

能谱曲线的平展与量子混沌^{*}

蒋亦民

(中国原子能科学研究院, 北京 102413)

(1997 年 5 月 7 日收到; 1997 年 9 月 19 日收到修改稿)

指出了在利用能谱曲线分析量子混沌现象时, 除了要做能量平展外, 还应对曲线参数作平展处理. 通过归一能谱曲线的均方根斜率, 给出了一个普适的平展参数变量的方法. 另外, 如能谱曲线有平均倾斜现象, 在参数平展前还应做相应的能量移动使其消除. 讨论了经过平展处理后的能谱曲线的曲率与 Gaspard-Rice-Mikeska-Nakamura 无量纲曲率公式的关系.

PACC: 0545; 0300

1 引 言

近十几年来的许多研究结果表明, 通过考察保守和束缚量子系统的能谱性质, 人们可了解与之对应的经典系统中是否出现混沌动力学行为^[1]. 通常, 利用能谱性质来分析量子系统中的混沌现象有两种做法. 一是考察量子能级的最邻近间距的涨落性质. 这目前已被普遍认可和采纳的方法. 另一个是研究能级随参数变化情况. 当系统中出现经典混沌时, 从这些能级曲线中可观察到大量的免交叉以及它们的重叠^[2]. 这将使曲线发生频繁弯折, 形成从视觉上看起来相对混乱的形貌^[3]. 这个弯折现象还常常通过计算能级关于参数的二阶导数, 即能级曲线的曲率, 加以定量研究^[4]. 需要强调的是, 无论是用上述哪种方式, 我们都要对原始的能谱或能谱曲线数据作一些处理, 以便除去那些不能明确地反映混沌情况的、由所用模型的具体形式造成的干扰, 从而得到能普遍适用于任何哈密顿模型的、且仅反映其经典混沌度的物理量值. 只有通过这样的量, 我们才可能把所研究的具体系统与无规矩阵理论模型进行比较和对照. 另外, 在定量研究能谱性质与描述经典混沌的量值(如发生混沌的区域在经典相空间中所占的比例, K-熵等)之间的关系时, 也必须采用这样的量方有意义. 例如, 在分析计算能级间距涨落性质与经典混沌或无规矩阵模型之间的关系时, 人们必须对能谱作所谓的平展(unfolding)处理, 即通过调整能量的标度, 使在这个新的能量标尺下, 谱的平均密度呈均匀状态, 达到除去所研究的具体系统中那些不与混沌直接相关的动力学干扰的目的. 如果我们希望研究分析的是能级曲线, 除了需要对能量作上述平展外, 还面临如何再标度参数(又叫参数平展)的问题. 本文将解决这个问题. 它对细致研究经典混沌在量子谱中的表现, 尤其是定量数值研究, 有着重要的意义.

我们为了解决参数平展问题所用的方法很相似于人们熟知的、在做能量平展时所用的

^{*} 国家教育委员会留学回国人员科研 启动基金资助的课题.

方法.在那里,平均能级密度是一个不反映混沌情况,但与具体系统的其它动力学行为相关的量,因为与混沌有直接联系的是谱涨落,不是平均能级密度.但是,我们可通过归一平均能级密度,除去哪些与混沌无关的动力学因素.对能级曲线,我们注意到,描写曲线倾斜情况的均方根斜率可扮演与平均能级密度相似的角色,因为混沌是与曲线的弯折度(即曲率)相关而与倾斜率无关.类似地,通过归一均方根斜率,我们将获得一个普遍适用的、平展和标度参数的方法.另外,如果谱曲线有平均斜度,在参数平展前,还要考虑做相应的能量移动把它消除掉.有关这方面的详细内容将在下节给出.

