

混沌 *Arneodo* 系统的输出反馈同步

刘 锋 穆肇骊 邱祖廉

(西安交通大学自动控制工程系, 西安 710049)

(1999 年 3 月 21 日收到)

对 *Arneodo* 混沌系统进行输出线性反馈同步. 基于线性稳定性定理, 给出了一个同步渐近稳定的充分条件, 和同步渐近稳定的反馈系数的范围. 对同步系统进行数值仿真, 验证了方法的有效性和抗噪声能力.

PACC: 0545

1 引 言

混沌系统对初值条件极其敏感, 两个或多个混沌系统的同步曾一度被认为是不可能. 自从 Pecora 和 Carroll^[1] 首先提出并实现了混沌的驱动-响应同步, 混沌同步的研究迅速发展, 相应的在理论上提出了多种方法^[2], 并在实际中成功地应用于保密通讯和激光系统的同步^[2,3]. 由于混沌同步在保密通讯、信号处理和生命科学中有着广泛的应用前景, 近期成为混沌研究中的热点.

输出线性反馈方法, 其控制器结构简单, 易于实现, 对环境噪声和小的参数失配有一定的抗干扰能力, 已成功的应用于混沌系统的控制和同步^[4].

本文对混沌的 *Arneodo* 系统^[5], 采用输出线性反馈的方法实现了混沌的同步, 并用线性稳定性定理证明了同步的渐近稳定性, 同时给出了系统线性部分的特征值的最大实部和响应系统的最大条件李雅普诺夫指数与反馈系统的关系曲线. 最后对系统在无噪声和有噪声情况下进行数值仿真, 验证了反馈同步规律的正确性和抗噪声能力.

2 问题的描述

我们研究的 *Arneodo* 系统, 其微分方程的表示式为

$$\frac{d^3x}{dt^3} + u_2 \frac{d^2x}{dt^2} + u_1 \frac{dx}{dt} + u_0x = ux^3, \quad (1)$$

其中 $u < 0$, $u_0 < 0$, $u_1 > 0$ 和 $u_2 > 0$ 为系统参数, 状态空间方程的表示式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -u_0x_1 - u_1x_2 - u_2x_3 + ux_1^3. \end{cases} \quad (2)$$

取系统的输出反馈变量为 $x' = x_1$, 我们要根据输出反馈设计其自同步的响应系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + k(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = -u_0 y_1 - u_1 y_2 - u_2 y_3 + u y_1^3. \end{cases} \quad (3)$$

设 $\mathbf{x} = (x_1 x_2 x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1 y_2 y_3)^T$, 令 $\mathbf{e} = (e_1 e_2 e_3)^T = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, 则由(2)和(3)式得到同步的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k e_1, \\ \dot{e}_2 = e_3, \\ \dot{e}_3 = (3u x_1^2 - u_0) e_1 - u_1 e_2 - u_2 e_3 + u e_1^2 (e_1 - 3x_1). \end{cases} \quad (4)$$

为了讨论方便, 将(4)式改写为

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{e}), \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3u x_1^2 - u_0 & -u_1 & -u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u e_1^2 (e_1 - 3x_1) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

3 同步控制规律的设计

在介绍同步控制规律之前, 我们陈述一下相关的线性稳定性定理.

定理 1^[6] 考虑非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{O}(\mathbf{x}, t)$, 其中 $\mathbf{O}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$, 则系统在原点一致渐近稳定, 如果满足下列条件: (i) 对任意 t 有 $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{O}(\mathbf{x}, t)\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$; (ii) $\mathbf{A}(t)$ 对任意 t 有界; (iii) 线性部分 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 在原点一致渐近稳定.

我们接着给出下面的定理, 在后面的证明中要用到.

定理 2 对于矩阵 $\mathbf{A}$, 当 $k > k_0 = \max\{-u_0/u_2, m_1\}$ 时, 系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 在原点一致渐近稳定. 其中

$$m_1 = \begin{cases} 0 & \text{如果 } -3uM_1^2 + u_0 \leq 0; \\ \left[\frac{-3uM_1^2 + u_0}{u_2} \right]^{1/2} & \text{其他,} \end{cases} \quad M_1 = \max\{|x_1|, x_1 \text{ 为系统(2)式的第一状态分量}\}.$$

