

考虑车辆相对运动速度的交通流 演化过程的数值模拟*

薛 郁¹⁾²⁾ 董力耘¹⁾ 袁以武¹⁾ 戴世强¹⁾

¹⁾ 上海大学上海市应用数学与力学研究所,上海 200072)

²⁾ 广西大学物理系,南宁 530004)

(2001 年 7 月 16 日收到,2001 年 9 月 3 日收到修改稿)

提出考虑了车辆相对运动速度的最佳速度跟车模型,对该模型稳定性进行了分析,对其所描述的交通流的演化过程进行了数值模拟,并与未考虑相对运动速度的最佳速度跟车模型作了比较.

关键词:交通流,最佳速度,跟车模型,相对运动速度

PACC:0550,0520,6470

1 引 言

近年来,人们应用各种方法描述交通流的聚集性质^[1],例如已先后提出模拟一维和二维交通流阻塞的元胞自动机交通流模型^[2,3],由于交通流系统本质上属于离散的非线性动力系统,用元胞自动机理论描述极为合适,可有效地、高速地在计算机上进行并行数值模拟,目前在交通流问题的模拟研究中,已经展现出良好的应用前景,而且出现了很多有理论意义和应用价值的元胞自动机交通流模型.在应用元胞自动机理论来模拟、研究交通流问题的各个方面,许多学者已经做了大量的工作^[4-6].除元胞自动机交通流模型之外,还有描述交通流的跟车模型.最早的跟车模型是 1953 年 Pipes 提出的如下方程所描述的跟车模型^[7]:

$$\dot{x}_k = \frac{1}{T}(\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k), \quad (1)$$

式中等号左端看作惯性项,右端看作阻尼项.当前车速度大于后车时,后车加速,当前车速度小于后车时,后车减速,这就是基本的跟车模型思想.单一车道时间连续的跟车模型基本上是通过加速函数来确定的^[8], k 车的加速度 $\dot{v}_k(t + T_r)$ 通过时间 T_r 延迟而得到,可表示为

$$\dot{v}_k(t + T_r) = -\frac{\lambda v_k^m \Delta v_k}{\Delta x_k^l}. \quad (2)$$

方程(2)表示车辆的减速 $-\dot{v}_k(t + T_r)$ 与车辆之间接近的相对速度成正比.

$$\Delta v_k = v_{k+1}(t) - v_k(t). \quad (3)$$

此外,加速度与 k 车本身的速度有关,与本身的速度 v_k 的 m 幂次方成正比,而与车间距 Δx_k 的 l 幂次方成反比, l_k 为车辆的长度.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k - l_k. \quad (4)$$

按照方程(2),加速过程只与前方车辆有关,但该模型不适合于较低的车辆密度^[9].如果 k 车的前方没有其他车辆($\Delta x_k \rightarrow \infty$),那么加速度无法确定($l = 0$)或为零($l > 0$),与 k 车的速度无关,在这种情况下,驾驶员可以加速到期望速度.而在高密度情况下,跟车模型的行为在某些程度上是不真实的,特别地,车间距 Δx_k 不必弛豫到平衡值,在很小的车间距如果相对速度 Δv_k 为零,也不会导致刹车作用.这些问题由 Newell 的跟车模型所解决^[10],在该模型中,在 $t + T_r$ 时刻的车速与车间距有关,车辆在反应时间 T_r 内调整车速达到最佳速度 $V(\Delta x_k(t))$.

$$v_k(t + T_r) = V(\Delta x_k(t)). \quad (5)$$

最佳速度 $V(\Delta x_k(t))$ 为

$$V(\Delta x_k) = v_0 \{1 - \exp[-(\Delta x_k - x_c)(v_0 T)]\}, \quad (6)$$

式中 v_0 为期望速度, T 为表示在高密度交通流情况下跟车行为的安全时间间隔.Newell 模型的速度与密度相关将导致具有不现实的 v_0/T_r 量级的加速度^[9].

* 国家自然科学基金(批准号:19872042 和 19932020)资助的课题.

