

推广的 B-BBM 方程和 B-BBM 方程的显式精确解*

陈松林 侯为根

(安徽工业大学数理系, 马鞍山市 243002)

(2001 年 1 月 14 日收到, 2001 年 5 月 5 日收到修改稿)

研究了 BBM 方程和推广的 B-BBM 方程解之间的形变理论, 通过给出的一类新的形变关系可从 BBM 方程的已知解形变出推广的 B-BBM 方程的显式精确解, 并附有这种方法的应用举例. 还对 B-BBM 方程运用齐次平衡法获得其解的显式表示.

关键词: 形变理论, 齐次平衡法, 显式精确解, 推广的 B-BBM 方程, B-BBM 方程

PACC: 0340K, 0290

1 引 言

众所周知, KdV 方程现已成为数学物理的基本方程之一, 有关的研究也十分活跃^[1-7], 然而, Benjamin-Bona-Mahony 在水波研究中建议用下述方程 (BBM)^[8]

$$u_t + uu_x - \delta u_{xxt} = 0 \quad x \in R, t > 0 \quad (1)$$

作为规范方程, 并断言这是比 KdV 方程更合适的数学物理模型方程, 如果计及黏性和耗散作用 (如湍流问题) 则相应的模型方程为推广的 Bergurs-BBM 混合型方程^[9]

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} + \gamma u_{xxx} = 0 \quad x \in R, t > 0. \quad (2)$$

特别地若 $\gamma = 0$, 方程 (2) 变成所谓的 B-BBM 方程

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} = 0. \quad (3)$$

文献 [6] 由于找到了 B-KdV 方程的一类显式精确解, 从而使文献 [2] 对 B-KdV 方程的定性分析更加细致, 最近, 文献 [9] 通过一系列精细的估计研究了形如方程 (2) 解的存在性和收敛性结果, 但由于未给出方程 (2) 的显式解析解, 因而其讨论仅限于定性的.

本文通过研究方程 (1) 与 (2) 解之间的形变理论, 给出一种新的形变关系由方程 (1) 的已知解^[10] 求出方程 (2) 的一类显式解, 这样的结论可用于定量的讨论, 最后给出其应用的例子, 该例还说明了 (2)

式的解可由 Bergurs 方程的解与 BBM 方程的解混合形变给出. 应该指出的是, 文献 [3, 7] 中的形变关系以及通常的齐次平衡法^[5], 此处不再适用, 因此, 正如文献 [3] 所说, 寻找合适的形变关系乃是一个有趣的问题. 此外, 对方程 (3), 本文成功地应用齐次平衡法获得了其显式精确解.

2 推广的 B-BBM 方程的显式行波解

记 BBM 方程 (1) 的行波解为 $U(\xi)$ 则有

$$-vU_\xi + UU_\xi + v\delta U_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (4)$$

其中 $U(\xi) = U(x, t)$, $\xi = x - vt$.

对 (4) 式关于 ξ 积分两次得

$$U_{\xi\xi} = \frac{U}{\delta} - \frac{U^2}{2\delta v} + C_1 \quad (5a)$$

及

$$U_\xi^2 = \frac{U^2}{\delta} - \frac{U^3}{3\delta v} + 2C_1 U + C_2. \quad (5b)$$

为了利用 $U(\xi)$ 的结构获得 (2) 式的解, 将对其进行合适的形变. 由于文献 [3, 7] 中建议的多项式形变关系在此并不适用, 我们构造了下述新的形变公式

$$u(\eta) = AU(\eta) + BU_\eta(\eta) + C, \quad (6)$$

其中 $u(\eta)$ 是方程 (2) 的解, $\eta = kx - wt - \eta_0$ (k, w 为待定的时空膨胀因子), A, B, C 是待定常数.

