

# 等离子体在高频调制场作用下形成自生磁场的机制\*

马善钧

(江西师范大学物理与通信电子学院,南昌 330027)

(2001 年 1 月 19 日收到,2001 年 3 月 12 日收到修改稿)

研究了等离子体在高频调制场作用下,形成自生磁场的机制.通过求解双时标双流方程,可以得到一组相互耦合的非线性方程.这组方程可以用来描述自生磁场的形成和演化.数值计算的结果显示,在高频调制场作用下,可以有自生磁场形成.计算得到的磁场强度和特征长度,与太阳日冕内的观测值符合得很好.随着时间的增加,自生磁场可以产生塌缩现象,导致磁场强度在很小的范围内有很大的值.

关键词:自生磁场,双流方程,高频调制场

PACC:5230,5235R

## 1 引 言

在宇宙天体(例如星系,恒星和行星)中观测到的磁场,通常被认为是在等离子体运动过程中形成的.等离子体在运动过程中,通过与扰动场相互作用,把一些很弱小的磁场不断放大,最终形成宇宙磁场<sup>[1-3]</sup>.这种运动动力学理论在描述太阳和恒星的磁场问题时,取得了显著的成功.由于在这一理论中,存在许多自由的和可调的参数,所以,它能广泛应用在许多有关磁场的问题中,并不令人奇怪.这中间不排除有些成功的应用是建立在这些不确定的参数基础之上的<sup>[4]</sup>.另一方面,这一理论的一个主要的不足是缺乏非线性相互作用.显然,随着研究的深入,人们需要建立更为完善的非线性理论来解释有关自生磁场的问题.

从 20 世纪 70 年代末以来,对等离子体中自生磁场的研究有了迅速的发展.这主要是由于在一些激光产生等离子体的实验中,发现有一种准稳定的磁场生成<sup>[5,6]</sup>.为了解释磁场的生成,人们做了许多理论方面的工作,包括考虑碰撞效应和无碰撞效应<sup>[7-9]</sup>.在这些研究中,主要采用了双时标双流近似,来研究自生磁场形成的物理机制.但鉴于问题的复杂性,非线性相互作用效应都没有被考虑,或者把高频场视为静电场来处理.这样,就必然导致在解释自生磁场的生成时,产生不同程度的局限性.近些年中,人们从无碰撞动力学方程出发,提出了一种自生

磁场形成的物理机制<sup>[10,11]</sup>.在他们的研究中,考虑了波和粒子间的非线性相互作用效应,结果显示高频调制场可以在宇宙等离子体中产生低频磁场.

本文从双流方程出发,采用双时标近似,同时考虑了非线性相互作用效应,得到了产生自生磁场的结果.定性理解高频电场产生自生磁场的现象是相当直观的.在等离子体中,始终存在各种高频调制扰动场.它们或是由于等离子体的扰动产生的,或是由于其他辐射源产生的.这些高频场通过波波相互作用和波粒子相互作用,对等离子体的低频运动有很强的影响.同时,由等离子体的运动而产生的流又可以产生磁场,即自生磁场.文中通过详细研究这一过程,最终得到了一组耦合的非线性方程.这组方程可以被用来解决自生磁场的生成问题,数值计算的结果与对太阳表面日冕内的观测结果进行比较,符合得很好.

## 2 低频非线性方程组

我们从如下的双流方程和麦克斯韦方程出发,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e = \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) - \frac{\nabla P_e}{m_e n_e}, \quad (3)$$

\* 江西省自然科学基金(批准号 9912002)资助的课题.

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i = \frac{-e}{m_i} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B} \right) - \frac{\nabla P_i}{m_i n_i}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (en_e \mathbf{V}_e - en_i \mathbf{V}_i), \quad (7)$$

式中  $P_e$  和  $P_i$  分别为电子和离子的压力,其他符号具有通常的意义.引入双时标近似,所有的量都能分为快时标分量和慢时标分量,显然,可以假定在慢时标尺度上,快时标分量的时间平均值为零,即

$$A = A_f + A_s, \quad A_f = 0. \quad (8)$$

此外,在慢时标量级上,存在如下的准中性条件:

$$en_e - en_i = 0 \quad \text{或} \quad n_s^e = n_s^i = n_s. \quad (9)$$

将快慢时标分量和(9)式代入(1)式,作时间平均后,有

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_s^e + n_f^e \mathbf{V}_f^e) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_f^e + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_f^e + n_f \mathbf{V}_f^e + n_f \mathbf{V}_s^e - n_f \mathbf{V}_f^e) = 0. \quad (11)$$

