

Paul 阱中共线三离子体系的经典动力学^{*}

施 磊¹⁾ 段宜武^{1),2)} 冯 芒¹⁾ 朱熙文¹⁾ 方细明¹⁾

¹⁾(中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

²⁾(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

(1997 年 11 月 3 日收到)

研究了在 Paul 阱囚禁场赝势作用下共线构形的三离子体系经典动力学特性. 尽管这是一个非线性体系, 但不存在混沌, 即体系在任何能量下运动都是规则的, 而相空间则由两个轨迹为对称和反对称周期(或准周期)轨道的 KAM 不变环面构成. 体系的两条最简单的周期轨道 S 和 A 的周期随能量 E 的下降而增大, 并在 E 趋于体系的最小值 $E_{\min} = 3.0$ 时分别为反对称和对称谐振动.

PACC: 3280; 2925; 3580

1 引 言

近年来, 作为对在 Paul^[1]阱实验中观察到的囚禁离子体系的“晶化”及其溶解^[2-4]和“射频加热”^[5]现象的一个可能的解释, Paul 阱的非线性特性引起了物理学家的极大兴趣. 理论上已对 Paul 阱中两离子体系的非线性动力学进行了详细研究^[6-11], 并发现了几个新的动力学区域和一些有趣的混沌图景. 这些结果, 不但有助于在实质上进一步理解囚禁离子物理学, 甚至在被称为即将引起加速器技术革命的晶化粒子束领域也有着实际的应用^[10], 因为 Paul 阱可以指出对于晶化束的产生和控制是危险或有益的新的动力学区域. 在这些涉及经典水平上的混沌研究的同时, 实验上已探测研究了两个囚禁离子量子光谱中的经典混沌的印记^[12]. 因此, Paul 阱中多粒子体系提供了强电磁场中氢原子和类碱金属 Rydberg 原子之外的又一个在原子水平上实验研究量子混沌问题^[13]的新的真实物理体系.

Paul 阱中的三离子体系不仅存在离子-离子间的库仑相互作用, 同时还存在离子-囚禁场间的相互作用. 众所周知, 无论是三体库仑问题还是三体天体力学的经典问题, 其动力学方程的解都是十分丰富而复杂的. 通常, 都是在一定物理模型下将三体问题简化为所谓的“限定性三体问题”进行求解. 如共线构形的三体库仑问题^[14], 以及有关 H_2^+ ^[15] 和 He ^[16] 的各种经典动力学模型, 等等.

本文研究 Paul 阱中共线三离子体系的经典动力学问题. 与有关 Paul 阱中两离子体系

^{*} 国家自然科学基金(批准号:19734060 和 19604013)资助的课题.

动力学的许多研究^[6,17-19]一样,从包括囚禁场的赝势阱对离子的作用,以及离子间的库仑相互作用的哈密顿量出发,计算分析三离子体系的动力学结构.根据 Poincaré 定理,进一步找出一些稳定的周期轨道,并对它们进行动力学分析.研究结果不仅加深了我们对体系的经典动力学的理解,而且有关周期轨道的结果可直接用于体系的半经典以及经典-量子对应的研究.

2 理论模型与基本方程

在赝势模型下,一个质量为 m 、电荷为 e 的离子在 Paul 阱中所受的囚禁势^[5]为 $\Phi = \frac{m}{2e}(\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2)$,其中 $r^2 = x^2 + y^2$, (x, y, z) 为阱中离子相对阱中心的位置坐标; ω_r 和 ω_z 分别为离子在 r 方向和 z 方向的久期运动频率.当不止一个离子囚禁于阱中时,离子间还存在库仑作用势 $\Phi^{\text{Coul}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j} \frac{1}{R_{ij}}$,其中 ϵ_0 为真空介电常量, R_{ij} 为离子 i 与离子 j 的间距.

