第 50 卷 第 10 期 2001 年 10 月
1000-3290/2001/50(10)/1842-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50, No.10, October, 2001
©2001 Chin. Phys. Soc.

推广的 B-BBM 方程和 B-BBM 方程的显式精确解*

陈松林 侯为根

(安徽工业大学数理系,马鞍山市 243002)

(2001 年 1 月 14 日收到;2001 年 5 月 5 日收到修改稿)

研究了 BBM 方程和推广的 B-BBM 方程解之间的形变理论,通过给出的一类新的形变关系可从 BBM 方程的已知解形变出推广的 B-BBM 方程的显式精确解,并附有这种方法的应用举例. 还对 B-BBM 方程运用齐次平衡法获得其解的显式表示.

关键词:形变理论,齐次平衡法,显式精确解,推广的 B-BBM 方程,B-BBM 方程

PACC:0340K,0290

1 引 言

众所周知,KdV 方程现已成为数学物理的基本方程之一,有关的研究也十分活跃[1—7],然而,Benjamin-Bona-Mahony 在水波研究中建议用下述方程(BBM)[8]

$$u_t + uu_x - \delta u_{xxt} = 0 \qquad x \in R, t > 0 \tag{1}$$

作为规范方程,并断言这是比 KdV 方程更合适的数学物理模型方程,如果计及黏性和耗散作用(如湍流问题),则相应的模型方程为推广的 Bergurs-BBM 混合型方程[9]

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad x \in R, t > 0. \tag{2}$$

特别地若 $\gamma = 0$,方程(2)变成所谓的 B-BBM 方程

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} = 0. \tag{3}$$

文献[6]由于找到了 B-KdV 方程的一类显式精确解,从而使文献[2]对 B-KdV 方程的定性分析更加细致;最近,文献[9]通过一系列精细的估计研究了形如方程(2)解的存在性和收敛性结果,但由于未给出方程(2)的显式解析解,因而其讨论仅限于定性的.

本文通过研究方程(1)与(2)解之间的形变理论,给出一种新的形变关系由方程(1)的已知解[10]求出方程(2)的一类显式解,这样的结论可用于定量的讨论,最后给出其应用的例子,该例还说明了(2)式的解可由 Bergurs 方程的解与 BBM 方程的解混合形变给出. 应该指出的是,文献[3,7]中的形变关系以及通常的齐次平衡法[5],此处不再适用,因此,正如文献[3]所说,寻找合适的形变关系乃是一个有趣的问题;此外,对方程(3),本文成功地应用齐次平衡法获得了其显式精确解.

2 推广的 B-BBM 方程的显式行波解

记 BBM 方程(1)的行波解为 $U(\xi)$,则有

$$-vU_\xi + UU_\xi + v\delta U_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{4}$$

其中 $U(\xi) = U(x,t)$, $\xi = x - vt$.

对(4)式关于 ξ 积分两次得

$$U_{\xi\xi} = \frac{U}{\delta} - \frac{U^2}{2\delta v} + C_1 \tag{5a}$$

及

$$U_\xi^2 = \frac{U^2}{\delta} - \frac{U^3}{3\delta v} + 2C_1 U + C_2. \tag{5b}$$

为了利用 $U(\xi)$ 的结构获得(2)式的解,将对其进行合适的形变. 由于文献[3,7]中建议的多项式形变关系在此并不适用,我们构造了下述新的形变公式

$$u(\eta) = AU(\eta) + BU_\eta(\eta) + C, \tag{6}$$

其中 $u(\eta)$ 是方程(2)的解,$\eta = kx - wt - \eta_0$,(k, w 为待定的时空膨胀因子),A, B, C 是待定常数.

此时对于推广的 B-BBM 方程的行波解 $u(\eta)$ 应满足

$$-wu_\eta + kuu_\eta - k^2\mu u_{\eta\eta} + \delta k^2 wu_{\eta\eta\eta} + k^4\gamma u_{\eta\eta\eta\eta} = 0.$$

* 安徽省高校中青年学科带头人培养基金及省教委科研基金(批准号:99JL0166)资助的课题.