另一方面,从(3)式可以获得最低量级的电子快时标分量方程,

$$\frac{\partial \mathbf{V}_f^e}{\partial t} \approx \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_f. \quad (12)$$

利用(12)式,对(11)式中各项的数量级进行估计,有

$$\left| \frac{\nabla \cdot (n_f^e \mathbf{V}_f^e)}{\partial n_f^e / \partial t} \right| \sim \frac{k(n_f^e \mathbf{V}_f^e)}{\omega n_f^e} \sim \left( \frac{k}{k_d} W_f^{1/2} \right) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2},$$

$$\left| \frac{\nabla \cdot (n_f^e \mathbf{V}_s^e)}{\partial n_f^e / \partial t} \right| \sim \left( \frac{k}{k_d} \right) \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right) \left( \frac{V_s^e}{V_{Te}} \right),$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_s e^2}{m_e}, \quad V_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}, \quad k_d = \frac{\omega_{pe}}{V_{Te}}, \quad W_f = \frac{E_f^2}{4\pi n_s T_e},$$

式中  $\omega$  和  $k$  分别为频率和波矢,  $\omega_{pe}$  为电子的等离体频率,  $T_e$  是用能量为单位的电子温度,  $V_{Te}$  为电子的热运动速度,  $k_d$  为德拜波矢,  $W_f$  为波能量密度.在本文研究情况下,可以假定  $W_f < 1$ .考虑到存在下列流体条件:

$$V_{Te} < V_\phi = \omega/k, \quad |\mathbf{V}_s^e| < V_{Te},$$

(11)式可以简化成

$$\frac{\partial n_f^e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_f^e) = 0. \quad (13)$$

比较(12)式和(13)式,存在以下估计值:

$$V_f^e \sim \frac{|e| E_f}{m_e \omega} \sim \frac{\omega_{pe}}{\omega} \sqrt{W_f} V_{Te}, \quad (14)$$

$$\frac{n_s^e}{n_s} \sim \frac{k}{\omega} V_f^e \sim \left( \frac{k}{k_d} \right) \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right) \sqrt{W_f} \ll 1. \quad (15)$$

利用(14)(15)式,可以比较(10)式的最后两项,有

$$\frac{n_f^e \mathbf{V}_f^e}{n_s^e \mathbf{V}_s^e} \sim \left( \frac{k}{k_d} \right) \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right) \sqrt{W_f} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \sqrt{W_f} \right) \left( \frac{V_{Te}}{V_s^e} \right) \ll 1.$$

这样(10)式最后可以写为

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_s^e) = 0. \quad (16)$$

将相应的快慢分量代入(3)式,可以得到时间平均后的方程和快成分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{V}_s^e}{\partial t} + (\mathbf{V}_s^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_s^e + (\mathbf{V}_f^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_f^e \\ &= \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V}_s^e \times \mathbf{B}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V}_f^e \times \mathbf{B}_f \right) - \frac{\nabla P_s^e}{m_e n_s}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{V}_f^e}{\partial t} + (\mathbf{V}_s^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_f^e + (\mathbf{V}_f^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_s^e \\ &+ [(\mathbf{V}_f^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_f^e - (\mathbf{V}_f^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_f^e] \\ &= \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}_f + \frac{1}{c} (\mathbf{V}_s^e \times \mathbf{B}_f + \mathbf{V}_f^e \times \mathbf{B}_s \right. \\ &\left. + \mathbf{V}_f^e \times \mathbf{B}_f - \mathbf{V}_f^e \times \mathbf{B}_f) \right) - \frac{\nabla P_f^e}{m_e n_s}. \end{aligned} \quad (18)$$

比较(18)式中各项的大小,考虑到慢时标分量的特征量级大于快时标分量的特征量级,即  $k_s < k$  (18)式能够简化为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_f^e}{\partial t} \approx \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}_f + \frac{1}{c} \mathbf{V}_f^e \times \mathbf{B}_s \right) - \frac{\nabla P_f^e}{m_e n_s}. \quad (19)$$

用类似的方法,将快慢时标分量代入(5)式,并利用(19)式的结果,可以得到

$$\mathbf{B}_f \approx -\frac{m_e c}{e} \nabla \times \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \nabla \times (\phi_e \times \mathbf{B}_s), \quad \left( \mathbf{V}_f^e = \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \right). \quad (20)$$

将(20)式代入(17)式,消去(17)式中的  $\mathbf{B}_f$  (17)式能够写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{V}_s^e}{\partial t} + (\mathbf{V}_s^e \cdot \nabla) \mathbf{V}_s^e = \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V}_s^e \times \mathbf{B}_s \right) \\ & - \frac{\nabla P_s^e}{m_e n_s} + \mathbf{F}_p^e, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_p^e = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{V}_f^e)^2 + \frac{e}{m_e c} \mathbf{V}_f^e \times \nabla \times (\phi_e \times \mathbf{B}_s),$$

