

截断光束的广义 M^2 因子^{*}

罗时荣¹⁾ 吕百达¹⁾²⁾ 孙年春³⁾

¹⁾ (四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

²⁾ (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330027)

³⁾ (成都东骏激光有限责任公司, 成都 611630)

(2003 年 10 月 20 日收到 2003 年 11 月 21 日收到修改稿)

使用渐近分析法、广义截断二阶矩法和自收敛束宽法研究了旋转对称截断光束的广义 M^2 因子, 分析了这三种方法的物理联系以及如何惟一确定广义 M^2 因子问题, 并用数值计算结果做了说明.

关键词: 广义 M^2 因子, 渐近分析, 广义截断二阶矩法, 自收敛束宽

PACC: 4255, 4200

1. 引言

近年来, 对激光束的描述和光束质量等相关问题进行了广泛而深入的研究^[1-4]. 国际标准化组织 (ISO) 已将光束传输因子 (M^2 因子) 作为描述不同光束的一个重要参数, 对一些典型光束的 M^2 因子也已推导出来, 并规定了 M^2 因子的实验测量方法^[5-11]. 但是, 大多数研究结果仅对无光阑限制情况成立. 对受硬边光阑截断光束, 理论上 M^2 因子的计算遇到积分发散的困难. 为了克服这一困难, 具有代表性的工作如广义截断二阶矩 (GTSM) 法、渐近分析 (AA) 法和自收敛束宽 (SCBW) 法^[12-15], 其基本物理思想是对二阶矩定义进行修正或者仅取出进入光阑内的一部分激光 (功率含量百分比 f 、自收敛束宽因子 F_s) 做计算. 这些方法存在的主要不足之处是: (1) 基本公式都是针对直角坐标系下二维光束表示出来, 应推广用于有实际意义的三维光束; (2) 独立提出的三种方法是否有联系或一致性, 文献中未作讨论; (3) AA 法和 SCBW 法定义的广义 M^2 因子有随 f (或 F_s) 参数变化的不确定性问题. 本文的主要目的是针对实际工作中经常遇到的旋转对称三维光束, 在柱坐标系下用这三种方法分析旋转对称截断光束的广义 M^2 因子与光束和截断参数的依赖关系, 并对三种方法间的物理联系和如何惟一确定广义

M^2 因子的问题做了研究. 有关结果对受光阑限制截断光束的参数描述有实际意义.

2. AA 法

在柱坐标系中, 旋转对称截断光束在空域中的二阶矩 σ_r^2 可仿照文献 [14] 推广定义为

$$\sigma_r^2 = \frac{\int_0^{R_c(0)} r^3 |E(r, 0)|^2 dr}{\int_0^{R_c(0)} |E(r, 0)|^2 r dr}, \quad (1)$$

式中 $E(r, 0)$ 为入射到位于 $z = 0$ 面、半径为 a 的圆孔光阑上旋转对称光束的场分布, 积分上限 $R_c(0)$ 由

$$\int_0^{R_c(0)} |E(r, 0)|^2 r dr = f \int_0^a |E(r, 0)|^2 r dr \quad (2)$$

确定, f 称为功率含量百分比 ($f < 1$). 设 $z = 0$ 面上光束束腰宽度为 w_0 , 令 $r/w_0 = r_1$, 得

$$\sigma_r^2 = w_0^2 \delta^2, \quad (3)$$

式中

$$\delta^2 = \frac{\int_0^\epsilon r_1^3 |E(r_1, 0)|^2 dr_1}{\int_0^\epsilon |E(r_1, 0)|^2 r_1 dr_1}, \quad (4)$$

而 $\epsilon = R_c(0)/w_0$. 类似地, 在空间频率域中的二阶矩 σ_p^2 定义为

* 国家高技术研究发展计划 (批准号 2003A823070) 及江西省自然科学基金 (批准号 20020212021) 资助的课题.

$$\sigma_p^2 = \int_0^{p_c} p^3 |E(p, 0)|^2 dp / \int_0^{p_c} |E(p, 0)|^2 p dp, \quad (5)$$

式中

$$E(p, 0) = 2\pi \int_0^a E(r, 0) J_0(2\pi r p) r dr. \quad (6)$$

P_c 由

$$\int_0^{p_c} |E(p, 0)|^2 p dp = f \int_0^\infty |E(p, 0)|^2 p dp \quad (7)$$

确定, 令 $p_1 = w_0 p$, 得

$$\sigma_p^2 = \rho^2 / w_0^2, \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \int_0^{p_0} p_1^3 \left| 2\pi \int_0^{a/w_0} E(r_1, 0) J_0(2\pi r_1 p_1) r_1 dr_1 \right|^2 dp_1 \\ & / \int_0^{p_0} \left| 2\pi \int_0^{a/w_0} E(r_1, 0) J_0(2\pi r_1 p_1) r_1 dr_1 \right|^2 p_1 dp_1, \end{aligned} \quad (9)$$

