

双参数激光振荡输出系统中 混沌的控制规律

张 旭

(东北师范大学分析测试中心, 长春 130024)

刘秉正

(东北师范大学物理系, 长春 130024)

(1997 年 6 月 13 日收到; 1997 年 7 月 23 日收到修改稿)

研究了双参数激光振荡输出系统中混沌行为的控制问题, 给出了控制混沌的不同参数变化方程, 并进行了比较. 数值计算结果表明: 随着控制参数的改变, 激光振荡输出的混沌态可控制到 1 周期、2 周期、... 2^n 周期. 控制混沌的参数变化方程遵循特定的规律. 最后, 对相关问题进行了分析和讨论.

PACC: 0545; 4255

1 引 言

激光技术利用混沌控制可能实现重要改进, 即可望获得单色性好、品质优异、超大功率的各类特殊用途的激光器. 因此, 混沌控制的理论分析就显得十分重要. 在研究含有增益介质的环形腔激光振荡输出时, 文献[1]得到如下具有双参数的一维迭代方程,

$$I_{n+1} = I_n \exp\left(\frac{\alpha}{1 + I_n} - \Gamma\right), \quad (1)$$

式中变量 I 代表(归一化的)光场强度, 参数 α , Γ 分别代表增益系数和腔损耗. 文献[1]着重研究了增益变大时激光振荡输出由稳态经 2^n 分岔到混沌态的发展过程以及延时 t_r 带来的影响. 文献[2]计算了此系统的混沌特征量. 在上述基础上, 本文研究将混沌态下的系统控制到 1 周期、2 周期、...32 周期, 并给出了参数控制方程.

迄今已经提出了几种控制混沌的方法^[3-8], 其中 OGY 方法^[4]主要是针对离散系统. 我们利用 OGY 方法, 并对其进行了扩展, 从理论上数值化地研究了双参数激光振荡输出系统中的混沌控制规律, 研究了改变系统中不同参数对控制效果的影响, 以及控制时间、控制参数变化与控制结果的相互关系. 这些都可为实际工作提供重要的理论依据.

2 参数控制方程

令方程(1)中 $\alpha = \alpha_0$, $\Gamma = \Gamma_0$, 此时系统处于混沌态. 采用 OGY 方法及文献[3]的方法, 对不同的参数进行扰动, 利用混沌运动对参数扰动敏感和混沌轨道的遍历性, 可将混

沌运动控制到一定的轨道上. 我们的方法与 OGY 方法及文献[3]的方法不同之处在于: 参数控制方程在控制周期轨道时, 允许参数有较大的变化, 这有可能改变原吸引子的结构, 即被稳定下来的周期轨道不一定都落在原来的吸引子上, 这就克服了 OGY 方法的局限, 从而使得混沌控制更容易实现, 而且可获得更好的控制结果. 我们得到的三个参数控制方程为

$$I_{n+1} = I_n \exp \left(\frac{\alpha_0 + \Delta \alpha}{1 + I_n} - \Gamma_0 \right), \quad (2)$$

$$I_{n+1} = I_n \exp \left[\frac{\alpha_0}{1 + I_n} - (\Gamma_0 + \Delta \Gamma) \right], \quad (3)$$

$$I_{n+1} = I_n \exp \left[\frac{\alpha_0 + \Delta \alpha'}{1 + I_n} - (\Gamma_0 + \Delta \Gamma') \right]. \quad (4)$$

方程(2)为调解参数 α 的控制方程, 方程(3)为调解参数 Γ 的控制方程, 方程(4)为同时调解参数 α, Γ 的控制方程.

$\Delta \alpha, \Delta \Gamma, \Delta \alpha', \Delta \Gamma'$ 导出方法的基本思想与 OGY 方法有类似之处. 首先, 当参数 α, Γ 分别取 α_0, Γ_0 时, 系统(1)式处于混沌运动状态, 系统的不动点 $I_f = f(I_f, \alpha_0, \Gamma_0)$ 是失稳的. 在任何初始条件下, 略去暂态过程, 系统的状态点在相空间都构成混沌吸引子. 由于遍历性, 在 I_f 点附近做线性展开后有

$$I_{n+1} = I_f + \left. \frac{\partial f}{\partial I_f} \right|_{I_f, \alpha_0} \Delta I + \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \right|_{I_f, \alpha_0} \Delta \alpha + \text{高次项}.$$

