初

(西南师范大学数学系, 重庆 630715)

(1996 年 2 月 7 日收到)

提出了受限分枝无规分形的概念. 用无规分枝生长的统计方法计算了它的分维. 从理论上证明了理想无规分形的分维应在 2 与 4 之间. 讨论了无规分形的线性度问题, 并说明了无规分形体的线性度与物理体系中相互作用的各向异性有关.

PACC: 6116; 6240

1 引 言

无规分形的两个典型例子是线性无规分形和高度分枝无规分形(图 1), 由于它们不包含体积排斥效应, 因而被称为“理想”无规分形^[1]. 理论上已严格计算了它们的分维 D_0 , 其结果分别为 $D_0 = 2$ 和 $D_0 = 4^{[1-7]}$.

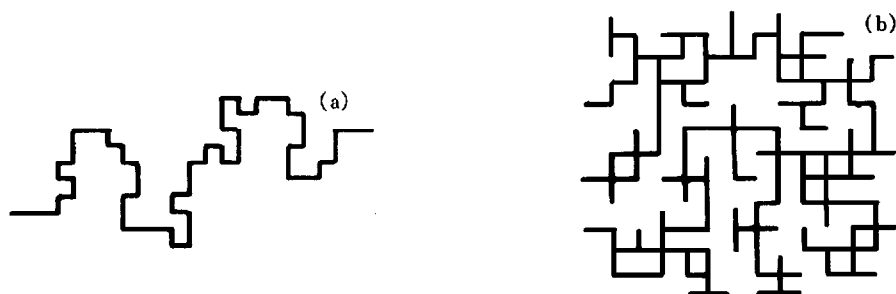


图 1 线性无规分形(a)和高度分枝无规分形(b)

实验制备的和 Monte-Carlo 模拟得到的小粒子聚集体都具有无规分枝分形体的结构特征^[7-14], 但用有关理论计算它们的分维时, 发现理论值与实验测量值符合得不好. 实验测量结果表明理想无规分形的分维 D_0 应介于 2 到 4 之间^[8,9], 这意味着存在介于上述两种极端情形之间的理想无规分形, 这就是本文要讨论的主要内容.

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

2 理想无规分形的分维

设从格子的某一格点(原点)出发,无规行走 N_L 步到达某一距离为 R 的位置,无规行走统计表明位矢的方均值为^[1,6,7]

$$\langle R^2 \rangle \sim N_L, \quad N_L \rightarrow \infty. \quad (1)$$

这样得到线性无规分形的分维为 2. 相应于 N_L 步路径的分枝无规分形是以原点为根, 经 N_L 代分枝生长形成的分枝树, 它具有 N_L 步无规行走形成的线性链的线径, (1) 式仍然成立. 图 2 示出这种分枝树的形成过程.

以原点为根, 设第 l 次生长产生 $\langle n_l \rangle$ 条树枝, 经 N_L 代生长后树枝的总数为

$$N = \sum_{l=1}^{N_L} \langle n_l \rangle. \quad (2)$$

显然, $\langle n_l \rangle = 1$ 就是线性链的情况, 它相当于无分枝的树.

一般而言, $\langle n_l \rangle$ 的数值与第 l 代生长点的个数 Z_l 和可能生长出第 l 代树枝的位置的数目 M_l 有关. 如果在 M_l 个位置上长出树枝的条数不受到限制, 则 M_l 也就是第 l 代树枝的最大数目. 图 2 中用虚线联结的是同一代可能的生长点. 设格子的配位数为 Z , 第一代生长点只有一个(原点), 能够生成的第一代树枝最多为 $M_1 = Z$ 条; 第二代生长点有 $Z_2 = Z$ 个, 能够生成的第二代树枝最多为 $M_2 = Z \cdot Z_2 = Z^2$ 条. 以此类推, 每经过一代生长, 生长点增加一个配位数, 因而第 l 代的生长点个数为

$$Z_l = (l-1)Z, \quad l > 1, \quad (3)$$

可能生长出第 l 代树枝的最多条数为

$$M_l = Z \cdot Z_l = Z^2(l-1), \quad l > 1, \quad (4)$$

于是(略去下标 l 后)有

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^M n \binom{M}{n} / \left[\sum_{n=1}^M \binom{M}{n} \right] = \frac{M 2^{M-1}}{2^M - 1} \approx \frac{M}{2}, \quad (5)$$

其中

$$\binom{M}{n} = \frac{M!}{n!(M-n)!}. \quad (6)$$

(5) 式中的求和是从 $n=1$ 开始, 这是因为在分枝生长过程中, 每一代至少要产生一条树枝, 否则生长将要中断. 将(5)式代入(2)式, 并利用(4)式, 得

$$N = \sum_{l=2}^{N_L} Z^2(l-1)/2 + Z/2$$

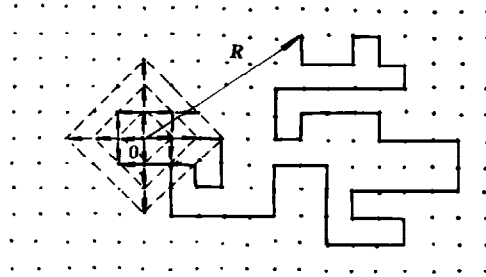


图 2 无规分枝树的形成

$$= Z^2 N_L (N_L - 1)/4 + Z/2 \sim N_L^2, \quad N_L \rightarrow \infty, \quad (7)$$

再由(1)式得

$$\langle R^2 \rangle \sim N^{1/2}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

这正是高度分枝无规分形的情形, 其分维 $D_0 = 4$.