而 $p_0 = w_0 P_c$. 将(3)和(8)式代入广义 M^2 因子定义

式 $M_Q^2 = 2\pi \sqrt{\sigma_r^2 \sigma_p^2}$, 得

$$M_Q^2 = 2\pi \sqrt{\delta^2 \rho^2}. \quad (10)$$

由(4), (9)和(10)式知用 AA 法确定的截断光束的 M_Q^2 因子依赖于光束形状、截断参数 a/w_0 和功率含量百分比 f , 但与光束束宽大小无关, 这意味着不同束宽的同类光束通过不同孔径的光阑, 当截断参数相同时, 取同一 f 值确定的 M_Q^2 因子相同.

3. GTSM 法

按 GTSM 法, 柱坐标系中旋转对称截断光束在空域中二阶矩 $\langle r^2 \rangle$ 、空间频率域中二阶矩 $\langle p^2 \rangle$ 和交叉矩 $\langle rp \rangle$ 为^[16]

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_0^a r^3 |E(r, 0)|^2 dr, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle = & \frac{1}{4\pi^2 I_0} \int_0^a |E'(r, 0)|^2 r dr \\ & + \frac{\chi |E(a, 0)|^2}{I_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle rp \rangle = & \frac{1}{4i\pi I_0} \int_0^a \{ r [E'(r, 0)]^* E(r, 0) \\ & - r E'(r, 0) E^*(r, 0) \} r dr, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$I_0 = \int_0^a |E(r, 0)|^2 r dr$$

为入射到光阑内的光功率, $\chi = 4/3\pi^2$; “'”表示对宗量求导. 令 $r/w = r_1$, 得

$$\langle r^2 \rangle = w^2 \alpha^2, \quad (14)$$

$$\langle p^2 \rangle = \beta^2 / 4\pi^2 w^2, \quad (15)$$

$$\langle rp \rangle = \gamma / 4\pi, \quad (16)$$

式中

$$\alpha^2 = \int_0^{a/w} r_1^3 |E(r_1, 0)|^2 dr_1 / \int_0^{a/w} |E(r_1, 0)|^2 r_1 dr_1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \beta^2 = & \left[\int_0^{a/w} |E'(r_1, 0)|^2 r_1 dr_1 + 4\pi^2 \chi \left| E\left(\frac{a}{w}, 0\right) \right|^2 \right] \\ & / \int_0^{a/w} |E(r_1, 0)|^2 r_1 dr_1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & 2\text{Im} \left[\int_0^{a/w} r_1^2 [E'(r_1, 0)]^* E(r_1, 0) dr_1 \right] \\ & / \int_0^{a/w} |E(r_1, 0)|^2 r_1 dr_1, \end{aligned} \quad (19)$$

Im 表示取积分虚部. 将(14)–(16)式代入广义 M^2 因子定义式 $M_G^2 = 2\pi \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle rp \rangle^2}$, 得

$$M_G^2 = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^2 / 4}. \quad (20)$$

由(17)–(20)式知, 用 GTSM 法定义的旋转对称截断光束的 M_G^2 因子由光束形状和截断参数 a/w 确定, 但与光束束宽参数 w 无关. 比较 AA 法和 GTSM 法知, 在 GTSM 法中, 实质上是取 χ 为定值 $4/3\pi^2$ 以能得到确定的 M_G^2 因子值, 若使 χ 变化, 则 M_G^2 与 χ 有关. 现令在这两种方法中分别由(5)和(12)式定义的空间频率域中的二阶矩 $\langle p^2 \rangle$ 和 σ_p^2 相等, 得

$$\chi = \frac{I_0}{|E(a, 0)|^2} \left\{ \sigma_p^2 - \frac{\int_0^a |E'(r, 0)|^2 r dr}{4\pi^2 I_0} \right\}. \quad (21)$$