为了实现最优控制, 令 $I_{n+1} - I_f = 0$, 略去高次项, 可得到

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{\alpha_0 I_f - (1 + I_f)^2}{I_f(1 + I_f)} (I_n - I_f) \\ &= g_{\alpha_0}(I_f)(I_n - I_f). \end{aligned}$$

若控制目标(控制点)用 I_c 表示, 此时 $I_c = I_f = \frac{\alpha_0}{\Gamma_0} = 1, \Delta \alpha = 0$. 其次, 考虑 $I_f \neq \frac{\alpha_0}{\Gamma_0} = 1$, 则

$\Delta \alpha \neq 0, I_c = \frac{\alpha_0 + \Delta \alpha}{\Gamma_0} = 1$. 我们将 I_f 扩展, 用 I_v 表示, 得到 $\Delta \alpha = g_{\alpha_0}(I_v)(I_n - I_v)$, 系统(1)

式取 $\alpha = \alpha_0, \Gamma = \Gamma_0$ 时, 随着 I_v 的改变, 用方程(2)即能获得不同的控制结果. 同理, 可得到 $\Delta \Gamma, \Delta \alpha', \Delta \Gamma'$. 其中求 $\Delta \alpha'$ 和 $\Delta \Gamma'$ 时, 要用到 $\Delta \alpha'^2 + \Delta \Gamma'^2$ 取极小值的条件. $\Delta \alpha, \Delta \Gamma, \Delta \alpha', \Delta \Gamma'$ 分别为

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= g_{\alpha_0}(I_v)(I_n - I_v) = \frac{\alpha_0 I_v - (1 + I_v)^2}{I_v(1 + I_v)} (I_n - I_v), \\ \Delta \Gamma &= g_{\Gamma_0}(I_v)(I_n - I_v) = \frac{(1 + I_v)^2 - \alpha_0 I_v}{I_v(1 + I_v)^2} (I_n - I_v), \\ \Delta \alpha' &= g'_{\alpha_0}(I_v)(I_n - I_v) = \frac{\alpha_0 I_v - (1 + I_v)^2}{I_v(1 + I_v)[(1 + I_v)^2 + 1]} (I_n - I_v), \\ \Delta \Gamma' &= g'_{\Gamma_0}(I_v)(I_n - I_v) = \frac{(1 + I_v)^2 - \alpha_0 I_v}{I_v[(1 + I_v)^2 + 1]} (I_n - I_v), \end{aligned}$$

其中 I_v 为控制参量(变量).

我们应用方程(2),(3),(4),使 I_v 在一定的连续区间内取不同的值,即可将混沌系统有效地控制到 1P, 2P, ..., 32P 等周期轨道.须指出的是,当 $I_v = \alpha_0 / \Gamma_0 - 1$, 即取不稳不动点 I_f 时,系统被控制到 OGY 方法实现控制的周期轨道上.此时, $\Delta\alpha, \Delta\Gamma, \Delta\alpha', \Delta\Gamma'$ 终值为零.

3 数值计算结果

现在研究方程(1)取 $\alpha = \alpha_0 = 15.6, \Gamma = \Gamma_0 = 11$ 时的情形.文献[1]已经证明,此时系统处于混沌状态.

3.1 控制到不动点 $I_v = I_f$ 时参数控制方程的控制结果比较

$I_v = \alpha_0 / \Gamma_0 - 1$ 是不稳不动点 I_f , 此时控制点(控制目标) $I_c = I_f$. 应用方程(2),(3),(4)分别对系统进行控制,表 1 给出了三个参数控制方程的控制结果.起控距离 ϵ 是起控点 I_n 与控制点 I_c 之间的距离, $d(I_{n+1}, I_c)$ 是经 n 步控制后系统点与控制点 I_c 之间的距离.由表 1 可以看出,当控制点 $I_c = I_f = \alpha_0 / \Gamma_0 - 1$ 时,三个方程的控制效果差别不大.对于双参数系统,在实验中,往往只改变单个参数.由表 1 可知,在双参数激光振荡输出系统中,调节参数 α 更好些.表 1 中控制参数 $I_c = 0.418181818, \epsilon = 2.65824489 \times 10^{-2}$.