最近,文献[5,6]报道了一些无规矩阵模型的曲率分布情况.细致地研究和考察实际混沌系统的曲率分布是否具有这些无规矩阵模型所规定的普适性,或在什么情形下才具有这个普适性,是目前量子混沌研究领域里很感兴趣的课题^[7].显然,这里平展是一个不可缺少的步骤.但参数平展问题在以往的工作中一直没引起足够的重视.经过能量和参数平展后的能谱曲线的曲率将是无量纲的.利用前面的平展思路,我们能推出这个无量纲曲率的公式.它的分布才是希望验证是否有上述普适性的量.值得指出的是,对一些无规矩阵模型,我们的无量纲曲率将化成如在文献[5,6]中使用的曲率公式(这里略去了不重要的常数因子 $\beta\pi$)

$$k_m^{\text{GRMN}} = \frac{d^2 E_m / d\alpha^2}{\rho_0 [\langle (dE_n / d\alpha)^2 \rangle_n - \langle dE_n / d\alpha \rangle_n^2]}. \quad (1)$$

因此,我们的平展思想与这些无规矩阵工作是相互协调的.这个适合于用来分析无规矩阵模型的曲率公式(1)还被一些作者直接用来研究实际动力学系统的量子混沌现象^[7,8].但应该注意的是,尽管(1)式是无量纲的,对实际混沌系统,直接用它计算出的曲率分布可能还不是可用来描写其普适行为的量.因为,首先量子系统的能谱沿能量方向往往没有均匀性,而(1)式要求谱有能量均匀性^[5,6].这一点得到了广泛的注意.人们在用(1)式计算曲率时,像研究能级间距涨落的普适性那样,通常都先对谱作了能量平展处理.第二,我们不难验证,(1)式只对线性参数变换保持不变,对一般的非线性参数变换,它不是协变的.因此,按照(1)式定义的 Gaspard-Rice-Mikeska-Nakamura(缩写为 GRMN)曲率的分布将(在非线程度下)敏感于哈密顿量对能量和参数的标度方式,还有可能不是我们所期望的普适量.它不能彻底地解决平展问题.这是 GRMN 曲率与我们的无量纲曲率的区别之处.在本文里我们将看到,仅当谱沿能量方向是均匀的,以及平均量 $\langle (dE_n / d\alpha)^2 \rangle_n$ 和 $\langle dE_n / d\alpha \rangle_n$ 与参数 α 无关这些条件被满足时,也就是说,当谱曲线在能量和参数两方向上都是均匀的时候(不一定要归一),我们引入的无量纲曲率才与 k_m^{GRMN} 一致.因此,无量纲的 GRMN 曲率公式相当于只在线性精度下计入了平展问题.如果系统表现出了较强的非线性行为(即上面的平均量显著地依赖于参数 α),将有必要采用依照我们给出的一般参数平展方法,而导出比(1)式更精确的曲率公式.与能级间距不同,曲率是二阶导数,本身是一个非线性量,平展中的非线性效应会对它有更大的影响.这时,仔细地处理平展问题是很重要的.最后还值得指出的是,某些无规矩阵模型(如形式像(18)式那样的 2×2 高斯正交系综等)的能谱曲线在参数方向上已经是均匀的,它们的曲率的确像文献[5,6]所指出的那样,由(1)式给出.因此本文根据平展方法得出的(1)式的非线性修正对这些文献工作没有影响.

2 能谱曲线的平展及无量纲曲率

考虑一个由与时间无关的哈密顿量 H 定义的束缚量子系统. 它的离散能级记为 E_n^0 , $n=0, 1, 2, \dots$. 假设此系统受到一组非平凡的、由实参数 α 标记的扰动 $V(\alpha)$. 这时, 以 $H+V(\alpha)$ 为哈密顿量的总系统将有能级 $E_n(\alpha)$. 不失一般性, 我们可取 $V(\alpha)|_{\alpha=0}=0$, 并认为 $E_n(\alpha)$ 是按大小排序的, 即对任意的 n 和 α , 都有 $E_{n+1}(\alpha) \geq E_n(\alpha)$. 由前一个约定, 有 $E_n(\alpha)|_{\alpha=0} = E_n^0$ 成立. 下面我们将把注意力集中于那些 E_n^0 位于以 E 为中心, ΔE 为宽度的能量区间 $(E-\Delta E/2, E+\Delta E/2)$ 内的能级. 它们可记为 $\{E_n^0, n \in \mathcal{N}\}$, 其中 $\mathcal{N}$ 是按照 $\mathcal{N} = \{n \text{ 使得 } E_n^0 \in (E-\Delta E/2, E+\Delta E/2)\}$ 定义的由整数组成的集合. 在扰动 $V(\alpha)$ 下, 这些能级变成曲线族 $\{E_n(\alpha), n \in \mathcal{N}\}$. 当参数 α 的变化范围不大时, 还可进一步假设这些能级曲线之间互不交叉¹⁾, 因此每根能级曲线可看成是光滑的.