最近, Bando 等人提出了一个称为最佳速度的跟车模型^[11]:

$$\dot{v}_k(t) = \frac{V(\Delta x_k(t)) - v_k}{\tau}, \quad (7)$$

τ 为速度弛豫时间, 最佳速度 $V(\Delta x_k(t))$ 的形式为

$$V(\Delta x_k) = \frac{v_{\max}}{2} [\tanh(\Delta x_k - x_c) + \tanh(x_c)],$$

$v_{\max}$ 为车辆行驶的最大速度, x_c 为车辆之间的安全间距. 在模拟过程中, 交通流会出现三个不同的区域: 稳定区域、亚稳态区域和不稳定区域. Komatsu 等人^[12]使用非线性分析方法从方程(7)中推出用 kink-antikink 密度波所描述在不稳定区域交通阻塞的 MKdV 方程. 而 Muramatsu 和 Nagatani^[13]推出在亚稳态区域附近密度波呈现类似 KdV 方程描述的孤波行为, 以及在稳定区域密度波呈现出 Burgers 方程描述的行为. 然而, 最佳速度模型的动力学行为与 Newell 模型不相同, 因为 Newell 的反应延迟时间 T_r 和最佳速度模型的速度弛豫时间 τ 不相同, 实际的速度弛豫时间 τ 具有的数量级是 10s (城市交通) — 40s (高速交通), 比反应延迟时间 T_r 的数量级 (约 1s) 大得多. 如果速度弛豫时间 τ 具有反应延迟时间 T_r 的数量级, 那么将导致不现实的具有 v_0/T_r 量级的加速度, 这不稳定行为的原因是忽略了相对速度的作用^[9]. 在现实交通流特别在趋近阻塞区域, 就应该考虑相对运动速度的作用. Newell 模型和最佳速度模型的加速过程和减速过程使实际速度偏离平衡速度都是对称的, 这不现实, 实际上, 刹车减速的绝对值通常强于加速过程. Tilch 和 Helbing^[14]为此提出一个相对简单的广义最佳速度模型, 称广义力模型, 该模型考虑相对运动速度对刹车减速及加速过程的不同作用, 广义力模型模拟得到城市交通阻塞的车间距和速度与用传感器实测得到的一致. Helbing 等人^[15]应用气体分子动力学理论从微观的动力学方程导出宏观的交通流方程, 在研究个体车辆的动力学行为时, 考虑了相对运动速度对车辆加速和减速行为所引起的速度改变. 本文在最佳速度跟车模型的基础上, 考虑相对运动速度对交通流的演化过程的影响, 与未考虑相对运动速度的最佳速度跟车模型进行比较, 得到相对运动速度所起的作用.

2 考虑相对运动速度的最佳速度跟车模型

跟车模型方程(7)是对通过车间距来调整车辆速度, 在延迟时间内使车辆进行加速或减速, 将速度

达到最佳速度 $V(\Delta x_n)$, 实际调整车速过程中, 还应该通过调整相对运动速度, 才能获得最佳速度 $V(\Delta x_n)$. 考虑驾驶员对相对运动速度的刺激反应, 将方程(7)改为

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = a \left(V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n}{dt} \right) + \kappa \Delta v_n(t), \quad (8)$$

式中相对运动速度 $\Delta v_k = v_{k+1}(t) - v_k(t)$, a 为对可观察的车间距 Δx_n 调整车辆速度的感应系数, $a = 1/\tau$, κ 为对相对运动速度 Δv_n 刺激的反应系数, $\kappa = \lambda/\tau$, λ 为相对运动的强度系数 ($0 \leq \lambda \leq 1$). Bando 等人证明车间距在如下范围内, 系统处于不稳定状态^[11]:

$$\Delta x_{c_1} < h < \Delta x_{c_2}. \quad (9)$$

车间距满足如下关系:

$$\frac{2V'(h)}{a} > 1. \quad (10)$$

在这些条件下, 初始均匀分布的交通流在很小的扰动下, 都会失稳而出现时停时走 (stop-and-go) 的交通阻塞状态. 本文将通过线性稳定分析得到满足方程(8)的系统处于稳定状态的条件. 初始均匀分布的交通流, 车辆的车间距均为 h , 最佳速度为 $V(h)$, 相对运动速度 Δv_n 为零. 处于这样定态的解为

$$x_{n,0}(t) = hn + V(h)t. \quad (11)$$

假设有一小扰动, 使车辆偏离上述的状态, $x_n(t) = x_{n,0}(t) + y_n(t)$, 将方程(8)线性化, 得到

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = a \left[V'(h) \Delta y_n - \frac{dy_n}{dt} \right] + \frac{\lambda}{\tau} \frac{d(\Delta y_n)}{dt}, \quad (12)$$