此时对于推广的 B-BBM 方程的行波解 $u(\eta)$ 应满足

$$-wu_\eta + ku u_\eta - k^2 \mu u_{\eta\eta} + \delta k^2 w u_{\eta\eta\eta} + k^4 \gamma u_{\eta\eta\eta} = 0.$$

* 安徽省高校中青年学科带头人培养基金及省教委科研基金(批准号 99JL0166)资助的课题.

积分上式一次并将 (6) 式代入所得结果有

$$\begin{aligned} & -u(AU + BU_\eta + C) + \frac{k}{2}(AU + BU_\eta + C)^2 \\ & -k^2\mu(AU_\eta + BU_{\eta\eta}) + \delta k^2 u(AU_{\eta\eta} + BU_{\eta\eta\eta}) \\ & + \gamma k^4(AU_{\eta\eta\eta} + BU_{\eta\eta\eta\eta}) = C_3. \end{aligned} \quad (7)$$

经过冗长而细致的计算可得形变关系式中的常数 A, B, C, k, μ 满足的纯代数限制条件 ($\gamma \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \left(A^2 + \frac{B^2}{\delta}\right) + \mu k \frac{B}{\delta v} - \frac{k\omega A}{v} - \frac{5\gamma k^3 B}{\delta v} = 0, \\ & -B + \frac{5\gamma k^3}{\delta v} = 0, \\ & -\omega B + kBC - \mu k^2 A + k^2 \omega B + \gamma k^4 \frac{A}{\delta} = 0, \\ & AB - \frac{k\omega B}{v} - \frac{\gamma k^3 A}{\delta v} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

这样在代数方程组 (8) 有解的条件下, 一旦得到 BBM 方程 (3 阶) 的一个行波解, 就立即获得推广的 B-BBM 方程 (4 阶) 的相应行波解. 事实上, 对于任意给定的 $\gamma \neq 0$, 方程 (8) 有以下一组解:

$$\begin{aligned} A &= \frac{5(-5k^3\gamma + 5\delta k^3\gamma - \delta k\mu)}{\delta^2 v}, \\ B &= \frac{5k^3\gamma}{\delta v}, \\ C &= [(-25 + 24\delta)k^2\gamma^2 + (30 - 29\delta)k^4\gamma^2 \\ & - \delta(5 - k^2 - 5\delta k^2)\gamma\mu - \delta^2\mu^2](\delta^2 k\gamma), \\ \omega &= \frac{-25k^4\gamma + 24\delta k^2\gamma - 5\delta\mu}{\delta^2}. \end{aligned}$$

3 B-BBM 方程的显式行波解

由于形变关系 (6) 不适用于 B-BBM 方程, 我们将运用齐次平衡法去获得其显式行波解. 为简化起见, 先对方程 (3) 作变量代换,

$$u \rightarrow \sqrt{\delta}u, \quad x \rightarrow \sqrt{\delta}x, \quad t \rightarrow t, \quad \mu \rightarrow \frac{\mu}{\delta},$$

则方程 (3) 成为

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} - u_{xxt} = 0, \quad (3')$$

因此下面的讨论是针对 (3') 式进行的.

根据齐次平衡法, 为使方程 (3') 中非线性项 uu_x 与最高阶导数项 $-u_{xxt}$ 平衡, 可以假设 (3') 式具有下述形式的解

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2 f(w)}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial f}{\partial t} + b \\ &= f'' w_x w_t + f' w_{xt} + af' w_t + b, \quad w = w(x, t) \end{aligned} \quad (9)$$

其中函数 f, w 以及常数 a, b 待定.