式中  $\mathbf{F}_p^e$  是电子的有质动力.类似可从(2)和(4)式中得到离子的相应方程

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{V}_s^i) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{V}_s^i}{\partial t} + (\mathbf{V}_s^i \cdot \nabla) \mathbf{V}_s^i \\ &= \frac{-e}{m_i} \left( \mathbf{E}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V}_s^i \times \mathbf{B}_s \right) - \frac{\nabla P_s^i}{m_i n_s}, \quad (23) \end{aligned}$$

式中已省略了较小的离子有质动力项. 考虑 (16) 和 (22) 式的结果, 用  $m_e$  和  $m_i$  分别乘以 (21) 和 (23) 式后, 将两式相加, 得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\delta n}{n_0} \right) - c_s^2 \nabla^2 \left( \frac{\delta n}{n_0} \right) = \nabla^2 \left( \frac{m_e}{2m_i} (\mathbf{V}_f^e)^2 \right), \quad (24)$$

式中已经用了下面的等式.

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_e + m_i} \approx \frac{\gamma_e T_e}{m_i}, \quad n_s = n_0 + \delta n, \\ &|\delta n| \ll n_0, \quad n_0 = \text{const}. \quad (25) \end{aligned}$$

下面讨论快时标传输场方程. 将快慢时标分量代入 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_f &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_f}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \left[ n_s \mathbf{V}_f^e + n_f^e \mathbf{V}_f^e + n_f^e \mathbf{V}_s^e \right. \\ &\left. - n_f^e \mathbf{V}_f^e - n_s \mathbf{V}_f^i - n_f^i \mathbf{V}_f^i - n_f^i \mathbf{V}_s^i + n_f^i \mathbf{V}_f^i \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

同样比较式中各项的大小, 略去小项后, 有

$$\nabla \times \mathbf{B}_f \approx \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_f}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} n_s \mathbf{V}_f^e. \quad (27)$$

将 (19) 和 (20) 式代入 (27) 式, 得到

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_f^e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_f^e}{\partial t^2} - \frac{3V_{Te}^2}{c^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_f^e) + \frac{1}{c^2} \omega_{pe}^2 \mathbf{V}_f^e \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\delta n}{n_0} \omega_{pe}^2 \mathbf{V}_f^e - \frac{1}{m_e c^3} \frac{\partial \mathbf{V}_f^e}{\partial t} \times \mathbf{B}_s = 0. \quad (28) \end{aligned}$$

假设高频调制场有如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} + \text{c.c.}], \\ \mathbf{V}_f^e &= \frac{1}{2} [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} + \text{c.c.}], \quad (29) \end{aligned}$$

式中  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  是高频场的振幅包络, 它们随时间缓慢变化. 当高频场满足  $\omega \approx \omega_{pe}$  的条件时, 考虑 (12) 式的结果, 可以从 (24) 和 (28) 式得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\delta n}{n_0} \right) - c_s^2 \nabla^2 \left( \frac{\delta n}{n_0} \right) = \nabla^2 \left( \frac{1}{16\pi n_0 m_i} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\delta n}{n_0} \omega_{pe}^2 \mathbf{E} \\ - \frac{1}{m_e c} i\omega_{pe} \mathbf{E} \times \mathbf{B}_s = 0. \quad (31) \end{aligned}$$

为了封闭 (30) 和 (31) 式, 还必须找到低频的自

生磁场所满足的方程. 可以从 (3) 式出发, 将速度  $\mathbf{V}$  展开成扰动场  $\mathbf{E}^i$  的级数, 令等式两边同次幂的量相等, 存在如下的量级方程:

$$\frac{\partial \mathbf{V}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} = \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}^i + \frac{1}{c} \mathbf{V}^{(0)} \times \mathbf{B}^i \right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} + (\mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(2)} = 0, \quad (33)$$

式中仅考虑了横振荡场量. 同时在 (3) 式的右边, 为使问题简化, 仅取了  $\mathbf{V}$  的最低量级,  $\mathbf{V}^{(a)}$  中的上标  $a$  表明  $\mathbf{V}^{(a)}$  正比于  $\mathbf{E}^i$  的  $a$  次幂. 对 (32) 和 (33) 式进行傅里叶变换, 得

$$-i\omega \mathbf{V}_k^{(1)} + (i\mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_k^{(1)} = \frac{e}{m_e} E_k^i \hat{\mathbf{e}}_k^i, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{V}_k^{(2)} + \int (i\mathbf{V}_{k_1}^{(1)} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{V}_{k_2}^{(1)} \delta(k - k_1 - k_2) \\ \cdot d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + (i\mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_k^{(2)} = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