其中 $V'(h_c) = \left. \frac{dV(\Delta x_n)}{d\Delta x_n} \right|_{\Delta x_n = h}$. 将方程(12)的 y_n 按傅里叶级数展开, $y_n \sim \exp(ikn + zt)$, 得到

$$z^2 + a[1 - \lambda(e^{ik} - 1)]z - aV'(h)(e^{ik} - 1) = 0. \quad (13)$$

将参数 z 展开为 $z = z_1(ik) + z_2(ik)^2 + \dots$, 可得如下稳定条件:

$$V'(h)\tau = \frac{1 + 2\lambda}{2}. \quad (14)$$

当车间距满足如下关系时, 系统将处于不稳定状态:

$$\frac{2V'(h)}{a} > 1 + 2\lambda. \quad (15)$$

当 $\lambda = 0$ 时与方程(10)及文献[13]的结果一致. 从上述方程可以发现车辆的相对运动对交通流的稳定性有影响, 由于 $1 + 2\lambda \geq 1$, 因此车辆的相对运动对交通流起到稳定的作用, 下面进行的数值模拟也表明

这样的结论.

3 数值模拟

为了与未考虑相对运动速度的最佳速度跟车模型的结果进行比较,我们选取的最佳速度函数为

$$V(\Delta x_n) = \tanh(\Delta x_n - 2) + \tanh(2). \quad (16)$$

初始条件与 Bando 等人的一样,给头辆车一个小扰动,即为

$$x_N(0) = x_N^{(0)}(0) + 0.1, \quad x_n(0) = x_n^{(0)}(0) \quad (n \neq N),$$
$$\dot{x}_n(0) = 0, \quad (17)$$

选取有关参数为

$$L = 200, N = 100, a = 1.0, h = L/N \quad (18)$$

使用四阶龙格-库塔算法求解方程(8),步长取 0.1,采用周期边界条件.首先,数值模拟时步 $t = 100, 300, 1000$ 时所有车辆速度的分布,同时比较当 $\lambda = 0$ 时的情形,模拟结果如图 1 所示.