我们已经知道, 能谱曲线 $\{E_n(\alpha), n \in \mathcal{N}\}$ 能够反映出系统的运动是否存在经典混沌行为, 因为后者会导致能级间的排斥及免交叉等现象. 但是, 能级曲线的大小数值, 一般还会与所考虑的动力学系统, 即 $H+V(\alpha)$ 的具体形式有关. 为了去掉这些非普适的动力学因素, 在定量研究和数值计算能谱曲线中有关混沌的性质时, 往往需要先对其作平展处理. 也就是说, 需要重新对能量和参数 α 作标度. 按照在研究能谱间距涨落时建立起来的理论, 我们已经知道了能量的平展方法, 即用在半经典意义下定义的平均能级密度累积函数²⁾ $\Theta(\alpha, E)$ 来重新标度能量. 因此, 经过能量平展后的能级曲线由下式定义的 $e_n(\alpha)$:

$$e_n(\alpha) = \Theta(\alpha, E_n(\alpha)) \quad (2')$$

给出. 上述做法的重要特征是, 在半经典近似 $\hbar \rightarrow 0$ 和 $\Delta E \rightarrow 0$ 下, 谱 e_n 的平均间距为 1, 即具有归一性. $\{e_n(\alpha), n \in \mathcal{N}\}$ 还可能会有不为零的平均倾斜度. 这时我们可引入下面的能量移动

$$e_n(\alpha) = \Theta(\alpha, E_n(\alpha)) - \int \left\langle \frac{d\Theta(\alpha, E_k(\alpha))}{d\alpha} \right\rangle_k d\alpha, \quad (2)$$

使 $\langle de_n/d\alpha \rangle_n = 0$. 注意这个移动不影响谱的间距涨落性质. 上式等号右边最后一项应理解成不定积分. 平均操作 $\langle \dots \rangle$ 的定义见下面的公式(4).

为解决参数平展问题, 我们引入由(2)式给出的能谱曲线族 $\{e_n(\alpha), n \in \mathcal{N}\}$ 的均方根斜率的概念. 它的定义是

$$b(\alpha) = \sqrt{\lim_{\Delta E \rightarrow 0} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} \left(\frac{de_n}{d\alpha} \right)^2}. \quad (3)$$

如果记任何一数组 A_n 的半经典平均为

$$\langle A_n \rangle_n = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} A_n, \quad (4)$$

¹⁾ 我们可不失一般地设系统哈密顿量没有点对称, 因此没有与点对称有关的交叉现象. 出现其它形式的交叉是很偶然的, 在半经典平均下不影响本文讨论的内容, 可予以忽略.

²⁾ 平均能级密度累积函数(cumulative mean-level density)大致为小于 E 的能级的数目.