证明 根据题设, 显然有 $k > k_0 > 0$. 由(6)式得到矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $\lambda(s) = s^3 + (k + u_2)s^2 + (ku_2 + u_1)s + ku_1 + u_0 - 3ux_1^2$. 设 $\mathbf{A}$ 的特征多项式的三个特征根为 s_1, s_2 和 s_3 . 当 $k > -u_0/u_1$ 时, 由于 $u < 0, u_0 < 0$ 和 $u_1 > 0$, $\lambda(0) = ku_1 + u_0 - 3ux_1^2 > -3ux_1^2 \geq 0$; 当 $k > m_1$ 时, 由于 $u_1 > 0$ 和 $u_2 > 0$, $\lambda(-(k + u_0)) = (ku_2 + u_1)(-(k + u_2)) + ku_1 + u_0 - 3ux_1^2 = -k^2u_2 - ku_2^2 - u_1u_2 + u_0 - 3ux_1^2 < -k^2u_2 + u_0 - 3ux_1^2 < 3u(M_1^2 - x_1^2) < 0$, 故 $\lambda(s)$ 有一负特征根介于 $-(k + u_2)$ 与 0 之间, 不妨设为 s_1 , 即 $-(k + u_2) < s_1 < 0$. 由方程的根与系数的关系可知, $s_2 + s_3 = -(k + u_2) - s_1 < 0$, $s_2s_3 = -(ku_1 + u_0 - 3ux_1^2)/s_1 > 0$. 如果 s_2 和 s_3 均为实根, 显然 $s_2s_3 > 0$ 得出 s_2 与 s_3 同号, 由 $s_2 + s_3 < 0$ 得出 $s_2 < 0, s_3 < 0$;

如果 s_2 和 s_3 为共轭复根, 由 $s_2 + s_3 < 0$ 得出其实部为负. 对任一给定的 $k \in [k_0, +\infty)$, 显然存在正数 α , 使得 $\operatorname{Re} \lambda(A) < -\alpha$ ($\operatorname{Re} \lambda(A)$ 表示矩阵 A 特征值的实部). 又由 x_1 和 $\dot{x}_1$ 的有界性, 故可知系统 $\dot{x} = Ax$ 在原点一致渐近稳定^[6], 结论成立.

有了上面的定理 1 和定理 2, 我们得到了下面的定理.

定理 3 对于混沌驱动系统(2)式和它的同步响应系统(3)式, 当输出反馈系数 $k > k_0$ 时 (k_0 的取值参见定理 2), 同步的误差系统(5)式在原点一致渐近稳定, 即响应系统(3)式和驱动系统(2)式同步.

证明 对于误差系统(5)式, 显然有 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} = 0$, 满足定理 1 的条件 (i); 由于混沌系统的有界性, 则由 x_1 的有界性可知 A 有界, 满足定理 1 的条件 (ii); 当 $k > k_0$ 时, 由定理 2 可知误差系统(5)式的线性部分 $\dot{e} = Ae$ 在原点一致渐近稳定, 满足定理 1 的条件 (iii). 故由定理 1 可知, 误差系统在原点一致渐近稳定, 即响应系统(3)式和驱动系统(2)式同步, 结论成立.

李雅普诺夫指数定量的描述了相空间中相邻轨道呈指数发散的性质, 若李雅普诺夫指数为正值, 则表示相邻轨道发散, 具有混沌的特性. 在混沌同步的响应系统中含有驱动系统的状态变量, 其李雅普诺夫指数是以驱动系统的状态变量为前提条件, 故被 Pecora 和 Carroll 称之为条件李雅普诺夫指数^[7].

根据线性稳定性定理, 由条件李雅普诺夫指数的计算, 不难看出, 当系统(5)式的线性部分稳定时, 其最大的条件李雅普诺夫指数必定为负. 故按照 Pecora 和 Carroll 的同步稳定性条件为响应系统全部的条件李雅普诺夫指数为负^[7], 线性稳定性定理提供了一个同步稳定的充分性条件.

4 数值仿真

对系统(2)式取参数 $u = -1$, $u_0 = -5.5$, $u_1 = 3.5$, $u_2 = 1$, 系统混沌, 其最大的李雅普诺夫指数约为 0.224. 由系统(2)式的状态变量 x_1 的时间历程图(见图 1)可取 $M_1 = 4$, 则 $k_0 \approx 6.52$.

由于矩阵 A 包含参数 k 和变量 x_1 , 对于任意 $x_1 \in (-4, 4)$, 矩阵 A 的特征值的最大实部随 k 变化, 如图 2 所示. 响应系统(3)式的最大条件李雅普诺夫指数随 k 变化, 如图 3 所示. 从图 3 中可以看出当 $k \approx 1.17$ 时, A 的特征值的最大实部为 0.2, 响应系统的最大条件李雅普诺夫指数为 0. 当 $k \approx 2.2$ 时, A 的特征值的最大实部为 0, 最大条件李雅普诺夫指数为 -0.254.

取驱动系统和响应系统的初值分别为 $(-1.0, 3.0, 2.0)$ 和 $(1.0, -2.0, 4.0)$. 反馈系

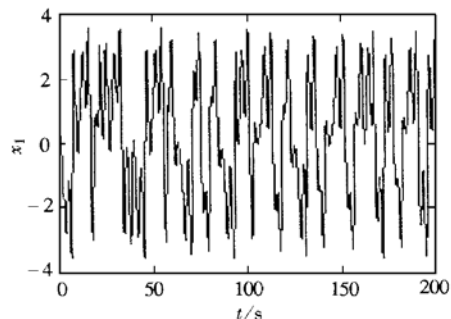


图 1 系统的状态分量 x_1 的时间历程图

数 $k=10.0$, 此时的矩阵 A 的特征值的最大实部为 -0.4451 , 最大条件李雅普诺夫指数为 -0.46 . 我们分别给驱动系统的信号不加噪声和加入一定幅度的噪声, 对同步效果仿真.