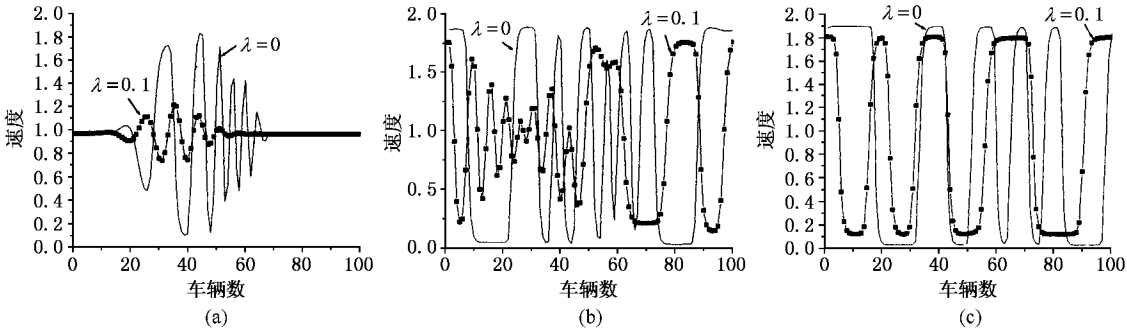
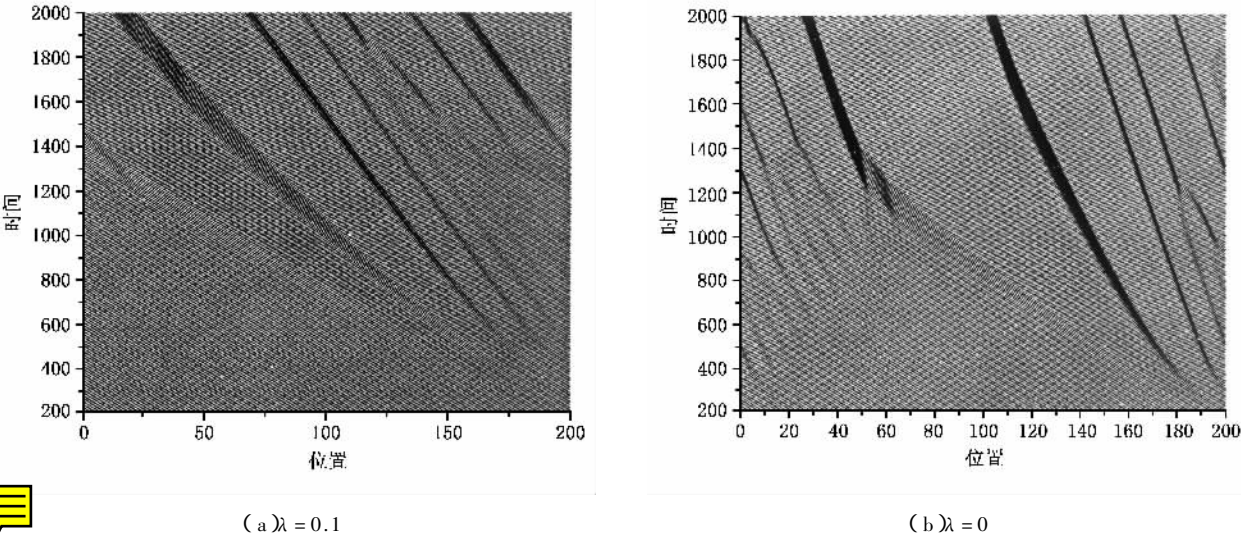


图 1 时步 t 分别取 100(a), 300(b), 1000(c) 时 $\lambda = 0.1$ 和 $\lambda = 0$ 所有车辆速度的分布

从图 1 可以发现随时步 t 的增加,初始的小扰动引起车辆的速度在 $0 - V_{\max}$ 之间波动.在时步 $t = 100$ 较小时,考虑相对运动速度的车辆速度波动变化小于 $\lambda = 0$ 时的情形,速度变化小可抑制车辆的阻塞.当时步 t 变大以后,两者的车辆速度波动变化几乎一致.该结论可以从整个系统演化的时空结构斑图看出.图 2 为系统演化的时空结构斑图,图中黑色区域表示聚集车辆密度较高的区域,灰色区域表示聚集车辆密度较低的区域,密度较高的区域称之为阻塞相,密度较低的区域称之为运动相.从系统稳

定性条件(15)式可以知道,使用上述参数,交通流在演化过程中会失稳而出现时停时走的交通阻塞状态.图 2(b)是 $\lambda = 0$ 时的时空结构斑图,与 Bando 等人的时空结构斑图一样^[11].图 2(a)是 $\lambda = 0.1$ 时的时空结构斑图,它不同于图 2(b)的时空结构斑图,其稳定区域大于图 2(b).特别在时步较小时,其稳定区域远大于图 2(b),阻塞相很小,这与上述分析车辆速度的波动变化的结论一致.从图 2 还可以看出几条黑色区域,这几条黑色区域即为车辆聚集的阻塞相,其传播方向与车辆运动方向相反,这表明