或

$$\mathbf{V}_k^{(1)} = \frac{-e}{m_e} \frac{E_k^i}{(\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k})} \hat{\mathbf{e}}_k^i, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^{(2)} = \frac{1}{(\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k})} \int (i\mathbf{V}_{k_1}^{(1)} \cdot \mathbf{k}_2) \\ \cdot \mathbf{V}_{k_2}^{(1)} \delta(k - k_1 - k_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_k^i = \left( 1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}^{(0)}}{\omega} \right) \hat{\mathbf{e}}_k^i + \frac{(\mathbf{e}_k^i \cdot \mathbf{V}^{(0)})}{\omega} \mathbf{k}, \quad (38)$$

式中  $\mathbf{e}_k^i$  是横模电场的极化矢量. 类似将麦克斯韦方程 (5) 和 (7) 式进行傅里叶变换, 在准确到二级流的情况下<sup>[13]</sup>, 可以得到如下的横模场方程:

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^i) E_k^i \mathbf{e}_k^i = 4\pi i \omega (\mathbf{j}_k^{(2)}), \quad (39)$$

$$\epsilon_k^i = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma, \quad \mathbf{j}_k = en_s^e \mathbf{V}_{ke} - en_s^i \mathbf{V}_{ki}, \quad (40)$$

式中  $\epsilon_k^i$  是横介电常数,  $\sigma$  是电导率. 将 (36) 和 (37) 式代入 (39) 式中, 有

$$\begin{aligned} (k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^i) E_k^i \mathbf{e}_k^i = \frac{-4\pi i \omega e^3 n_0}{(\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}) m_e^2} \\ \cdot \int \frac{(\hat{\mathbf{e}}_{k_1}^i \cdot \mathbf{k}_2) \hat{\mathbf{e}}_{k_2}^i}{(\omega_1 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_1 + i\epsilon)(\omega_2 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_2 + i\epsilon)} \\ \cdot E_{k_1}^i E_{k_2}^i \delta(k - k_1 - k_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (41) \end{aligned}$$

其中积分式分母中的  $i\epsilon$  项是由朗道约定引入的<sup>[12]</sup>. 由于  $\mathbf{k}$  和  $\omega$  是低频场的波矢和频率, 而且 (41) 式中的  $\delta$  函数的存在,  $\omega_1, \mathbf{k}_1$  和  $\omega_2, \mathbf{k}_2$  必须是高频场, 同时它们必须具有相反的符号.

$$E_{k_1}^i E_{k_2}^i = E_{k_1}^{(+)} E_{k_2}^{(-)} + E_{k_1}^{(-)} E_{k_2}^{(+)}, \quad (42)$$

式中上标(+)和(-)表示高频扰动场的正频和负频部分.把(42)式代入(41)式,对波矢  $k_1$  和  $k_2$  进行对称化处理,可以得到

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^+) E_k^+ e_k^+ = \frac{-4\pi i \omega e^3 n_0}{(\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}) m_e^2} \cdot \int \frac{(\hat{e}_{k_1}^+ \cdot \mathbf{k}_2) \hat{e}_{k_2}^+ + (\hat{e}_{k_2}^+ \cdot \mathbf{k}_1) \hat{e}_{k_1}^+}{(\omega_1 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_1 + i\epsilon)(\omega_2 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_2 + i\epsilon)} \cdot E_{k_1}^{(+)} E_{k_2}^{(-)} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (43)$$

另一方面,还需要找出  $\epsilon_k^+$  的表达式.因为(43)式中的  $E_k^+$  是低频场,所以从(36)和(40)式中得到

$$\epsilon_k^+ = 1 - \frac{m_i + m_e}{m_i \omega (\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k})} \omega_{pe}^2, \quad (44)$$

$$(k^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_k^+) \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (\omega - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k})} (\omega^2 + k^2 V_s^2), \quad (45)$$

$$\left( V_s = V_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right).$$

将上式代入(43)式,有

$$(\omega^2 + k^2 V_s^2) E_k^+ = \frac{i e \omega^2}{m_e \omega_{pe}^2} \int [E_{k_1}^{(+)} (\mathbf{E}_{k_2}^{(-)} \cdot \mathbf{k}) - E_{k_2}^{(-)} (\mathbf{E}_{k_1}^{(+)} \cdot \mathbf{k})] \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2, \quad (46)$$