积分上式一次并将(6)式代入所得结果有

$$
\begin{aligned}
&-w(AU+BU_\eta+C)+\frac{k}{2}(AU+BU_\eta+C)^2\\
&-k^2\mu(AU_\eta+BU_{\eta\eta})+\delta k^2 w(AU_{\eta\eta}+BU_{\eta\eta\eta})\\
&+\gamma k^4(AU_{\eta\eta\eta}+BU_{\eta\eta\eta\eta})=C_3. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

经过冗长而细致的计算可得形变关系式中的常数 A,B,C,k,w 满足的纯代数限制条件($\gamma\neq 0$)

$$
\begin{aligned}
&\left(A^2+\frac{B^2}{\delta}\right)+\mu k\frac{B}{\delta v}-\frac{kwA}{v}-\frac{5\gamma k^3 B}{\delta v}=0,\\
&-B+\frac{5\gamma k^3}{\delta v}=0,\\
&-wB+kBC-\mu k^2 A+k^2 wB+\gamma k^4\frac{A}{\delta}=0,\\
&AB-\frac{kwB}{v}-\frac{\gamma k^3 A}{\delta v}=0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

这样在代数方程组(8)有解的条件下,一旦得到 BBM 方程(3 阶)的一个行波解,就立即获得推广的 B-BBM 方程(4 阶)的相应行波解. 事实上,对于任意给定的 $\gamma\neq 0$,方程(8)有以下一组解:

$$
\begin{aligned}
A&=\frac{5(-5k^3\gamma+5\delta k^3\gamma-\delta k\mu)}{\delta^2 v},\\
B&=\frac{5k^3\gamma}{\delta v},\\
C&=[(-25+24\delta)k^2\gamma^2+(30-29\delta)k^4\gamma^2\\
&\quad-\delta(5-k^2-5\delta k^2)\gamma\mu-\delta^2\mu^2]/(\delta^2 k\gamma),\\
w&=\frac{-25k^4\gamma+24\delta k^2\gamma-5\delta\mu}{\delta^2}.
\end{aligned}
$$

3　B-BBM 方程的显式行波解

由于形变关系(6)不适用于 B-BBM 方程,我们将运用齐次平衡法去获得其显式行波解. 为简化起见,先对方程(3)作变量代换,

$$u\to\sqrt{\delta}u,\ x\to\sqrt{\delta}x,\ t\to t,\ \mu\to\frac{\mu}{\delta},$$

则方程(3)成为

$$u_t+uu_x-\mu u_{xx}-u_{xxt}=0, \qquad (3')$$

因此下面的讨论是针对(3′)式进行的.

根据齐次平衡法,为使方程(3′)中非线性项 uu_x 与最高阶导数项 $-u_{xxt}$ 平衡,可以假设(3′)式具有下述形式的解

$$
\begin{aligned}
u&=\frac{\partial^2 f(w)}{\partial x\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial t}+b\\
&=f''w_xw_t+f'w_{xt}+af'w_t+b,\ w=w(x,t), \qquad (9)
\end{aligned}
$$

其中函数 f,w 以及常数 a,b 待定.

将(9)式代入(3′)式,借助于 Mathematica 软件进行计算并整理得下面的约束方程:

$$
\begin{aligned}
&(f''f'''-f^{(5)})w_t^2w_x^3+\\
&[(-af^{(4)}+af'f'''+af''^2)w_t^2w_x^2\\
&+(2f''-6f^{(4)}+f'f''')w_tw_x^2w_{xt}\\
&+(f''-3f^{(4)})w_t^2w_xw_{xx}\\
&-f^{(4)}w_{tt}w_x^3-\mu f^{(4)}w_tw_x^3]\\
&+[(f'''+a^2f'f'')w_xw_t^2-af'''w_x^2w_{tt}\\
&+(4af'f''-4af''')w_xw_{xt}w_t\\
&+(2f'f''-6f''')w_xw_{xt}^2-3f'''w_x^2w_{xtt}\\
&+(af'f''-af''')w_t^2w_{xx}\\
&-3f'''w_xw_{xx}w_{tt}+(f'f''-6f''')w_{xx}w_{xt}w_t\\
&+(f'f''-6f''')w_xw_{xxt}w_t\\
&+(bf'''-a\mu f''')w_x^2w_t-f'''w_{xxx}w_t^2\\
&-3\mu f'''w_x^2w_{xt}-3\mu f'''w_xw_{xx}w_t]\\
&+[af''w_t^2+f''w_xw_{tt}+(2f''+a^2f'^2)w_{xt}w_t\\
&+(af'^2-2af'')w_{xt}^2+(af'^2-2af'')w_{xxt}w_t\\
&-2af''w_xw_{xtt}-af''w_{xx}w_{tt}-3f''w_{xx}w_{xtt}\\
&+(f'^2-6f'')w_{xt}w_{xxt}-3\mu f''w_xw_{xxt}\\
&+(2bf''-2a\mu f'')w_xw_{xt}+abf''w_xw_t\\
&+(bf''-a\mu f'')w_{xx}w_t-\mu f''(3w_{xt}w_{xx}+w_tw_{xxx})\\
&-3f''w_xw_{ttxx}-f''w_{tt}w_{xxx}-2f''w_t^2w_{txxx}]\\
&+[aw_{tt}+w_{xtt}+abw_{xt}+(b-a\mu)w_{xxt}\\
&-aw_{xxtt}-\mu w_{xxxt}-w_{xxxtt}]f'=0.
\end{aligned}
$$