(a) $\lambda = 0.1$ (b) $\lambda = 0$

图 2 系统演化的时空结构斑图

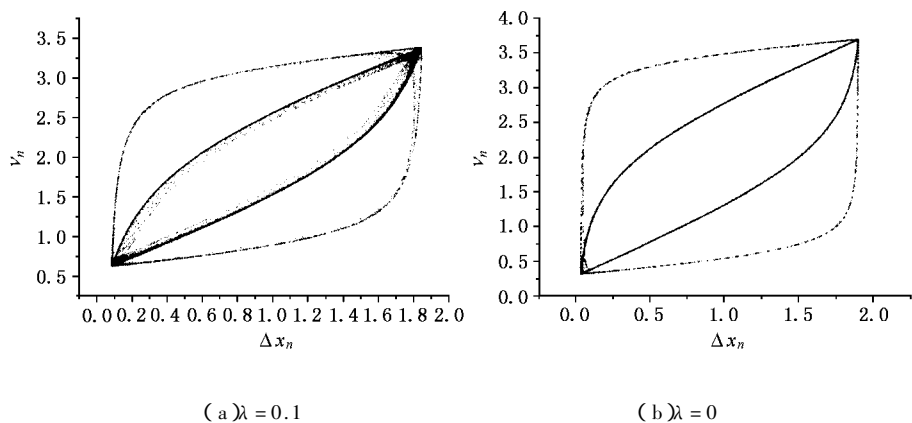


图 3 车间距与速度的关系曲线图

车辆行驶过程中会出现时停时走的现象.数值模拟得到的车间距-平均速度的关系曲线如图 3 所示,是两条具有类似磁回线的曲线.从曲线的变化趋势可以发现,交通流在演化过程中,存在车辆聚集拥挤形成过程和车辆分离消散过程.比较图 3(a)与(b),可以看出两条类似磁回线的曲线具有对称性,即拥挤形成过程和消散过程是对称的,这是由于我们考虑

的模型是一个简化的模型.

总之,本文考虑了相对运动速度的最佳速度跟车模型,数值模拟了交通流的演化过程.利用线性稳定性理论分析交通流演化过程的稳定关系,得出了相对运动速度在交通流的演化过程起到了稳定的作用,出现车辆聚集的阻塞较不考虑相对运动速度的要滞后.

[1]

Chowdhury D *et al* 2000 *Phys. Rept.* **329** 199

[2]

Nagel K and Schreckenberg M 1992 *J. Phys.* I France **2** 2221

[3]

Biham O , Middleton A A and Levine D A 1992 *Phys. Rev.* A **46** R6124

[4]

Wang B H *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1926 (in Chinese) [汪秉宏等 2000 物理学报 **49** 1926]

[5]

Lü X Y *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1255 (in Chinese) [吕晓阳等 2001 物理学报 **50** 1255]

[6]

Xue Y *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 445 (in Chinese) [薛 郁等 2001 物理学报 **50** 445]

[7]

Pipes L A 1953 *J. Appl. Phys.* **24** 274

[8]

Chandler R E *et al* 1958 *Oper. Res.* **6** 165

[9]

Treiber M *et al* 2000 *Phys. Rev.* E **62** 1805

[10]

Newell G F 1961 *Oper. Res.* **9** 209

[11]

Bando M *et al* 1995 *Phys. Rev.* E **51** 1035

[12]

Komatsu T *et al* 1995 *Phys. Rev.* E **52** 5574

[13]

Muramatsu M and Nagatani T 1999 *Phys. Rev.* E **60** 180

[14]

Tilch B and Helbing D 1998 *Phys. Rev.* E **58** 133

[15]

Helbing D *et al* 2001 *Trans. Research Part B* **35** 183

Numerical simulation on traffic flow with the consideration of relative velocity^{*}

Xue Yu^{1 2)} Dong Li-Yun¹⁾ Yuan Yi-Wu¹⁾ Dai Shi-Qiang¹⁾

¹⁾(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China*)

²⁾(*Department of Physics ,Guangxi University ,Nanning 530004 ,China*)

(Received 16 July 2001 ;revised manuscript received 3 September 2001)

Abstract

The optimal velocity model of traffic is extended by taking into account the relative velocity. We derive the stability condition and stimulate the evolution of traffic flow with a small perturbation. We have found that the relative velocity can stabilize traffic flow and decrease the number of jamming phases.

Keywords : traffic flow , optimal velocity model , jamming phase , relative velocity

PACC : 0550 , 0520 , 6470

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19872042 and 19932020).