其中

$$(\omega_1 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_1) \approx \omega_1 \approx \omega_{pe},$$

$$(\omega_2 - \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{k}_2) \approx \omega_2 \approx \omega_{pe}$$

或

$$(\omega^2 + k^2 V_s^2) \mathbf{B}_k^s = \frac{i e \omega^2}{m_e \omega_{pe}^2} \left( \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \right) \int \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_{k_1}^{(+)} \times \mathbf{E}_{k_2}^{(-)}) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 = \frac{i e \omega c}{m_e \omega_{pe}^2} \mathbf{k} \times \int \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_{k_1}^{(+)} \times \mathbf{E}_{k_2}^{(-)}) dk_1. \quad (47)$$

将(47)式变回到坐标空间后,成为

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + V_s^2 \nabla \times \nabla \times \right) \mathbf{B}^s = \frac{i e c}{m_e \omega_{pe}^2} \nabla \times \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \quad (48)$$

通过作如下的变量代换,最后可将(30)(31)和(48)式写为无量纲的形式.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \right) n = \nabla^2 |\mathbf{E}(\zeta, \tau)|^2, \quad (49)$$

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{E}(\zeta, \tau) - \alpha \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\zeta, \tau) - n \mathbf{E}(\zeta, \tau) - i \mathbf{E}(\zeta, \tau) \times \mathbf{B}(\zeta, \tau) = 0, \quad (50)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \tau^2} + \nabla \times \nabla \times \right) \mathbf{B}(\zeta, \tau) = i \frac{2}{3} \nabla \times \nabla \times \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{E}(\zeta, \tau) \times \mathbf{E}^*(\zeta, \tau)) \right]. \quad (51)$$

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\mu}}{d_e} \mathbf{r}, \quad d_e = \frac{V_{Te}}{\omega_{pe}}, \quad \tau = \frac{2}{3} \mu \omega_{pe} t,$$

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}, \quad \alpha = \frac{c^2}{3 V_{Te}^2},$$

$$n = \frac{3}{4\mu} \frac{\delta n}{n_0}, \quad \mathbf{E}(\zeta, \tau) = \frac{\sqrt{3} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{4 \sqrt{\pi \mu n_0 T_e}},$$

$$\mathbf{B}(\zeta, \tau) = \frac{3e}{4\mu m_e c \omega_{pe}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

如果场量振幅包络随时间变化的非常缓慢,可以略去(49)和(51)式中左边的第一项,原方程变为

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{E} - \alpha \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} - i \mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0, \quad (52)$$

$$\mathbf{B} = i \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \quad (53)$$

由此,可以看到准静态自生磁场完全由一组耦合方程(52)和(53)式决定.

### 3 数值计算

对静态极限的自生磁场方程组(52)和(53)式,用数值方法进行二维求解.初始电场取三维分量,具体形式如下:

$$\mathbf{E}(\zeta, \tau = 0) = \left[ \sin\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) + i \cos\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) \right] \text{sech}\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0}\right) \mathbf{e}_x + \left[ \sin\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi\hat{x}}{\hat{x}_0}\right) + i \cos\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi\hat{x}}{\hat{x}_0}\right) \right] \mathbf{e}_y - \frac{\hat{y}_0}{2\pi\hat{x}_0} \left[ \cos\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi\hat{y}}{\hat{y}_0}\right) \right] \text{sech}\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0}\right) \text{th}\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0}\right) \mathbf{e}_z. \quad (54)$$

这里  $Y$  方向取周期性边界条件,  $\hat{y}_0 = 10^6$  为其周期.  $X$  方向取自由边界条件,  $\hat{x}_0 = 10^6$  为电场包络的宽度.初始条件(54)式满足横波条件  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}, \tau = 0) = 0$  且有  $|\hat{\mathbf{E}}|_{\max}^2 = 2$ . 太阳表面日冕的参数为温度  $T_e = 10^6$  K, 密度  $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ .

在图1和图2中,给出了磁场变化情况的计算结果.这种变化由方程的初始条件(54)式和方程(52)(53)式决定.  $|\mathbf{B}|^2$  随时间连续变化的等强图在图1中给出.从图中可以看到,频率  $\omega \approx \omega_{pe}$  的横扰动场通过波波相互作用和波粒子相互作用能够激发起低频磁场.同时,从图中还可以看到,随着时间的推移,磁场逐步向一个很小的区域压缩,场强迅速增加,使场的范围逐渐限制在一个局部区域内.由数值计算得到的结果可知,当时间大于1.1时,场的塌

缩速度加快,场强变得非常强.这意味着在导出(49)至(51)式时所做的一些近似( $W_r < 1$ )已不再成立,(32)和(33)式的展开不再有效,(24)式中也不能把

有关的磁场  $B_s$  略去.所以,此时磁场的变化情况已不能用(52)和(53)式来描述,必须寻找新的机制和相应的更为准确的方程来描述磁场的演化过程.