令

$$f''f'''-f^{(5)}=0, \qquad (10)$$

可得

$$f(w)=-12\ln w,$$

从而

$$
\begin{aligned}
&f'f'''=4f^{(4)},\quad f''^2=2f^{(4)}\\
&f'f''=6f''',\quad f'^2=12f''. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

将关系(10),(11)式代入上面的约束方程后,令 $f',f'',f''',f^{(4)}$ 的系数等于零,得到一组 $w(x,t)$ 满足的约束:

$$
\begin{aligned}
&5aw_t^2w_x^2-\mu w_tw_x^3-w_{tt}w_x^3+2w_tw_x^2w_{xt}\\
&-w_t^2w_xw_{xx}=0,\\
&(1+6a^2)w_xw_t^2+(b-a\mu)w_x^2w_t-aw_x^2w_{tt}\\
&+20aw_xw_{xt}w_t-3\mu w_x^2w_{xt}+6w_xw_{xt}^2-3w_x^2w_{xtt}\\
&+5aw_t^2w_{xx}-3\mu w_xw_{xx}w_t-3w_xw_{xx}w_{tt}-w_{xxx}w_t^2=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&aw_t^2 + abw_tw_x + w_{tt}w_x + (2 + 12a^2)w_tw_{tx} \\
&+ (2b - 2a\mu)w_xw_{xt} + 10aw_{xt}^2 - 2aw_xw_{ttx} \\
&+ (b - a\mu)w_{xx}w_t - aw_{xx}w_{tt} - 3\mu w_{xt}w_{xx} \\
&- 3w_{xx}w_{xtt} + 10aw_{xxt}w_t - 3\mu w_xw_{xxt} + 6w_{xt}w_{xxt} \\
&- 3w_xw_{xxtt} - \mu w_tw_{xxx} - w_{xxx}w_{tt} - 2w_tw_{xxxt} = 0, \\
&aw_{tt} + w_{xtt} + abw_{xt} + (b - a\mu)w_{xxt} \\
&- aw_{xxtt} - \mu w_{xxxt} - w_{xxxtt} = 0.
\end{aligned}
$$

上面方程组的特点是其中每个方程的左端分别是 $w(x,t)$ 的偏导数的一次至四次齐次函数，故可设 $w(x,t)$ 具有形式

$$w(x,t) = 1 + \exp(cx + dt), \tag{12}$$

其中 c,d 为待定常数.

将(12)式代入上面关于 $w(x,t)$ 的方程组并化简得下述代数方程组

$$
\begin{aligned}
&(a + c)d(bc + d - c^2d - c^2\mu) = 0, \\
&d[12a^2cd + c(3bc + 3d - 3c^2d - 7c^2\mu) \\
&+ a(bc + d + 17c^2d - 3c^2\mu)] = 0, \\
&cd[bc + (1 + 6a^2 + 24ac - c^2)d \\
&- c(a + 6c)\mu] = 0, \\
&c^2d(5ad - c\mu) = 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

一旦获得其解 a,b,c,d，便得到了 B-BBM 方程的解的显式表示

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial t} + b \\
&= \frac{b(1 + e^{cx+dt})^2 - 12de^{cx+dt}(a + c + ae^{cx+dt})}{(1 + e^{cx+dt})^2} \\
&= b - 6ad - 3cd\,\mathrm{sech}^2\frac{cx + dt}{2} - 6ad\tanh\frac{cx + dt}{2}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

从(14)式可知，这里获得的 B-BBM 方程的解可视为一个扭结形孤立子和一个钟形孤立子的组合.

事实上，求解代数方程组(13)对于任意 $c \neq 0$ 可以得出下列两组非平凡解

1) $\left\{a = -c, b = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{c} + 6c\right)\mu, d = -\frac{\mu}{5}\right\}$,

2) $\left\{a = c, b = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{c} + 6c\right)\mu, d = \frac{\mu}{5}\right\}$.

将其代入解的显式表示式(14)可得方程(3)的两个解为

$$u_1 = \frac{\mu}{5c}\left(1 + 3c^2\,\mathrm{sech}^2\frac{5cx - t\mu}{10} - 6c^2\tanh\frac{5cx - t\mu}{10}\right),$$

$$u_2 = -\frac{\mu}{5c}\left(1 + 3c^2\,\mathrm{sech}^2\frac{5cx + t\mu}{10} + 6c^2\tanh\frac{5cx + t\mu}{10}\right),$$

其中 c 任意非零数.