将 (9) 式代入 (3') 式, 借助于 Mathematica 软件进行计算并整理得下面的约束方程:

$$\begin{aligned} & (f''f''' - f^{(5)})w_t^2w_x^3 + \\ & [(-af^{(4)} + af'f''' + af'^2)w_t^2w_x^2 \\ & + (2f'' - 6f^{(4)} + f'f''')w_t w_x^2 w_{xt} \\ & + (f'' - 3f^{(4)})w_t^2 w_x w_{xx} \\ & - f^{(4)}w_t w_x^3 - \mu f^{(4)}w_t w_x^3] \\ & + [(f''' + a^2 f'f'')w_x w_t^2 - af'''w_x^2 w_{tt} \\ & + (4af'f'' - 4af''')w_x w_{xt} w_t \\ & + (2f'f'' - 6f''')w_x w_{xt}^2 - 3f'''w_x^2 w_{xt} \\ & + (af'f'' - af''')w_t^2 w_{xx} \\ & - 3f'''w_x w_{xx} w_{tt} + (f'f'' - 6f''')w_{xx} w_{xt} w_t \\ & + (f'f'' - 6f''')w_x w_{xxx} w_t \\ & + (bf''' - a\mu f''')w_x^2 w_t - f'''w_{xxx} w_t^2 \\ & - 3\mu f'''w_x^2 w_{xt} - 3\mu f'''w_x w_{xx} w_t] \\ & + [af''w_t^2 + f'w_x w_{tt} + (2f'' + a^2 f'^2)w_{xt} w_t \\ & + (af'^2 - 2af'')w_{xt}^2 + (af'^2 - 2af'')w_{xxt} w_t \\ & - 2af''w_x w_{xt} - af''w_{xx} w_{tt} - 3f''w_{xx} w_{xt} \\ & + (f'^2 - 6f'')w_{xt} w_{xxt} - 3\mu f''w_x w_{xxt} \\ & + (2bf'' - 2a\mu f'')w_x w_{xt} + abf''w_x w_t \\ & + (bf'' - a\mu f'')w_{xx} w_t - \mu f''(3w_{xt} w_{xx} + w_t w_{xxx}) \\ & - 3f''w_x w_{txx} - f'w_{tt} w_{xxx} - 2f''w_t^2 w_{txx}] \\ & + [aw_{tt} + w_{xtt} + abw_{xt} + (b - a\mu)w_{xxt} \\ & - aw_{xxt} - \mu w_{xxt} - w_{xxx}] f' = 0. \end{aligned}$$

令

$$f''f''' - f^{(5)} = 0, \quad (10)$$

可得

$$f(w) = -12 \ln w,$$

从而

$$\begin{aligned} f'f''' &= 4f^{(4)}, \quad f'^2 = 2f^{(4)} \\ f'f'' &= 6f''', \quad f'^2 = 12f''. \end{aligned} \quad (11)$$

将关系 (10) (11) 式代入上面的约束方程后, 令 $f', f'', f''', f^{(4)}$ 的系数等于零, 得到一组 $w(x, t)$ 满足的约束:

$$\begin{aligned} & 5aw_t^2 w_x^2 - \mu w_t w_x^3 - w_{tt} w_x^3 + 2w_t w_x^2 w_{xt} \\ & - w_t^2 w_x w_{xx} = 0, \\ & (1 + 6a^2)w_x w_t^2 + (b - a\mu)w_x^2 w_t - aw_x^2 w_{tt} \\ & + 20aw_x w_{xt} w_t - 3\mu w_x^2 w_{xt} + 6w_x w_{xt}^2 - 3w_x^2 w_{xtt} \\ & + 5aw_t^2 w_{xx} - 3\mu w_x w_{xx} w_t - 3w_x w_{xx} w_{tt} - w_{xxx} w_t^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&aw_t^2 + abw_t w_x + w_t w_x + (2 + 12a^2)w_t w_{tx} \\
&+ (2b - 2a\mu)w_x w_{xt} + 10aw_{xt}^2 - 2aw_x w_{tx} \\
&+ (b - a\mu)w_{xx} w_t - aw_{xx} w_t - 3\mu w_{xt} w_{xx} \\
&- 3w_{xx} w_{xt} + 10aw_{xt} w_t - 3\mu w_x w_{xt} + 6w_{xt} w_{xxt} \\
&- 3w_x w_{xxt} - \mu w_t w_{xxx} - w_{xxx} w_t - 2w_t w_{xxx} = 0, \\
&aw_t + w_{xt} + abw_{xt} + (b - a\mu)w_{xxt} \\
&- aw_{xxt} - \mu w_{xxt} - w_{xxt} = 0.
\end{aligned}$$

上面方程组的特点是其中每个方程的左端分别是 $u(x, t)$ 的偏导数的一次至四次齐次函数, 故可设 $u(x, t)$ 具有形式

$$u(x, t) = 1 + \exp(cx + dt), \quad (12)$$

其中 c, d 为待定常数.