表 1 $I_v = I_f$ 时, 方程(2),(3),(4)的控制结果比较

调节参数	控制步数	$d(I_{n+1}, I_c)$
α_0	3	$< 10^{-14}$
Γ_0	4	$< 10^{-14}$
α_0, Γ_0	3	$< 10^{-14}$

3.2 控制到其他周期 $I_v \neq I_f$ 时的控制结果

以方程(2)为例(方程(3),(4)具有相同的控制规律),当 $I_v = I_f$ 实现控制时, $\Delta\alpha$ 最终趋于 0; 当 $I_v \neq I_f$ 时, $\Delta\alpha \neq 0$, 此时被稳定下来的周期轨道就不一定都落在原吸引子($\alpha = \alpha_0, \Gamma = \Gamma_0$)上,这一点使混沌系统更容易实现控制.由控制方程(2)知,当 $\exp(\dots) = 1$ 时,系统就会处于稳定的 1P 轨道上,此时 $I_{n+1} = I_n = I_c$, 控制点 I_c 所遵循的方程为

$$I_c = \frac{\alpha_0 - g_{\alpha_0}(I_v) I_v - \Gamma_0}{\Gamma_0 - g_{\alpha_0}(I_v)}. \quad (5)$$

随 I_v 的改变,方程(5)的 I_c 值与方程(2)的 I_{n+1} 值在所有的 1P 轨道上完全相同,但随着 $\Delta\alpha$ 的增大,方程(2)出现了由倍周期分岔到混沌态的发展过程,而方程(5)无此特征.图 1 给出了用方程(2)进行多步控制的结果. $n < 1000$ 时,系统处于未控的混沌态.我们选取 $\epsilon < 0.1$, 在 $n = 1000$ 时开始起控,取不同的 I_v 值,分别得到了 1P, 2P, 4P, 8P, 16P 和 32P 的控制结果,随着周期的增高,稳定到相应轨道上的叠代次数亦随之增加.图 1(a)给出了