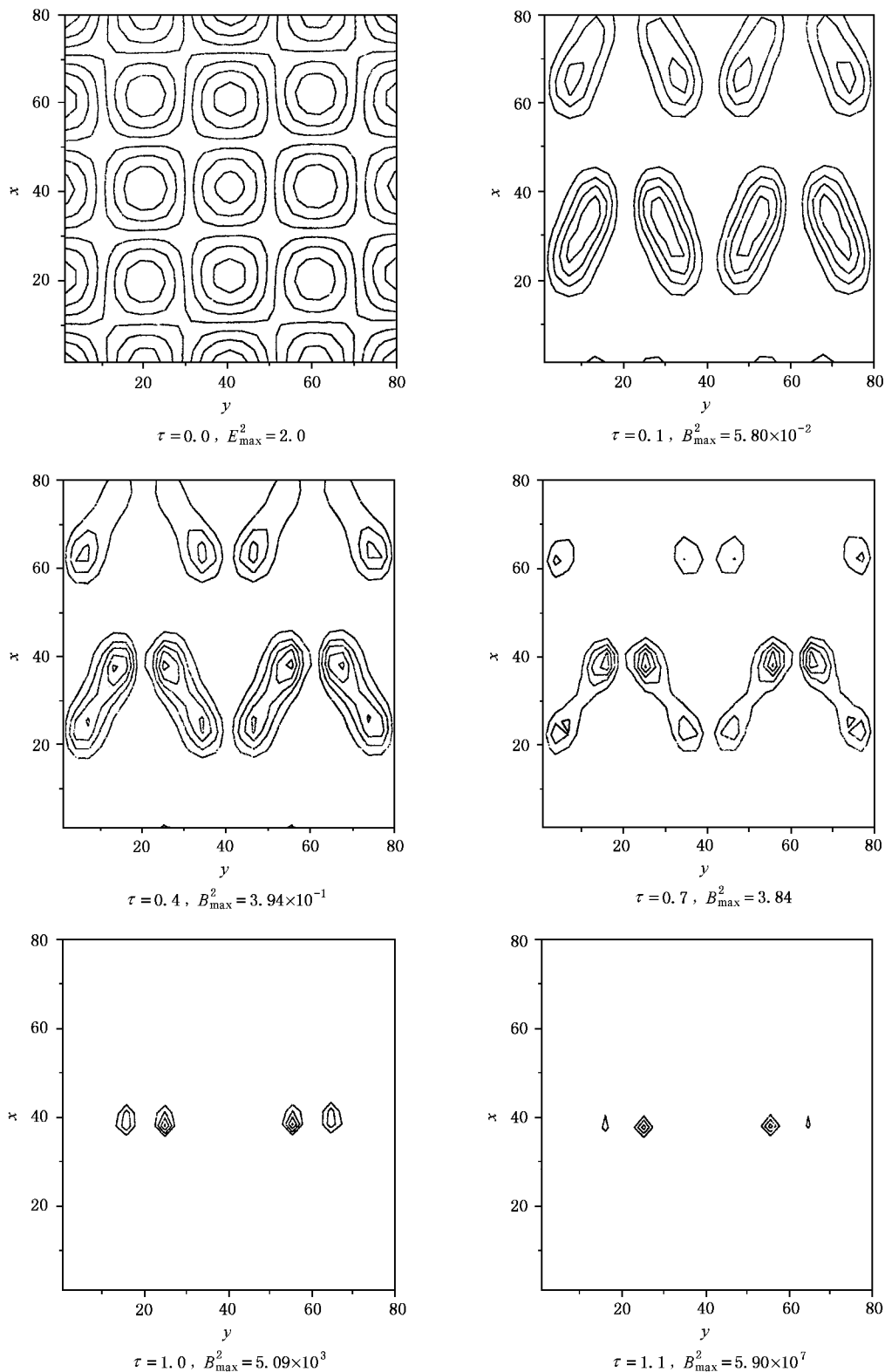


图 1 自生磁场的二维塌缩等强图演化过程

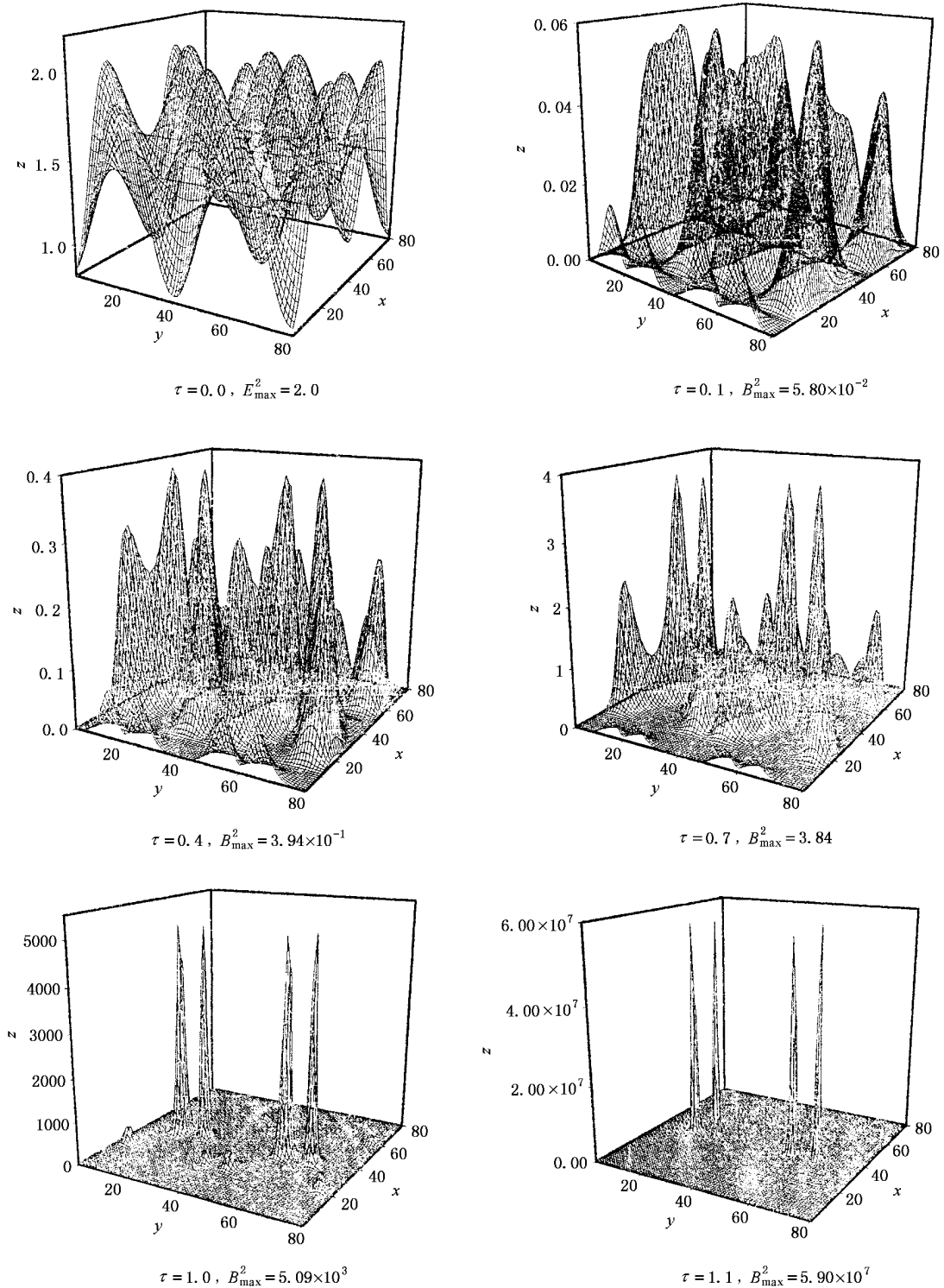


图2 自生磁场的三维塌缩演化过程

图 1 中的各个量是无量纲化的,它们相应的有量纲量为

$$B_z(\mathbf{r}, t) = 2.32 \times 10^{-6} n_0^{1/2} B_s(\zeta, \tau) \text{ (G)}, \quad (55)$$

$$x = 0.78 \times 10^3 T^{1/2} n_0^{-1/2} \zeta \text{ (cm)}, \quad (56)$$

$$t = 2.8 \times 10^3 \tau \omega_{pe}^{-1} \text{ (s)}. \quad (57)$$

## 4 讨 论

1. 如果在宇宙等离子体中存在高频调制场,波和粒子的非线性相互作用将激发出低频磁场.这

种低频磁场的动力学行为由方程(49)(50)和(51)式决定.在亚声速近似(静态极限)下,数值计算显示这种频率  $\omega = \omega_{pe}$  的横向高频场产生的自生磁场会产生塌缩,这意味着可以在一个很小的范围内产生一个很强的磁场.由(52)和(53)式还看到,高频场的振幅必须是一个复数.如果这一条件不满足,不管是实数或是纯虚数,从(53)式得到的磁场必定为零.另一方面,如果磁场  $B$  为零,从(52)式得到的电场  $E$  将与磁场  $B$  无关,这意味着两个方程将不再相互耦合.换句话说,将不存在由高频调制场激发的低频磁场,这就是选择(54)式形式的电场作为数值计算的初始条件的理由.