将 (12) 式代入上面关于 $u(x, t)$ 的方程组并化简得下述代数方程组

$$\begin{aligned}
&(a + c)d(bc + d - c^2 d - c^2 \mu) = 0, \\
&d[12a^2 cd + c(3bc + 3d - 3c^2 d - 7c^2 \mu) \\
&+ c(bc + d + 17c^2 d - 3c^2 \mu)] = 0, \\
&cd[bc + (1 + 6a^2 + 24ac - c^2)d \\
&- c(a + 6c)\mu] = 0, \\
&c^2 d(5ad - c\mu) = 0.
\end{aligned} \quad (13)$$

一旦获得其解 a, b, c, d , 便得到了 B-BBM 方程的解的显式表示

$$\begin{aligned}
&u(x, t) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial f}{\partial t} + b \\
&= \frac{b(1 + e^{cx+dt})^2 - 12de^{cx+dt}(a + c + ae^{cx+dt})}{(1 + e^{cx+dt})^2} \\
&= b - 6ad - 3cd \operatorname{sech}^2 \frac{cx + dt}{2} - 6ad \tanh \frac{cx + dt}{2}.
\end{aligned} \quad (14)$$

从 (14) 式可知, 这里获得的 B-BBM 方程的解可视为一个扭结形孤立子和一个钟形孤立子的组合.

事实上, 求解代数方程组 (13) 对于任意 $c \neq 0$ 可以得出下列两组非平凡解

$$\begin{aligned}
&1) \left\{ a = -c, b = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{c} + 6c \right) \mu, d = -\frac{\mu}{5} \right\}, \\
&2) \left\{ a = c, b = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{c} + 6c \right) \mu, d = \frac{\mu}{5} \right\}.
\end{aligned}$$

将其代入解的显式表示式 (14) 可得方程 (3) 的两个解为

$$u_1 = \frac{\mu}{5c} \left(1 + 3c^2 \operatorname{sech}^2 \frac{5cx - t\mu}{10} - 6c^2 \tanh \frac{5cx - t\mu}{10} \right),$$

$$u_2 = -\frac{\mu}{5c} \left(1 + 3c^2 \operatorname{sech}^2 \frac{5cx + t\mu}{10} + 6c^2 \tanh \frac{5cx + t\mu}{10} \right),$$

其中 c 任意非零数.

4 应用与讨论

作为应用的例子, 我们已经知道^[10], BBM 方程存在如下形式的行波解

$$\begin{aligned}
U(\xi) &= 12\sqrt{v^2 + 2C} \frac{e^{\alpha(\xi + \xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi + \xi_0)})^2} \\
&+ v - \sqrt{v^2 + 2C}.
\end{aligned}$$

这里 $v > 0, \alpha$ (常数) 满足

$$v^2 + 2C > 0, \xi = x - vt,$$

ξ_0 为任意实数,

$$\alpha \equiv \frac{\sqrt[4]{v^2 + 2C}}{\sqrt{\delta}v}.$$

特别地, 当 $C = 0$ 时, 对任意实数 $v > 0$, 得到钟状孤子解

$$U(\xi) = \frac{12ve^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi + \xi_0)}}{(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi + \xi_0)})^2}. \quad (15)$$

记 $E \equiv e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi + \xi_0)}$, 则由形变关系 (6) 式应得到推广的 B-BBM 方程的行波解为

$$\begin{aligned}
u(\eta) &= AU(\eta) + BU_\eta(\eta) + C \\
&= 12vU(\eta) \left(A + \frac{B}{\sqrt{\delta}} - \frac{2B}{\sqrt{\delta}} \frac{1}{1 + E(\eta)} \right) + C.
\end{aligned} \quad (16)$$

此处 $E(\eta) \equiv e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\eta + \eta_0)}$, A, B, C 由约束式 (8) 给出.