(3)式可写成

$$b = \sqrt{\left\langle \left(\frac{de_n}{d\alpha} \right)^2 \right\rangle_n}. \quad (5)$$

它显然是斜率 $de_n/d\alpha$ 的平方的半经典平均后的根. 现在, 让我们对参数 α 定义一新的标尺 $\tilde{\alpha}$, 使得在这个标尺下, 能谱曲线 $\{e_n(\tilde{\alpha}), n \in \mathcal{N}\}$ 的均方根斜率为 1 (又称归一化). 注意这个做法与能量的平展方法很相似. 按照这个规则, 不难得出 $\tilde{\alpha}$ 与 α 之间的关系为

$$\tilde{\alpha} = \int_0^\alpha b(\alpha') d\alpha'. \quad (6)$$

的确, 由(5), (6)式和 $de_n/d\tilde{\alpha} = (d\alpha/d\tilde{\alpha})(de_n/d\alpha) = b^{-1}(de_n/d\alpha)$, 我们有能谱曲线 $\{e_n(\tilde{\alpha}), n \in \mathcal{N}\}$ 的均方根斜率为

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{de_n}{d\tilde{\alpha}} \right)^2 \right\rangle_n} = \frac{1}{b} \sqrt{\left\langle \left(\frac{de_n}{d\alpha} \right)^2 \right\rangle_n} = 1. \quad (7)$$

显然, 经过了平展处理后的能谱曲线 $\{e_n(\tilde{\alpha}), n \in \mathcal{N}\}$ 是无量纲的.

在解决了如何处理平展问题后, 我们能很自然地定义无量纲曲率为

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{d^2 e_m}{d\tilde{\alpha}^2} \\ &= \frac{1}{b^2} \left(\frac{d^2 e_m}{d\alpha^2} - \frac{de_m}{d\alpha} \frac{d \ln b}{d\alpha} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

由(2)式, 可以得到

$$\frac{de_m}{d\alpha} = \Theta_m^a + \Theta_m^E E'_m - \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E'_n \rangle_n, \quad (9)$$

和

$$\frac{d^2 e_m}{d\alpha^2} = \Theta_m^{aa} + 2\Theta_m^{aE} E'_m + \Theta_m^{EE} E''_m + \Theta_m^{EE} E_m'^2 - \frac{d \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E'_n \rangle_n}{d\alpha}, \quad (10)$$

其中用“'”表示对 α 的导数, 同时还使用了记号

$$\begin{aligned} \Theta_m^a &= \left. \frac{\partial \Theta(\alpha, E)}{\partial \alpha} \right|_{E=E_m}, \quad \Theta_m^E = \left. \frac{\partial \Theta(\alpha, E)}{\partial E} \right|_{E=E_m}, \\ \Theta_m^{EE} &= \left. \frac{\partial^2 \Theta(\alpha, E)}{\partial E^2} \right|_{E=E_m}, \quad \Theta_m^{aa} = \left. \frac{\partial^2 \Theta(\alpha, E)}{\partial \alpha^2} \right|_{E=E_m}, \\ \Theta_m^{aE} &= \left. \frac{\partial^2 \Theta(\alpha, E)}{\partial \alpha \partial E} \right|_{E=E_m}, \end{aligned} \quad (11)$$

代入(9)和(10)式, 无量纲曲率(8)式还可表示为

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{\Theta_m^E}{b^2} E''_m + \frac{1}{b^2} \left(2\Theta_m^{aE} + \Theta_m^{EE} E'_m - \Theta_m^E \frac{d \ln b}{d\alpha} \right) E'_m + \frac{1}{b^2} \left(\Theta_m^{aa} - \Theta_m^a \frac{d \ln b}{d\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{1}{b^2} \left(\frac{d \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E'_n \rangle_n}{d\alpha} - \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E'_n \rangle_n \frac{d \ln b}{d\alpha} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

而均方根斜率(5)式为

$$b = \sqrt{\langle (\Theta_n^a + \Theta_n^E E_n')^2 \rangle_n - \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E_n' \rangle_n^2}. \quad (13)$$

这样,一旦知道了系统的能级曲线 $\{E_n(\alpha)\}$ 和半经典平均能级密度累积函数 $\Theta(\alpha, E)$, 可立即运用(2), (13), (6)和(12)式计算出相应的经过了平展处理的能谱曲线 $\{e_n(\tilde{\alpha})\}$ 和无量纲曲率 k_m . 可以说经过了这样的再标度后的能谱曲线无论沿能量方向还是沿参数方向都是均匀和归一的. 注意(12)式等号右边的最后一项与 m 无关, 它对所有能级曲线的曲率都给出同样的修正值.