对于三离子体系,实验上已观察到^[3]:当 $\omega_r \gg \omega_z$ 时,冷却的离子体系在 z 轴上形成共线构形.当离子在 z 轴上处于稳定的平衡构形时,令 $\omega = \omega_z$,考虑离子所受的库仑力与囚禁场作用力的平衡,可得离子间的平衡间距

$$d = \left(\frac{5e^2}{16m\omega^2\pi\epsilon_0} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

用(1)式中的 d 表示长度单位,以 $m\omega^2 d^2$ 作为能量单位,并引入无量纲时间 $\tau = \omega t$,得到 z 轴上共线构形的三离子体系的无量纲哈密顿量

$$H = H_{\text{cm}} + H_{\text{J}}, \quad (2)$$

其中 $H_{\text{cm}} = \frac{3}{2} \dot{Z}_c^2 + \frac{3}{2} \omega^2 Z_c^2$ 为质心系的哈密顿量.从这里起,符号上的点表示对无量纲时间 τ 求导. $Z_c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 为体系的质心质量; H_{cm} 为一个一维谐振子的哈密顿量,它的动力学解是平庸的,这里不再讨论; H_{J} 为体系在 Jacobi 坐标系中的相对运动的无量纲哈密顿量,其表达式为

$$H_{\text{J}} = p_\rho^2 + \frac{3}{4} p_\zeta^2 + V(\rho, \zeta),$$

$$V(\rho, \zeta) = \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{1}{3} \zeta^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{|\rho/2 + \zeta|} + \frac{1}{|\rho/2 - \zeta|} \right), \quad (3)$$

其中 Jacobi 坐标 $\rho = z_1 - z_2$, $\zeta = z_3 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $p_\rho = \frac{1}{2} \dot{\rho}$, $p_\zeta = \frac{2}{3} \dot{\zeta}$.

假设初始时有 $z_1 > z_3 > z_2$,那么由于离子间的库仑排斥,在任意时刻都有 $z_1 > z_3 > z_2$,即 $\rho/2 < |\zeta|$.图 1 为势能 $V(\rho, \zeta)$ 的等势线图.可以看到,离子运动被限制在 $|\zeta| \leq \rho/2$ 的范围.当 $\zeta = 0$, $\rho = 2$,即离子处于平衡位置时,体系具有最小势能 $V = V_{\text{min}} = 3.0$.当 $\rho/2$ 趋于 $|\zeta|$ 时,由于离子间的库仑排斥,势能 V 趋于无穷大.

由哈密顿量 H_j , 可得 Paul 阱中共线构形三离子体系的基本动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= 2 p_{\rho}, \\ \dot{p}_{\rho} &= -\frac{1}{2} \rho + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\rho/2 + \zeta)^2} + \frac{1}{(\rho/2 - \zeta)^2} \right) \right), \\ \dot{\zeta} &= \frac{3}{2} p_{\zeta}, \\ \dot{p}_{\zeta} &= -\frac{2}{3} \zeta + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{(\rho/2 + \zeta)^2} - \frac{1}{(\rho/2 - \zeta)^2} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

本文将通过对四维相空间方程组(4)的数值积分来分析讨论体系的相空间动力学结构和经典轨道的特性.

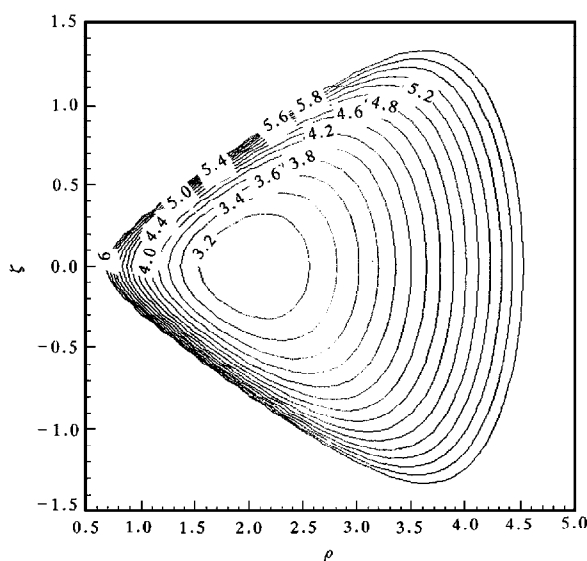


图1 势能 $V(\rho, \zeta)$ 的等势线图 坐标轴的长度单位为离子间的平衡间距 d

3 数值结果

在条件 $p_{\rho}=0$, $p_{\zeta}>0$ 下作出了体系的 Poincaré 截面. 图2为 $E=7.0$ 时的 Poincaré 截面. 可以清楚地看到, 在 ρ 轴上存在两个椭圆不动点 A 和 S. 不动点 A 以及围绕 A 点的 KAM 环线(图2(a))和不动点 S 以及围绕 S 点的 KAM 环线(图2(b))构成了一个完整的 Poincaré 截面(图2(c)). 在其它能量下的 Poincaré 截面的结构与 $E=7.0$ 时的类似, 没有“混沌海”, 也没有任何“岛屿”, 截面上所有的点都在 KAM 环线上, 只是不动点 A 和 S 在 ρ 轴上的位置随能量 E 而变化.