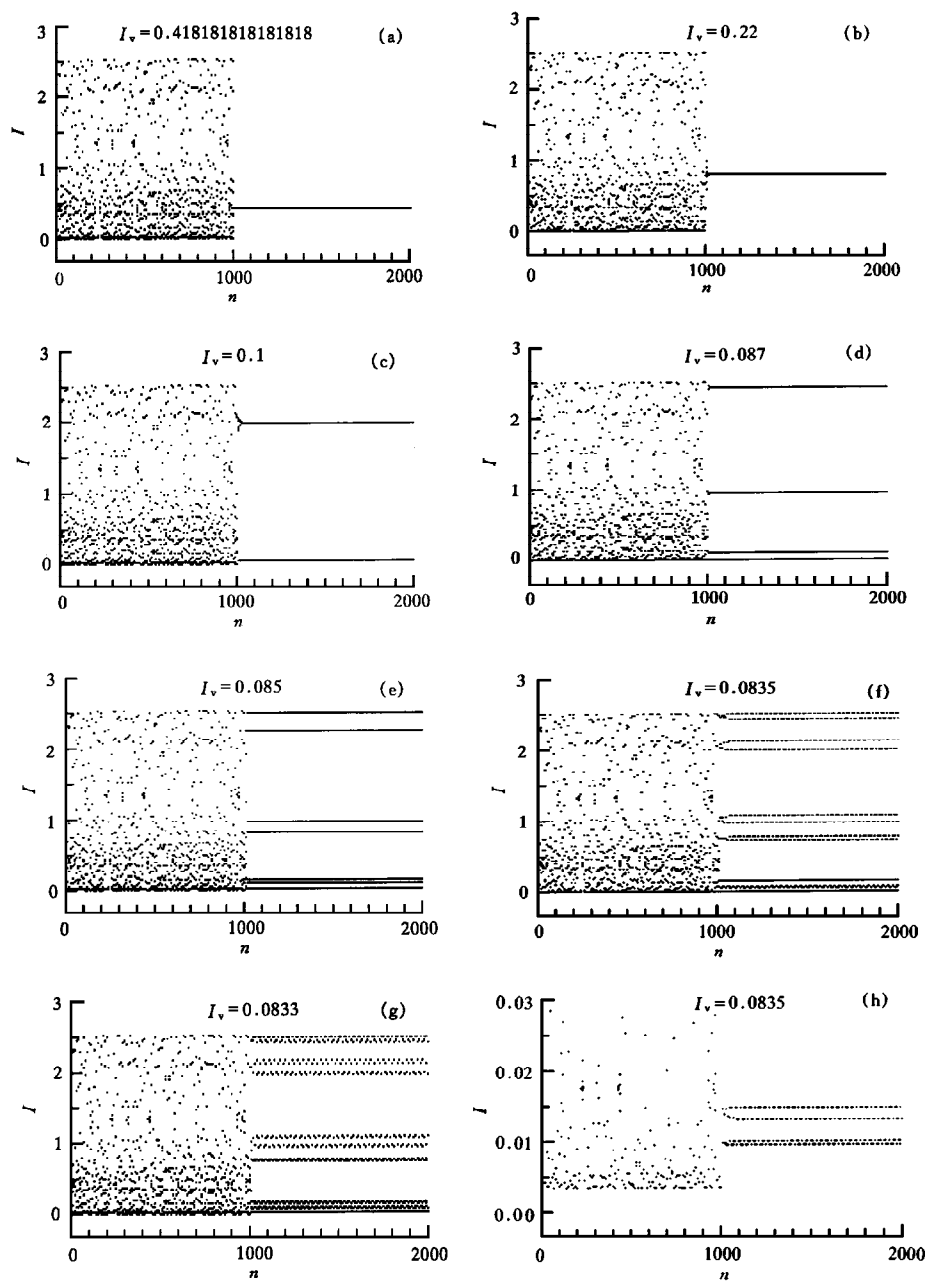


图 1 方程(2)的控制结果 $n=1000$ 时起控, $\epsilon < 0.1$

对混沌态中不动点的控制结果, 此时 $I_c = I_f$, 不动点稳定后 $\Delta\alpha = 0$; 图 1(b), (c), (d), (e), (f) 和 (g) 分别给出了控制到不稳定 $1P$, $2P$, $4P$, $8P$, $16P$ 和 $32P$ 的情形. 控制稳定后, $\Delta\alpha \neq 0$. 图 1(h) 为 (f) 中最下端的放大, 图 1(h) 的 4 条周期轨道代表 (f) 中最下端的一条粗

线,从而可辨认出图 1(f)是被稳定住的 16P 轨道.表 2 将图 1 中稳定 1P 轨道的两个结果与其他结果进行了比较.结果表明:当 $I_v = I_f = I_c$ 时,实现的控制是时间最优控制,但控制输出的光场强度并不是最优的. $I_v = 0.22$ 时,输出的光强为 $I_v = I_f$ 时输出光强的近 2 倍.

表 2 方程(2)控制输出光场强度与控制时间、控制结果的比较				
I_v	I_c	ε	$d(I_{n+1}, I_c)$	控制步数
0.22	0.8000079	2.32644×10^{-2}	$< 10^{-7}$	31
0.4181818	0.4181818	2.658244×10^{-2}	$< 10^{-7}$	2
0.5	0.2500000	1.236160×10^{-2}	$< 10^{-7}$	10

3.3 参数变化方程的控制规律

方程(1)随着参数的改变,激光振荡输出由稳态经 2^n 分岔过渡到混沌态.而控制混沌的参数变化方程(2),(3),(4)亦具有相同的特征.根据这一特征,我们将混沌态的激光振荡输出分别控制到不同的周期轨道上.图 2 给出了 $\alpha_0 = 15.6$, $\Gamma_0 = 11$, 方程(2),(3),(4)随控制参数 I_v 改变的数值计算结果(去掉暂态过程).图 2 清楚地显示,随 I_v 的改变控制输出