在曲率公式(12)中, 如果忽略半经典平均量 $\Theta, b, \langle E_n' \rangle_n$ 与参数 α 的函数相关性以及半经典平均能级密度 $\rho(E) = \partial \Theta / \partial E$ 与 E 的相关性, 也就是说, 如果取近似

$$\Theta^a = 0, \quad \frac{db}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\langle E_n' \rangle_n}{d\alpha} = 0, \quad \Theta^E = \rho_0, \quad (14)$$

其中 ρ_0 为平均能级密度常数, 可得到曲率的主要贡献项(1)式. 一般地, 可以把(12)式写成这个基本项加上一个修正部分 k_m^c , 即

$$k_m = k_m^{\text{GRMN}} + k_m^c, \quad (15)$$

其中

$$k_m^c = \frac{1}{b^2} \left[\frac{\Theta_m^E \rho_0 (\langle (E_n')^2 \rangle_n - \langle E_n' \rangle_n^2) - b^2}{\rho_0 (\langle (E_n')^2 \rangle_n - \langle E_n' \rangle_n^2)} E_m'' + 2 \Theta_m^{aE} E_m' + \Theta_m^{aa} + \Theta_m^{EE} E_m'^2 - (\Theta_m^E E_m' + \Theta_m^a) \frac{d \ln b}{d\alpha} \right] + k_0, \quad (16)$$

$$k_0 = \frac{1}{b^2} \left(\langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E_n' \rangle_n \frac{d \ln b}{d\alpha} - \frac{d \langle \Theta_n^a + \Theta_n^E E_n' \rangle_n}{d\alpha} \right). \quad (17)$$

这里 k_m^c 可解释成因 Θ, b 和 $\langle E_n' \rangle_n$ 可能与参数 α 有关, 或 Θ 与 E 的关系偏离线性(即有参数或能量非均匀性)而导致的修正.

值得指出的是, 对文献[6]中所讨论的由高斯么正系综(即 GUE)定义的单参数系统

$$H = (\cos \alpha) H_1 + (\sin \alpha) H_2, \quad (18)$$

其中 H_1, H_2 都是由高斯么正系综定义的 $N \times N$ 无规矩阵, 我们可认为在渐近 $N \rightarrow \infty$ 下, 修正 $k_m^c \rightarrow 0$. 这时, 我们的曲率公式与这些无规矩阵理论中引入的曲率是一致的(除去一个不重要的常数因子 2π). 的确, 在大 N 渐近下, 系统(18)式的平均能级密度等平均量与参数 α 无关. 另外, 虽然(18)式的能谱并不是均匀的, 文献[6]的作者通过仅考虑 $E=0$ 处的能级, 去掉了谱的非均匀性(它等价于能量平展过程). 因此, 在应用曲率公式(12)于文献[6]所考虑的无规矩阵模型时, 可以认为有等式(14)式成立, 也就是说没有修正 k_m^c .

最后, 我们还须指出, 即使原始能谱沿能量方向上已经是均匀的, 也就是说, 即使有 $\Theta(\alpha, E) = \rho_0 E$ (ρ_0 为常数), 修正 k_m^c 也可能因为 $\langle (E_n')^2 \rangle_n, \langle E_n' \rangle_n$ 与 α 有关而不为零. 按照公式(15)–(17), 无量纲曲率这时成为

$$k_m = k_m^{\text{GRMN}} + \frac{\rho_0}{b^2} \left(\frac{\langle E_n' \rangle_n - E_m'}{b} \frac{db}{d\alpha} - \frac{d \langle E_n' \rangle_n}{d\alpha} \right), \quad (19)$$

其中

$$b = \rho_0 \sqrt{\langle (E_n')^2 \rangle_n - \langle E_n' \rangle_n^2}. \quad (20)$$