图3给出能量 E 处于 3.0—20 范围内不动点 A 和 S 的位置随能量 E 的变化曲线. $E=3.0$ 时, 体系处于最小能量, A 和 S 点均位于 $\rho=2$, $\zeta=0$, 对应离子处于平衡位置. 随能

量 E 的增加, A 点向 ρ 大的方向移动. S 点先随等势线 $V=E$ 与 ρ 轴的左交点向 ρ 小的方向移动, 至 $E=5.8$ 时又转向 ρ 大的方向移动, 此后, S 点位置的变化趋势不变. 有趣的是, 在 $E=5.8$ 的拐点处, 没有产生别的不动点, 即没有发生分岔.

由周期轨道稳定性的 Poincaré 定理知: 不动点 A 和 S 对应的相空间轨迹为体系的两个最简单的稳定周期轨道, 分别称之为 A 轨道和 S 轨道. 根据图 3 找出了不同能量下的

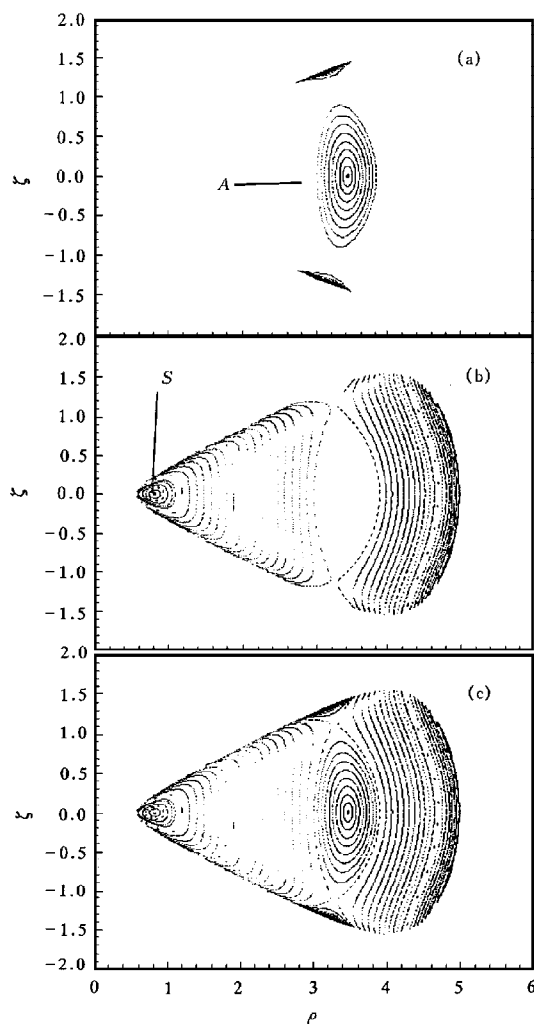


图2 $E=7.0$ 时体系的 Poincaré 截面 椭圆不动点 A , 围绕 A 的 KAM 环线(a)

和椭圆不动点 S , 围绕 S 的 KAM 环线(b)构成一个完整的 Poincaré 截面(c)

A 轨道和 S 轨道. 图 4 为 A 轨道和 S 轨道的周期随能量 E 的变化. 当体系的能量 E 趋于最小值 3.0 时, A 轨道的周期趋于 $T=2.6089069$, S 轨道的周期趋于 $T=3.6276987$. 随 E 的增加, A 轨道和 S 轨道的周期逐步减小. 我们以离子 3 到离子 1 和 2 的距离 $r_1 =$

$z_1 = z_3 = \rho/2 - \zeta$, $r_2 = z_3 - z_2 = \rho/2 + \zeta$ 为坐标描述 A 轨道和 S 轨道.

A 轨道为反对称型周期轨道. 体系的能量 E 较大时, r_1 和 r_2 以相同的周期作同步等幅方向相反的周期振动. 随 E 的减小, r_1 和 r_2 逐步趋于谐振动. 当体系的能量趋于 $E_{\min} = 3.0$ 时, A 轨道的运动模式类似于线性三原子分子的反对称谐振动^[16]; r_1 和 r_2 同步作方向相反的等周期等振幅的谐振动. 例如: $E = 7.0$ 时, r_1 和 r_2 以相同的周期 $T = 2.2851082$ 作同步等幅方向相反的周期振动(图 5(a)). $E = 3.01$ 时, r_1 和 r_2 以相同的周期 $T = 2.6063363$ 作同步等幅方向相反的谐振动(图 5(b)).