2. 已有的观测资料显示,在太阳表面日冕内有一些小范围的磁场存在,人们相信太阳耀斑的形成与这些磁场有关.当这些磁场相互接近并发生相互作用时,磁场能将很快释放出来.这种磁场能的巨大释放导致太阳耀斑的出现.观测结果表明,这些磁场的典型值为磁场强度约 2000G,磁场的特征长度约 100km.如果考虑日冕的参数为  $T = 10^6$  K,密度  $n_e =$

$10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,并且将图 1 中的  $B(\zeta, \tau = 1.1) = \sqrt{5.90 \times 10^7}$  和  $\zeta \sim 10^6$  代入(55)和(56)式,可以得到  $B = 1.8 \times 10^3 \text{ G}$ ,  $L = 78 \text{ km}$ .

这些结果与观测值符合得很好.

3. 最后,数值计算的结果表明,随着时间的推移,磁场的塌缩将导致磁场的范围越来越小,磁场的强度越来越大,最终产生错误的结果(在实际计算中,由于磁场  $B$  越来越大,最终导致计算值溢出).事实上,磁场的塌缩是不可能连续进行下去.这是因为一方面,正如前面所述,当磁场非常大的时候,方程组(52)和(53)式不再有效.它们已不能描述磁场的演化规律,必须寻找更加准确的方程组来描述磁场的演化规律.在新的方程组中,将会有相应的机制来消除这种磁场无限塌缩的现象.另一方面,随着磁场强度的增强,磁场与周围环境的相互作用也随之增强,这种相互作用将导致磁场损失能量并最终达到一个平衡状态.因此,自生磁场的塌缩将会自动终止在某一确定的值处.有关这些方面的问题,已经超出了本文的研究范围,在此不作进一步的讨论.

[1] E. M. Parker, *The Astrophysical Journal* **122** (1955), 293.  
 [2] P. H. Roberts, M. Stix, *The Turbulent Dynamo*, Technical Notes NCAR/IA-6, (1971).  
 [3] Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokoloff, *Magnetic Field in Astrophysics* (Gordon and Breach, London, 1983).  
 [4] A. Z. Dolginov, *Phys. Rep.*, **162** (1988), 337.  
 [5] J. A. Stamper, B. H. Ripin, *Phys. Rev. Lett.*, **34** (1975), 138.  
 [6] A. Reven, O. Willi, P. T. Rumsky, *Phys. Rev. Lett.*, **41** (1978), 554.  
 [7] C. E. Max, W. M. Manheimer, J. J. Thomson, *Phys. Fluids*, **21** (1978), 128.

[8] M. Kono, M. M. Skoric, D. Ter Haar, *J. Plasma Phys.*, **26** (1981), 123.  
 [9] S. A. Belkov, V. N. Tsytovich, *Sov. Phys. JETP*, **76** (1979), 1293.  
 [10] Xiaoqing Li, *Astron. Astrophys.* **227** (1990), 317.  
 [11] Xiaoqing Li, Yuehua Ma, *Astron. Astrophys.*, **270** (1993), 534.  
 [12] E. N. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Chap. 3 (Pergamon Press, Oxford, 1981).  
 [13] Li Xiaoqing, *Turbulent plasma Physics* (Beijing Normal Univ. Press, 1987) [in Chinese] 李晓卿, *湍动等离子体物理* (北京师范大学出版社, 1987).

# SELF-GENERATED MAGNETIC FIELD BY HIGH FREQUENCY MODULATIONAL FIELD IN PLASMA\*

MA SHAN-JUN

( *Institute of Physics and Communicative Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China* )

( Received 19 January 2001 ; revised manuscript received 12 March 2001 )

## ABSTRACT

Magnetic field generated in plasma with high frequency modulatory field has been studied in detail. By solving the two time-scale and two fluid equations a set of nonlinear equations has been obtained by which the behavior of self-generated magnetic field can be described. Numerical results show that magnetic field self-generated by high frequency modulatory field can be produced and with increase of time this magnetic field may collapse leading to great enhancement of the magnetic field.

**Keywords** : self-generated magnetic field , two fluid equations , high frequency modulatory field

**PACC** : 5230 , 5235R

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China ( Grant No. 9912002 ).