不难验证,它对任意的参数变量代换保持不变.这显然是只与混沌发生联系的量所应该具备的性质.从(19)式可以看出,对沿能量方向已经是均匀的能谱,是否还需再考虑作参数平展,取决于 b 和 $\langle dE_n/d\alpha \rangle_n$ 对参数 α 的依赖程度.在某些场合,如像(18)式那样的 2×2 高斯正交系综(GOE)模型,可以证明对小 α ,它们完全与参数无关(即 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} db/d\alpha = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d\langle dE_n/d\alpha \rangle_n/d\alpha = 0$).这时可忽略参数平展,直接用 GRMN 给出的曲率公式来研究有关量子混沌现象.但是,在实际中遇到的哈密顿系统的 b 和 $\langle dE_n/d\alpha \rangle_n$ 不会都像(18)式那样与 α 无关.因此,一般地讲是需要考虑参数平展问题的.

参数平展对曲率的影响和重要性可简单地通过考察参数变换所带来的效果而看出.设有一组沿能量方向已经是均匀和归一的能谱曲线 $E_n(\alpha)$, 因此满足 $\Theta(E, \alpha) = E$. 我们将研究它在 $\alpha \rightarrow 0$ 时的曲率情况.在不考虑参数平展时,按照 GRMN 公式计算的曲率为

$$k_m^{\text{GRMN}} = \frac{\left(\frac{d^2 E_m}{d\alpha^2} \right)_{\alpha \rightarrow 0}}{\left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right)^2 \right\rangle_n - \left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right) \right\rangle_n^2} \quad (21)$$

现在让我们考虑另一组,通过对 $E_n(\alpha)$ 实施参数变换

$$\alpha = \xi\lambda + \zeta\lambda^2, \quad (22)$$

定义的能谱 $\tilde{E}_n(\lambda)$

$$\tilde{E}_n(\lambda) = E_n(\xi\lambda + \zeta\lambda^2). \quad (23)$$

它的 GRMN 曲率是

$$\tilde{k}_m^{\text{GRMN}} = \frac{\left(\frac{d^2 \tilde{E}_m}{d\lambda^2} \right)_{\lambda \rightarrow 0}}{\left\langle \left(\frac{d\tilde{E}_n}{d\lambda} \right)^2 \right\rangle_n - \left\langle \left(\frac{d\tilde{E}_n}{d\lambda} \right) \right\rangle_n^2} \quad (24)$$

由(22)和(23)式,有

$$\frac{d\tilde{E}_n}{d\lambda} = (\xi + 2\zeta\lambda) \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right)_{\alpha = \xi\lambda + \zeta\lambda^2}, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \tilde{E}_n}{d\lambda^2} = 2\zeta \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right)_{\alpha = \xi\lambda + \zeta\lambda^2} + (\xi + 2\zeta\lambda)^2 \left(\frac{d^2 E_n}{d\alpha^2} \right)_{\alpha = \xi\lambda + \zeta\lambda^2}. \quad (26)$$

将它们代入(24)式,可得到

$$\begin{aligned} \tilde{k}_m^{\text{GRMN}} = & \frac{\left(\frac{d^2 E_m}{d\alpha^2} \right)_{\alpha \rightarrow 0}}{\left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right)^2 \right\rangle_n - \left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right) \right\rangle_n^2} \\ & + \frac{2\zeta}{\xi^2} \frac{\left(\frac{dE_m}{d\alpha} \right)_{\alpha \rightarrow 0}}{\left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right)^2 \right\rangle_n - \left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha} \right) \right\rangle_n^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

与(21)式相比,它多出了等号右边的第二项.也就是说,如果不考虑参数平展问题,谱 E_n 与谱 $\tilde{E}_n$ 将有不同的曲率分布.显然,参数变换(22)不会改变动力学系统的混沌情况.曲率分布的这个差别:

$$\tilde{k}_m^{\text{GRMN}} - k_m^{\text{GRMN}} = \frac{2\zeta}{\xi^2} \frac{\left(\frac{dE_m}{d\alpha}\right)_{\alpha \rightarrow 0}}{\left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha}\right)^2 \right\rangle_n - \left\langle \left(\frac{dE_n}{d\alpha}\right)_{\alpha \rightarrow 0} \right\rangle_n^2} \quad (28)$$