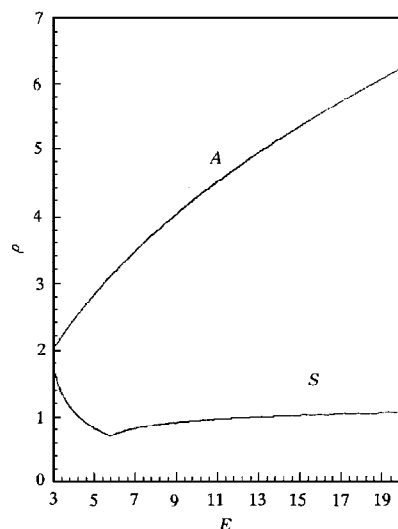


图 3 Poincaré 截面上的不动点 A 和 S 的位置
随能量 E 的变化 ($\zeta = 0$)

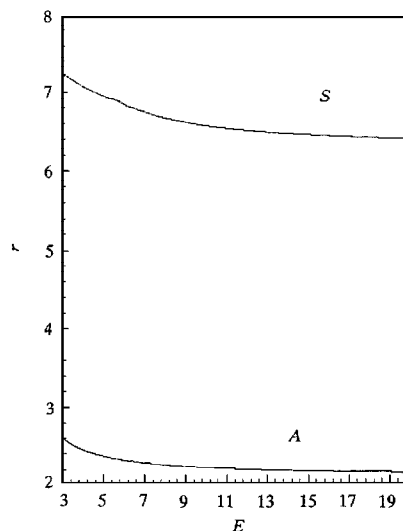


图 4 A 轨道和 S 轨道的周期随能量 E 的变化
($\zeta = 0$)

E 较大时, 在 S 轨道整个运动周期中, r_1 和 r_2 分别完成了两个周期振动: r_1 先作一个幅度较大周期稍短的振动, 接着作一个幅度较小周期稍长的振动; 与 r_1 相反, r_2 先作一个幅度较小周期稍长的振动, 接着作一个幅度较大周期稍短的振动(见图 6(a)). 由于在大部分时间中, r_1 和 r_2 振动方向相同, 因此, S 轨道具有对称运动的基本特征. 随能量 E 的减小, r_1 (或 r_2) 的两个周期中的振动和周期逐渐趋于相等, r_1 和 r_2 也逐步趋于同步同方向振动. 当体系的能量趋于 $E_{\min} = 3.0$ 时, S 轨道的运动模式和线性三原子分子的对称谐振动^[16]相同: r_1 (或 r_2) 的两个周期中的振动趋于等幅等周期的谐振动, r_1 和 r_2 趋于完全同步的等幅等周期的同向谐振动(见图 6(b)).

围绕 A 点和 S 点的 KAM 环所对应的周期(或准周期)轨道虽然很复杂, 但仍然分别保持着反对称型和对称型振动的基本特征. 图 7(a)和(b)为 $E = 7.0$ 时, $r_1 - r_2$ 平面上的 A 轨道和 S 轨道近邻的周期分别为 $T = 29.8253276$ 和 $T = 81.0671454$ 的复杂周期轨道. 与图 5 和图 6 中 $E = 7.0$ 时的 A 轨道和 S 轨道比较可知, 它们分别具有反对称和对称

振动的基本特征.