在没有噪声的情况下, 同步的误差呈指数渐近衰减为零, 同步渐近稳定, 误差系统状态曲线如图 4 所示. 其中实线为 e_1 , 虚线为 e_2 , 点画线为 e_3 .

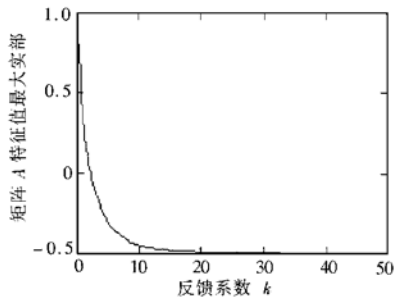


图 2 矩阵 A 特征值的最大实部随 k 的变化曲线

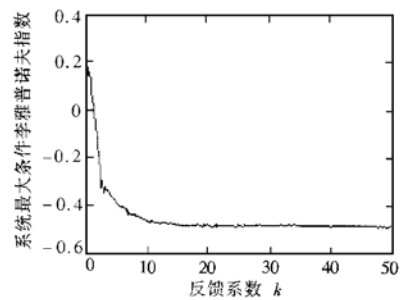


图 3 系统的最大条件李雅普诺夫指数随 k 的变化曲线

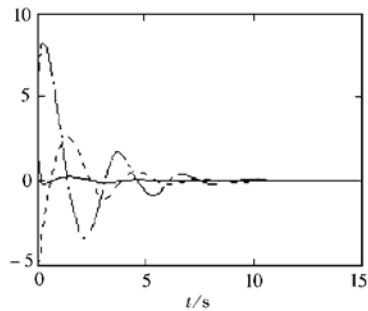


图 4 无噪声的误差曲线图 实线为 e_1 ; 虚线为 e_2 ; 点画线为 e_3

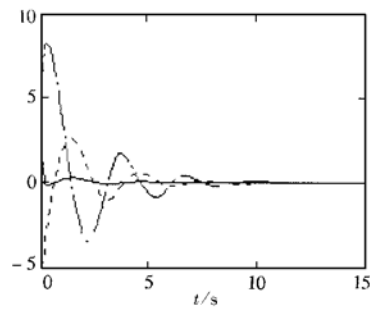


图 5 $\sigma=0.002$ 时的误差曲线图 图注同图 4

对误差系统施加幅度为 σ 的正态分布的高斯白噪声^[8], 即 $x_1 = (1.0 + \sigma N(0, 1))x_1$, 其中 $N(0, 1)$ 为标准正态分布的高斯白噪声. 当 $\sigma=0.002$ 时, 时间 $t>15\text{s}$ 后同步的误差最大为 10^{-3} 量级, 系统同步仍然稳定, 如图 5 所示. 其中实线为 e_1 , 虚线为 e_2 , 点画线为 e_3 . 由图 4 和图 5 可以看出, 同步系统有较强的抗噪声能力.

5 结 论

本文对 *Arneodo* 混沌系统的输出线性反馈同步问题进行了分析, 利用线性稳定性定理, 给出一个同步渐近稳定的充分条件. 同时求出了反馈系数与线性部分矩阵的特征值的最大实部及响应系统的最大条件李雅普诺夫指数的关系曲线. 在同步稳定的条件下, 反馈

系数有一个很大的选择范围. 当驱动系统的驱动信号中混有噪声时, 响应系统仍能较好的同步驱动系统, 有较强的抗噪能力.

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Lett.*, **A64**(1990), 821.
- [2] 方锦清, 物理学进展, **16**(1996), 137[Fang Jin-qing, *Progress in Physics*, **16**(1996), 137(in Chinese)].
- [3] L. Kocarev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 5028.
- [4] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A181**(1993), 203.
- [5] C. W. Wu and L. O. Chua, *Int. J. Bif. & Chaos*, **6**(1996), 801.
- [6] J. L. Willems, *Stabilitat Dynamischer Systeme*(Verlag, Munchen Wien, 1973), p. 155 and 150.
- [7] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2374.
- [8] M. A. Matias and J. Guemez, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1455.

OUTPUT FEEDBACK SYNCHRONIZATION OF A CHAOTIC *ARNEODO* SYSTEM

LIU FENG MU ZHAO-LI QIU ZU-LIAN

(*Department of Automatic Control, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

(Received 21 March 1999)

ABSTRACT

This paper presents a linear output feedback synchronization approach for a chaotic *Arneodo* system. Based on the linear stability theorem, a sufficient condition of asymptotic synchronization is given, and the boundary of the range of the output feedback parameter is given also. Finally, a computer simulation is given to demonstrate the effectiveness of the method.

PACC: 0545