如果分枝生长受到限制, 第 l 代生长在 M_l 个可能位置上能够产生的树枝的条数最多不是 M_l , 而是 m_l , 那么(略去下标 l 后)

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^m n \binom{M}{n} / \left[\sum_{n=1}^m \binom{M}{n} \right], \quad 1 \leq m \leq M. \quad (9)$$

在给定 M 的情况下, 它是 m 的一个单调增函数, $\langle n \rangle = \langle n(m) \rangle$, 而且它的两个极端情形是

$$\langle n(1) \rangle = 1, \quad \langle n(M) \rangle = M/2. \quad (10)$$

由于 m 的大小反映了分枝受到限制的程度, m 越小, 限制越强, m 越大, 限制越弱, 而 $\langle n \rangle$ 又并非 m 的线性函数, 因此可引入限制强度指数 k , 使得

$$\langle n \rangle = (M/2)^{1-k}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (11)$$

于是, 由(2), (4)和(11)式, 有

$$\begin{aligned} N &= \sum_{l=1}^{N_L} (M_l/2)^{1-k} \\ &= \sum_{l=1}^{N_L} [Z^2(l-1)/4]^{1-k} \sim N_L^{2-k}, \quad N_L \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

从而

$$\langle R^2 \rangle \sim N^{1/(2-k)}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (13)$$

$$D_0(k) = 2(2-k), \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (14)$$

可见, 一般情形下有

$$2 \leq D_0(k) \leq 4. \quad (15)$$

3 讨论与结论

由(14)式知, 当 $k=0$ 时, $D_0(0)=4$, 这是高度分枝亦即完全非线性的无规分形的分维. 一般情形下, 分枝受到限制, k 介于 0 到 1 之间, 对应于非线性的低分枝无规分形, 其分维 $D_0(k)$ 也介于 2 到 4 之间. 当限制达到最强时, $k=1$, $D_0(1)=2$, 成为线性无规分形. 因此, 参数 k 也可定义为无规分形的线性度. 从物理内容上看, 当微观粒子相互作用生长成超微粒再聚集成小粒子聚集体时, 如果没有外界干扰, 则 $D_0(k)$ 应能反映聚集单元之间相互作用的各向异性程度. $k=0$ 时对应于相互作用完全各向同性; $0 < k < 1$ 时相互作用是各向异性的, 磁性物质(铁、钴、镍等)的超微粒聚集体就呈现了相应的分形结构; $k=1$ 时则是相互作用极端各向异性的结果, 作为准一维体系的链状聚合物(如聚乙炔等)就是这种情况的实例.

- [1] F. Family, *J. Stat. Phys.*, **36**(1984), 881.
- [2] B. B. Mandelbrot, *Fractal: Form, Chance and Dimension*(Freeman, New York, 1977).
- [3] B. H. Zimm and W. H. Stockmayer, *J. Chem. Phys.*, **17**(1949), 1301.
- [4] G. R. Dobsen and M. Gorden, *J. Chem. Phys.*, **41**(1964), 2389.
- [5] P. G. de Gennes, *Biopolymers*, **6**(1968), 715.
- [6] 汪子丹、龚昌德, 物理学进展, **10**(1990), 1.
- [7] 邓昭镜, 超微粒与分形(西南师范大学出版社, 重庆, 1993).
- [8] 梁一平等, 物理学报, **44**(1995), 1244.
- [9] Liang Yi-ping, Deng Zhao-jing and Li Jian, *Chin. Phys. Lett.*, **11**(1994), 35.
- [10] 孙秀魁等, 物理学报, **41**(1992), 1842.
- [11] 丁菊仁、黄立基、柳百新, 中国科学(A辑), **20**(1990), 1229.
- [12] You-wei Du *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **61**(1987), 15.
- [13] C. Granqvist and R. Buhrman, *J. Appl. Phys.*, **47**(1976), 2200.
- [14] E. S. Sorensen and H. G. Fogedby, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 2770.

THE FRACTAL DIMENSION OF RESTRICTED-BRANCHED RANDOM FRACTAL

LIANG YI-PING

(Department of Physics, Southwest China Teachers University, Chongqing 630715)

JIANG YI-CHU

(Department of Mathematics, Southwest China Teachers University, Chongqing 630715)

(Received 7 February 1996)

ABSTRACT

The concept of restricted-branched random fractal is suggested and the fractal dimension has been calculated with the statistical theory of branched random growth. The result shows that the fractal dimension of ideal random-fractal would be between 2 and 4. Finally, a discussion about the linear degree of random fractal shows how it is related to the anisotropy of the interactions in physical systems.

PACC: 6116; 6240