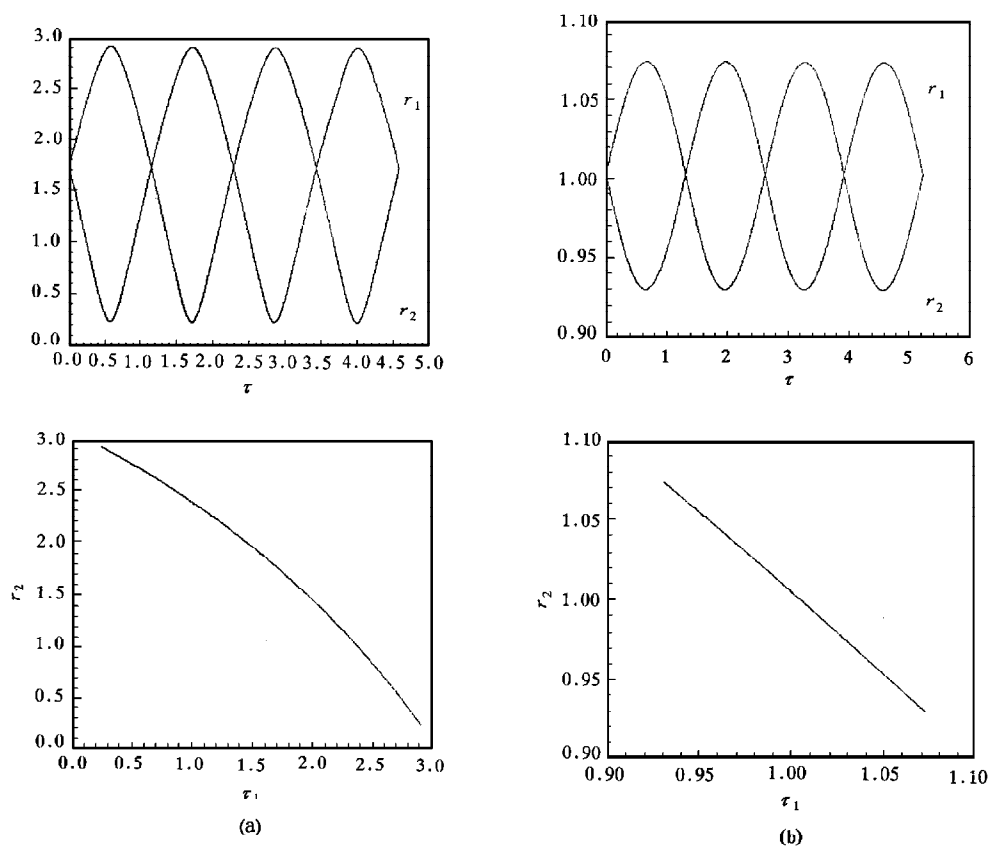


图 5 $E=7.0$ 时(a)和 $E=3.01$ 时(b)的 A 轨道

4 分析与讨论

由 Poincaré 截面可知:Paul 阱中的共线构形的三离子体系没有混沌运动,其相空间轨迹是被限制在两个 KAM 变环面上的周期或准周期轨道.这一结果可以通过对体系运动方程的分析得到.

引入四维相空间矢量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho \\ p_\rho \\ \zeta \\ p_\zeta \end{pmatrix}$, 体系的运动方程的形式可以写为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 那么, 两

个近邻轨道的变分满足 $\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ 为 Jacobi 矩阵, 其本征值反映轨道的特征^[7]. 由体系的运动方程(4)得 Jacobi 行列式