注记 1 从 (16) 式看出方程 (2) 的解可通过 BBM 方程的解 U_M (钟状孤子) 和 Burgers 方程的解 U_B (扭状孤子) 按下述混合形变关系生成

$$u(\eta) = AU_M(B + CU_B) + D,$$

这是一个新的结果, 在研究 B-KdV 方程解的结构时, 也曾出现此类现象^[6].

注记 2 B-BBM 方程的解 (即 $\gamma = 0$ 的情形) 不能由 BBM 方程的解通过本文中的形变关系 (6) 以及其他的多项式型、分式型^[7,11] 等非线性形变关系得到. B-BBM 方程和 BBM 方程的解间是否存在形变关系, 若存在, 其形变关系又具何种形式有待于今后的讨论.

- [1] Li Yishen *et al.* , Lecture on Nonlinear Science(University of Science and Technology of China , Hefei , 1994 [in Chinese] 李翌神等 非线性科学选讲 中国科技大学出版社 ,合肥 ,1994).
- [2] K. Y. Guan , G. Gao , *Science in China*(Series A) , (1 [1987] 64 (in Chinese] 管克英、高歌 中国科学(A 辑) (1 [1987] 64).
- [3] D. F. Chen , S. Y. Lou , *Acta Physica Sinica* , **40**(1991) , 513 [in Chinese] 陈德芳、楼森岳 , 物理学报 , **40**(1991) , 513].
- [4] S. Y. Lou , G. J. Ni , *J. Math. Phys.* , **30**(1989) , 1614.
- [5] M. L. Wang , *Phys. Lett.* , **A213**(1996) , 279.
- [6] S. L. Xiong , *Chinese Science Bull.* , **34**(1989) , 26(in Chinese)
- [7] S. Y. Lou , D. F. Chen , *Commun. Theor. Phys.* , **19**(1993) , 247.
- [8] T. B. Benjamin , J. L. Bona , J. J. Mahony , *Philos Trans R Soc. London Ser.* , **A272**(1972) , 47.
- [9] H. J. Zhao , B. J. Xuan , *Nonlinear Anal.* , **28**(1997) , 1835.
- [10] W. G. Zhang *et al.* , *Acta Math. Science* , **12**(1992) , 325 [in Chinese] 张卫国等 , 数学物理学报 , **12**(1992) , 325].
- [11] S. Y. Lou , *Acta Physica Sinica* , **49**(2000) , 1657 (in Chinese] 楼森岳 , 物理学报 , **49**(2000) , 1657].

EXPLICIT EXACT SOLUTIONS OF GENERALIZED B-BBM AND B-BBM EQUATIONS*

CHEN SONG-LIN HOU WEI-GEN

(Department of Mathematics and Physics , Anhui University of Technology , Maanshan 243002 , China)

(Received 14 January 2001 ; revised manuscript received 5 May 2001)

ABSTRACT

The deformation theory for the solutions of BBM equation and generalized B-BBM equation and homogenous balance methods (HBM) for B-BBM equation are studied. The authors propose a new class of deformation formula which can produce the exact explicit solutions of generalized B-BBM equation by deforming the known solution of BBM equation. This paper concludes with an elementary example. As a byproduct , another class of deformation relation(called hybrid) is obtained.

Keywords : Deformation theory , Homogenous balance methods , Explicit solution , Generalized B-BBM equation , B-BBM equation

PACC : 0340K , 0290

* Project supported by Grants form the Committee of Education in Anhui Province for the mid-aged or Young Discipline Leaders and Natural Science Research (Grant No. 99JL0166).