完全是由于没有平展好能谱曲线而造成的,与混沌现象无关.如果我们注意到参数平展问题,即用公式(19)来计算谱 $E_n(\alpha)$ 和 $\tilde{E}_n(\lambda)$ 的曲率,将得出相同的值.因为协变性,按(19)式计算的无量纲曲率将不受参数变换的影响.由(28)式不难看出,参数变换会明显地改变 GRMN 曲率的值,从而给出不同的分布函数.从普适观点看,这是不合理的.它表明参数平展过程的重要性.

3 结果与讨论

通过近年来理论和大量数值上的研究成果,人们逐渐认识到,动力学系统中有些性质在一定意义上往往仅取决于系统的一些总体特征,诸如基本对称性、混沌情况等.动力学系统可根据这些性质划分成不同的普适类.因此,描写这些性质的物理量将仅取决于系统的类特征,并与系统其它具体动力学内容无关.在这方面,一典型例子即是最邻近能级间距涨落性质.但平均能级密度则不是类性质量.要注意的是,当我们宣称两个同一普适类中的系统在定量上有同一能级间距涨落性质时,它们还要有相同和均匀的平均能级密度作为前提,否则不同动力学系统之间的定量对比将失去意义.在实际数值计算工作中,使平均能级密度达到均匀的办法是作能量平展.从这个目前已为大家熟知的例子,我们不难体会到,当试图将曲率作为类性质来研究时,也需对能谱曲线作类似的平展.按照本文的结论,这个平展可通过使平均能级密度和均方根斜率均匀归一,以及平均倾斜度为零这三个要求给出.这样,我们修正了 Gaspard 等^[5]的无量纲曲率公式,弥补了它对任意(非线性)参数变换不协变的缺陷.值得强调的是,动力学系统的普适类问题是量子混沌研究中非常重要和最具成就的领域.本工作将有助于进一步精细探讨这些内容,尤其是可能对一些文献中的数值结论作出校正.特别是对小曲率情形中观察到的分布非普适现象^[7],有必要在进一步顾及平展问题下,更准确地加以计算.

感谢与吴锡真、顾建中的讨论.

- [1] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1992).
- [2] B. V. Chirikov, *Phys. Reports*, **52**(1979), 263.
- [3] Jiang Yi-min, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 1735(in Chinese).
- [4] I. C. Percival, *J. Phys.*, **B6**(1973), L229.

- [5] P. Gaspard, S. A. Rice, H. J. Mikeska and K. Nakamura, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 4015.
- [6] Felix von Oppen, *Phys. Rev. Lett.*, **73**(1994), 798.
- [7] J. Zakrzewski and D. Delande, *Phys. Rev.*, **E47**(1993), 1650.
- [8] Jian-zhong Gu, Xi-zhen Wu and Yi-zhong Zhuo, *Nucl. Phys.*, **A611**(1996), 315.

ENERGY-CURVE UNFOLDING AND QUANTUM CHAOS

JIANG YI-MIN

(*China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413*)

(Received 7 May 1997; revised manuscript received 19 September 1997)

ABSTRACT

It is indicated that when observing the phenomenon of quantum chaos with the help of energy-level curves, except an energy-unfolded spectrum to be required, an unfolding procedure for the curve parameter should be considered too. A general method for the parameter unfolding could be realized by normalizing the mean-square-root of slopes of level curves. If the curves are in average declined, an energy shift is also needed for eliminating this, before the parameter unfolding process is carried out. Discussions of the curvature of so unfolded level-curves are made, in connection with the Gaspard-Rice-Mikeska-Nakamura's formula of dimensionless curvature.

PACC: 0545; 0300