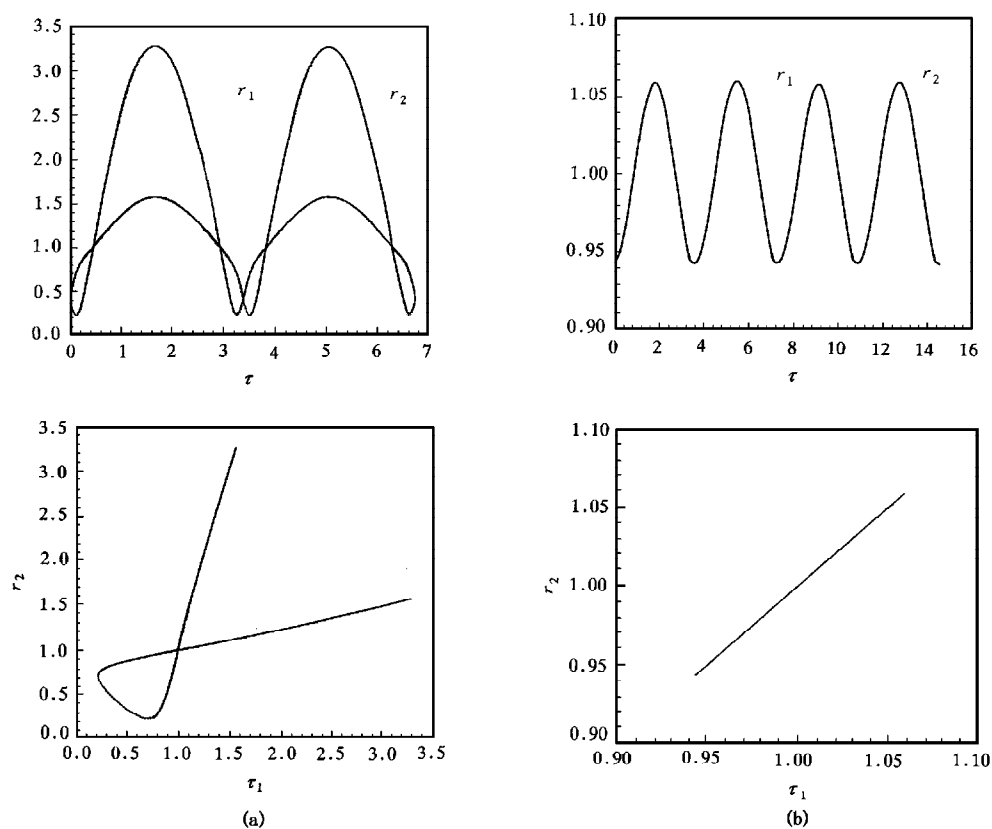


图 6 $E=7.0$ 时(a)和 $E=3.01$ 时(b)的 S 轨道

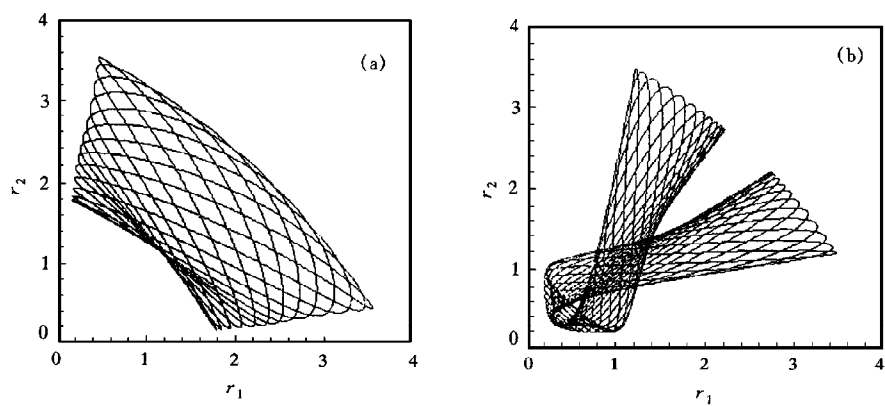


图 7 (a)为和 A 轨道近邻的一条周期长达 29.825327 的反对称型周期轨道,(b)为和 S 轨道近邻的一条周期长达 81.0671454 的对称型周期轨道

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ J_{10} & -\lambda & J_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3/2 \\ J_{30} & 0 & J_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

其中 $J_{10} = -\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \left(\frac{2}{\rho^3} + \frac{1}{(\rho/2 - \zeta)^3} + \frac{1}{(\rho/2 + \zeta)^3} \right)$; $J_{12} = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{(\rho/2 - \zeta)^3} - \frac{1}{(\rho/2 + \zeta)^3} \right)$;
 $J_{30} = J_{12}$; $J_{32} = -\frac{2}{3} - \frac{8}{5} \left(\frac{1}{(\rho/2 - \zeta)^3} + \frac{1}{(\rho/2 + \zeta)^3} \right)$; 本征值 $\lambda_i^2 = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, $B = 3J_{32} + 2J_{10}$, $\Delta = \left(\frac{3}{2}J_{32} - 2J_{10} \right)^2 + 12J_{12}^2$. 由于 $\rho/2 > |\zeta|$, 可知 $B < 0$, $\Delta > 0$, 且 $B^2 - \Delta = 12(J_{32}J_{10} - J_{12})^2 > 0$. 因此, $\lambda_i^2 < 0$, 即 λ_i 为纯虚数, 故有 Lyapunov 指数^[7]

$$\lambda_i^L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \operatorname{Re} \int_0^T \lambda_i(\tau) d\tau = 0. \quad (6)$$

这表明体系的相空间体积的变化率 $\frac{dV}{V d\tau} = \sum \lambda_i^L = 0$, 相空间运动轨迹是周期或准周期的. 由于上述结果与体系的能量无关, 因而, 体系在所有能量下的运动都是规则的.