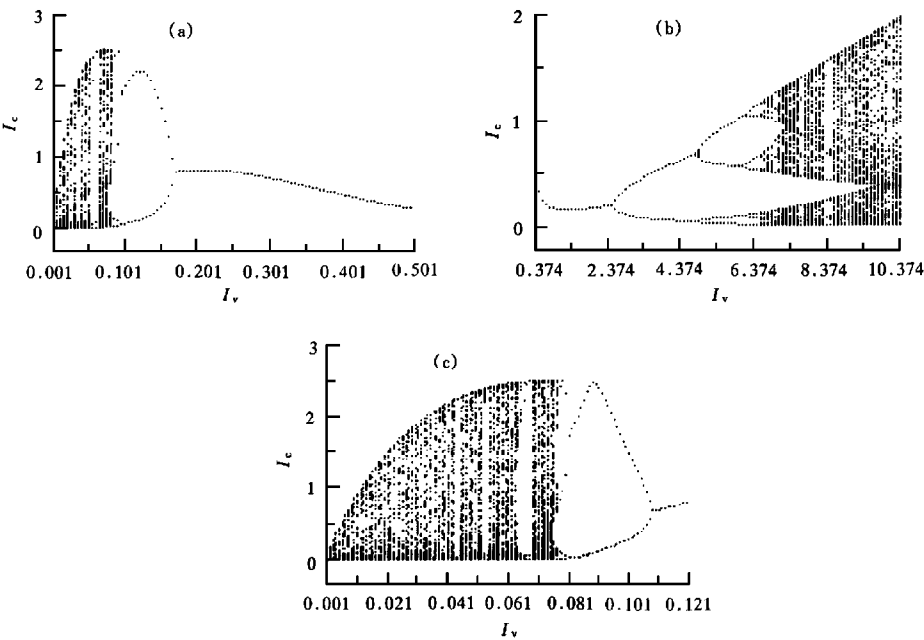


图 2 参数控制方程的控制规律 (a)为方程(2)的计算结果, (b)为方程(3)的计算结果, (c)为方程(4)的计算结果

的光场强度 I_c 由稳态经 2^n 分岔向混沌过渡的情况.三个方程只在 $I_v = I_f = \alpha_0 / \Gamma_0 - 1$ 时,将系统控制到相同的周期轨道上,当 $I_v \neq I_f$ 时,控制结果不同. I_c 在一定参数范围内的确定性变化规律,为实现实际的混沌系统所需的控制提供了重要的理论依据.

4 讨 论

本文给出的参数控制方程有以下特点:

1) 参数控制方程使用 OGY 方法及文献[3]的方法扩展后得到, 而且其控制规律亦适用于其他的离散映象.

2) 由于参数控制方程的改变量最终取值不一定为零, 并允许参数有较大的变化, 因此受控后的稳定周期不一定都落在原混沌吸引子上, 这与 OGY 方法不同.

3) 由于 I_c 的可预见性, 给定相应的 I_v 值即可将混沌系统选择性地控制到所希望的周期轨道上, 并可得到优于 OGY 方法的控制结果.

4) ϵ 在吸引子内的取值不受严格的限制, 所以不需要等待混沌轨道进入所希望的控制轨道极小的邻域内再施加控制. 增大 ϵ 的取值只增加叠代次数, 这为实际操作带来了方便.

5) 由于 OGY 方法实质上是一种线性反馈法, 所以当对控制方程进行扩展, I_v 远离控制点 I_c 时, 非线性因素就变得越来越重要, 参数控制方程出现了由倍周期分岔通向混沌的特殊规律性.

我们认为, 掌握混沌的控制规律, 对实际系统的混沌控制将具有重要的指导作用.

- [1] 谭维翰、陆伟平, 科学通报, **33**(1988), 17.
- [2] 张 旭等, 东北师范大学学报, (1)(1995), 37.
- [3] 童培庆等, 物理学报, **44**(1995), 1551.
- [4] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
- [5] E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1953.
- [6] B. A. Huberman, E. Lumer, *IEEE Trans. Circuits and System*, **37**(1990), 547.
- [7] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 421.
- [8] W. S. Ni, T. F. Qin, *Chin. Phys. Lett.*, **8**(1991), 1123.

RULE FOR CONTROLLING CHAOS IN A TWO-PARAMETER LASER OSCILLATION OUTPUT SYSTEM

ZHANG XU

(Analysis and Test Center, Northeast Normal University, Changchun 130024)

LIU BING-ZHENG

(Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024)

(Received 13 June 1997; revised manuscript received 23 July 1997)

ABSTRACT

We study the problem of controlling chaotic behavior of a two-parameter laser system. We give different equations for controlling chaos with different parameters and compare their effects. Numerical results show that chaotic states of laser output can be controlled to $1P, 2P, \dots, 2^n P$, P standing for period. We find that each equation obeys a definite rule. Finally, we analyze and discuss some related problems.

PACC: 0545; 4255