4 应用与讨论

作为应用的例子，我们已经知道[10]，BBM 方程存在如下形式的行波解

$$
\begin{aligned}
U(\xi) = {} & 12\sqrt{v^2 + 2C}\,\frac{e^{\alpha(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2} \\
& + v - \sqrt{v^2 + 2C}.
\end{aligned}
$$

这里 $v > 0$，C(常数)满足

$$v^2 + 2C > 0, \xi = x - vt,$$

ξ_0 为任意实数，

$$\alpha \equiv \frac{\sqrt[4]{v^2 + 2C}}{\sqrt{\delta}v}.$$

特别地，当 $C = 0$ 时，对任意实数 $v > 0$，得到钟状孤子解

$$U(\xi) = \frac{12ve^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi+\xi_0)}}{(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi+\xi_0)})^2}. \tag{15}$$

记 $E \equiv e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\xi+\xi_0)}$，则由形变关系(6)式应得到推广的 B-BBM 方程的行波解为

$$
\begin{aligned}
u(\eta) &= AU(\eta) + BU_\eta(\eta) + C \\
&= 12vU(\eta)\left(A + \frac{B}{\sqrt{\delta}} - \frac{2B}{\sqrt{\delta}}\frac{1}{1 + E(\eta)}\right) + C.
\end{aligned} \tag{16}
$$

此处 $E(\eta) \equiv e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}}(\eta+\eta_0)}$，$A,B,C$ 由约束式(8)给出.

注记 1 从(16)式看出方程(2)的解可通过 BBM 方程的解 U_M(钟状孤子)和 Bergurs 方程的解 U_B(纽状孤子)按下述混合形变关系生成

$$u(\eta) = AU_M(B + CU_B) + D,$$

这是一个新的结果，在研究 B-KdV 方程解的结构时，也曾出现此类现象[6].

注记 2 B-BBM 方程的解(即 $\gamma = 0$ 的情形)不能由 BBM 方程的解通过本文中的形变关系(6)以及其他的多项式型、分式型[7,11]等非线性形变关系得到. B-BBM 方程和 BBM 方程的解间是否存在形变关系，若存在，其形变关系又具何种形式有待于今后的讨论.

[1] Li Yishen *et al*., Lecture on Nonlinear Science (University of Science and Technology of China, Hefei, 1994) (in Chinese) [李翌神等,非线性科学选讲(中国科技大学出版社,合肥,1994)].

[2] K.Y. Guan, G. Gao, *Science in China* (Series A), (1) (1987), 64 (in Chinese) [管克英、高歌,中国科学(A 辑),(1)(1987),64].

[3] D.F. Chen, S.Y. Lou, *Acta Physica Sinica*, **40** (1991), 513 (in Chinese) [陈德芳、楼森岳,物理学报,**40**(1991),513].

[4] S.Y. Lou, G.J. Ni, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 1614.

[5] M.L. Wang, *Phys. Lett.*, **A213** (1996), 279.

[6] S.L. Xiong, *Chinese Science Bull.*, **34** (1989), 26 (in Chinese) [熊树林,科学通报,**34**(1989),26].

[7] S.Y. Lou, D.F. Chen, *Commun. Theor. Phys.*, **19** (1993), 247.

[8] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, *Philos Trans R Soc. London Ser.*, **A272** (1972), 47.

[9] H.J. Zhao, B.J. Xuan, *Nonlinear Anal.*, **28** (1997), 1835.

[10] W.G. Zhang *et al*., *Acta Math. Science*, **12** (1992), 325 (in Chinese) [张卫国等,数学物理学报,**12**(1992),325].

[11] S.Y. Lou, *Acta Physica Sinica*, **49** (2000), 1657 (in Chinese) [楼森岳,物理学报,**49**(2000),1657].

EXPLICIT EXACT SOLUTIONS OF GENERALIZED B-BBM AND B-BBM EQUATIONS*

CHEN SONG-LIN HOU WEI-GEN

(*Department of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Maanshan* 243002, *China*)

(Received 14 January 2001; revised manuscript received 5 May 2001)

ABSTRACT

The deformation theory for the solutions of BBM equation and generalized B-BBM equation and homogenous balance methods (HBM) for B-BBM equation are studied. The authors propose a new class of deformation formula which can produce the exact explicit solutions of generalized B-BBM equation by deforming the known solution of BBM equation. This paper concludes with an elementary example. As a byproduct, another class of deformation relation (called hybrid) is obtained.

Keywords: Deformation theory, Homogenous balance methods, Explicit solution, Generalized B-BBM equation, B-BBM equation

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by Grants form the Committee of Education in Anhui Province for the mid-aged or Young Discipline Leaders and Natural Science Research (Grant No. 99JL0166).