在笛卡尔坐标系中用原来的量纲单位来分析 Paul 阱中共线三离子体系的基本运动模式. 三个离子在 z 轴上的平衡位置分别为 $z_1 = -z_2 = d$, $z_3 = 0$. 假设三个离子偏离平衡位置分别为 δz_1 , δz_2 和 δz_3 , 那么, 对于反对称振动有 $\delta z_1 = \delta z_2 = \delta z/2$, $\delta z_3 = \delta z$. 因此, 离子 3 所受的力为

$$F_3 = -m\omega^2 \delta z - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} f_A(\delta z), \quad (7)$$

其中 $f_A(\delta z) = \frac{1}{(d - 3\delta z/2)^2} - \frac{1}{(d + 3\delta z/2)^2} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{d^2} \left(\frac{3\delta z/2}{d} \right)^{2k+1}$. 当 $|\delta z/d| \ll 1$ 时, 有 $f_A(\delta z) = 6 \frac{\delta z}{d^3}$. 由(2)和(7)式得 $F_3 = -\frac{29}{2} m\omega^2 \delta z = -\frac{29}{2} m\omega^2 \delta z_3$. 由此得到离子 3 的振动频率为

$$\omega_a = \sqrt{\frac{29}{5}} \omega. \quad (8)$$

同样可以得到离子 1 和 2 的振动频率也为 ω_a .

对于对称振动模式, 有 $\delta z_1 = -\delta z_2 = \delta z$, $\delta z_3 = 0$. 这时离子 3 处于受力平衡状态, 离子 1 和 2 所受的作用力为

$$F_1 = -F_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} f_S(\delta z) - m\omega^2 (d + \delta d), \quad (9)$$

其中 $f_S(\delta z) = \frac{1}{(d + \delta z)^2} + \frac{1}{4(d + \delta z)^2} = \frac{5}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{d^2} \left(-\frac{\delta z}{d} \right)^k$. 当 $|\delta z/d| \ll 1$ 时, 得到离子 1 和 2 的谐振频率为

$$\omega_s = \sqrt{3} \omega. \quad (10)$$

(10)式的结果与实验中观察到的两离子的呼吸振动模式(对称小振动)的频率^[8]相同. 由于两离子体系不存在反对称振动, 而目前有关实验皆集中在两个囚禁离子体系, 因此(8)

式的结果尚未见实验报道. 预期(8)和(10)式的结果可能在以后的三离子的激光冷却实验中探测到.

用无量纲时间单位表示体系的反对称和对称谐振频率分别为 $\omega_a = \sqrt{\frac{29}{5}}$ 和 $\omega_s = \sqrt{3}$, 相应的振动周期为 $T_a = 2\pi/\omega_a = 2.6089069$ 和 $T_s = 2\pi/\omega_s = 3.6276987$. T_a 正是体系的能量趋于 $E_{\min} = 3.0$ 时 A 轨道的周期. 随能量的增加, 离子的振动幅度增大, (8)式不再成立. 从(7)式可知, 在反对称运动模式中, 离子感受到的作用力的方向始终与其位移方向相反, 作用力的大小随离子振动幅度增大而增大. 因此, 离子偏离谐振运动模式, 且轨道的周期随体系的能量增加而变短. T_s 则为图 4 中体系的能量趋于 $E_{\min}$ 时 S 轨道的周期的一半. 由于体系的能量趋于 $E_{\min}$ 时, r_1 (或 r_2) 的两个周期振动趋于等幅等周期的谐振运动, 此时的 S 轨道实际上包含两个完全相同的谐振运动周期轨道, 因此, S 轨道的实际周期为 T_s .

5 结 语

在考虑囚禁场的赝势对离子的作用和离子间的库仑相互作用的基础上, 导出了 Paul 阱中共线构形的三离子体系在 Jacobi 坐标系下的相对运动哈密顿量和动力学方程. 通过数值计算和分析讨论, 得到以下结论: Paul 阱中共线构形的三离子体系不存在混沌运动, 只存在规则运动. 体系的相空间轨迹为被限制在两个 KAM 环面上的周期 (或准周期) 轨道, 两个 KAM 环面上的周期 (或准周期) 轨道分别具有反对称型和对称型振动轨道的基本特征. 其中的 A 轨道和 S 轨道为体系的两个最简单的周期轨道, 两者在体系的能量 E 趋于最小值 3.0 时的运动模式分别为反对称和对称谐振运动, 振动的频率分别为 $\omega_a = \sqrt{29/5} \omega_z$ 和 $\omega_s = \sqrt{3} \omega_z$.

Paul 阱中三离子体系是非线性的, 但在共线构形时却只存在规则运动. 这对于 Paul 阱中的离子冷却实验具有实际意义: 混沌运动的囚禁离子体系, 因其连续的功率频谱包含囚禁场的 rf 频率, 将和囚禁场发生非线性共振而吸收囚禁场的能量, 这就是所谓的“rf 加热”效应. 规则运动的离子体系, 因其分离的功率频谱不包含 rf 频率而不存在“rf 加热”效应^[5]. 实验中可选取合适的工作点 (a, q) ^[5], 使 $\omega_z/\omega_r \ll 1$ 成立, 此时, 由于离子位于 z 轴上, 体系的运动是规则的, 无“rf 加热”效应, 因而更易于冷却, 且冷却后得到的“晶化”结构不易“熔解”. 这对于离子的高灵敏度高分辨率光谱的测量十分有益.

规则运动对于非线性体系的半经典量子化和量子-经典对应的研究十分重要. 我们的研究表明经典周期轨道与量子力学波函数分布具有很好的对应, 定态波函数模方基本上分布在经典周期轨道上^[13]. 通过经典周期轨道的半经典量子化, 可以得到系统的半经典量子化能级和波函数. 有关这方面的研究将另文报道.

[1] F. Wuerker, H. Shelton and R. V. Langmuir, *J. Appl. Phys.*, **30**(1959), 342.

[2] F. Dierdrich, E. Peik, J. M. Chen, W. Quint and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 2931.

[3] D. F. Wineland, J. C. Bergquist, W. M. Itano *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 2935.

- [4] J. Hoffnagle, R. G. DeVoe, L. Reyna and R. G. Brewer, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 255.
- [5] M. Dehmelt, *Adv. At. Mol.*, **3**(1967), 53.
- [6] R. Blümel, J. M. Chen, E. Peik *et al.*, *Nature*, **334**(1988), 309; R. Blümel, C. Kappler, W. Quint and H. Walther, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 808.
- [7] R. G. Brewer, J. Hoffnagle, R. G. DeVoe, L. Reyna and W. Henshaw, *Nature*, **344**(1990), 305; R. G. Brewer, J. Hoffnagle and R. G. DeVoe, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 2619.
- [8] J. Hoffnagle and R. G. Brewer, *Sciences*, **256**(1994), 213; *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 1828.
- [9] R. Blümel, *Physica Scripta*, **T59**(1995), 369; M. Moore, *Physica Scripta*, **T59**(1995), 434.
- [10] H. Walther, *Adv. At. Mol. & Opt. Phys.*, **31**(1993), 137; *Physica Scripta*, **T59**(1995), 360.
- [11] J. Shen, H. Yin and J. Dai, *Phys. Rev.*, **A55**(1997), 2159.
- [12] M. Moore and R. Blümel, *Phys. Rev.*, **A48**(1992), 3082.
- [13] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*(Springer, New York, 1990).
- [14] G. Su, *Phys. Lett.*, **A198**(1995), 315.
- [15] Yiwu Duan, J. M. Yuan and C. G. Bao, *Phys. Rev.*, **A52**(1995), 3497.
- [16] Yiwu Duan and C. G. Bao, *Acta Physica Sinica(Overseas Edition)*, **2**(1993), 170; 648.
- [17] G. Baumann, *Phys. Lett.*, **A162**(1992), 464; R. Blümel, *Phys. Lett.*, **A174**(1993), 174.
- [18] G. Baumann, T. F. Nonnenmacher, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 2682; D. Farrelly and J. E. Howard, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 851; R. Blümel, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 854; G. Baumann, T. F. Nonnenmacher, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 856.
- [19] Howard and D. Farrelly, *Phys. Lett.*, **A178**(1993), 62.

CLASSICAL DYNAMICS OF THREE IONS WITH COLLINEAR CONFIGURATION IN A PAUL TRAP^{*}

SHI LEI^{a)} DUAN YI-WU^{a), b)} FENG MANG^{a)} ZHU XI-WEN^{a)} FANG XI-MING^{a)}

^{a)} (State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Academia Sinica, Wuhan 430071)

^{b)} (Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

(Received 3 November 1997)

ABSTRACT

We have studied the properties of the classical dynamics of three ions with collinear configuration in a Paul trap. We found that no chaotic motion exists, and the motions of the ions are regular at any given energy E . The trajectories of the ion ensemble in phase space are of the anti-symmetric type and symmetric type periodic(or quasi-periodic) orbits, which are constrained in two KAM tori respectively. The simplest trajectories of the ensemble are periodic orbit A and periodic orbit S. When E tends toward the minimum energy $E_{\min} = 3.0$ of the ensemble, the motions of A orbits and S orbits tend towards the anti-symmetric and symmetric harmonic oscillations, respectively.

PACC: 3280; 2925; 3580

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China under the Grant Nos. 19734060 and 19604013.