利用(5)–(7)和(21)式, 可将系数 χ 和功率含量百分比 f 联系起来. 下面以截断高斯光束为例具体分析. 设入射场分布为

$$E(r, 0) = \exp(-r^2/w_0^2), \quad (22)$$

将(22)式代入(5)–(7)和(21)式, 得到用 GTSM 法和 AA 法定义的截断高斯光束在空间频率域中二阶

矩相等时 χ 和 f 之间的对应关系,其结果列于表 1. 表 1 中同时列出用这两种方法确定的截断高斯光束的广义 M^2 因子. 表 1 表明,用 AA 法和 GTSM 法确定的截断高斯光束的 M_Q^2 和 M_G^2 因子在 a/w_0 相同时分别随 f 和 χ 的增加而增加,并且 M_G^2 始终大于

M_Q^2 . 这是因为 GTSM 法按(11)式定义空域中二阶矩时,将入射到光阑内的光束总功率作为研究对象,而 AA 法只将入射到光阑内光束的一部分作为研究对象的缘故,但 f 足够大时二者相差不大,若 f 尽可能接近 1,用这两种方法能得到几乎相同的广义 M^2 因子.

表 1 当 χ 和 f 满足(21)式时,用 AA 法和 GTSM 法得到的截断高斯光束的广义 M^2 因子

	$a/w_0 = 0.5$				$a/w_0 = 1$			
f	0.9665	0.98	0.99	0.995	0.98	0.9805	0.99	0.995
χ	$4/3\pi^2$	0.2146	0.4123	0.8078	0.1334	$4/3\pi^2$	0.2133	0.3740
M_Q^2	1.916	2.429	3.380	4.739	1.243	1.249	1.497	1.900
M_G^2	1.955	2.458	3.400	4.753	1.267	1.272	1.511	1.910

4. SCBW 法

按 SCBW 法^[15],柱坐标系中截断光束在空域中的二阶矩可定义为

$$\sigma_r^2(z) = \int_0^{r_{\lim}} r^3 I(r,z) dr / \int_0^{r_{\lim}} I(r,z) r dr, \quad (23)$$

束宽为

$$W_s(F_s) = \sqrt{2\sigma_r^2(z)}, \quad (24)$$

而

$$r_{\lim} = F_s W_s(F_s), \quad (25)$$

F_s 为一正数,称为自收敛束宽因子, $W(F_s)$ 利用(23)–(25)式通过迭代计算得到. 而束腰宽度 W_{s0} 、束腰位置 z_0 、广义 M^2 因子(M_s^2 因子)用公式^[1]

$$W_s^2(z) = W_{s0}^2 \left[1 + M_s^4 \left(\frac{\lambda}{\pi W_{s0}^2} \right)^2 (z - z_0)^2 \right] \quad (26)$$

进行多点拟合得到. 与前两种方法不同的是,用 SCBW 法难于对 M_s^2 因子与入射光束束宽参数关系进行解析分析,但对具体光束可用数值计算研究. 下面以截断高斯光束为例分析,计算所用光学系统如图 1 所示,从 RP_1 至 RP_2 参考面的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/F & L + z - Lz/F \\ -1/F & 1 - L/F \end{pmatrix}, \quad (27)$$

式中 F 为薄透镜焦距. 将(22)和(27)式代入 Collins 公式^[17]

$$E(r,z) = \frac{ik}{B} \exp\left(-\frac{ikDr^2}{2B}\right) \int_0^a E(r_1,0) \times \exp\left[-\frac{ikAr_1^2}{2B}\right] J_0\left(\frac{krr_1}{B}\right) r_1 dr_1 \quad (28)$$

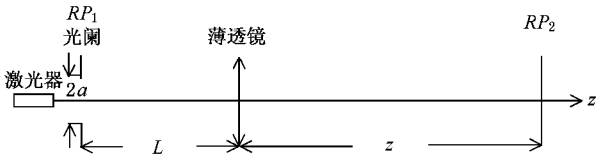


图 1 光学系统示意图

中(式中波数 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长),可求得任意 z 面上截断高斯光束的场分布. 再利用(23)–(26)式得到用 SCBW 法确定的截断高斯光束的 M_s^2 因子,计算例示于图 2,所用参数 $w_0 = 0.6, 0.8, 1.0\text{mm}$, $a/w_0 = 1$, $\lambda = 1.06\mu\text{m}$, $L = 400\text{mm}$, $F = 420\text{mm}$,计算截止的相对误差为 1%. 由图 2 知, M_s^2 因子随 F_s 的增加而增加. 与前面两种方法相比较,SCBW 法确定的 M_s^2 因子随入射光束束宽 w_0 不同有小的差异,例如,当 $F_s = 2.5$, $w_0 = 0.6, 0.8, 1.0\text{mm}$ 时, M_s^2 分别等于 1.171, 1.169, 1.174,这可能是由 SCBW 法迭代计算和截止误差引起,在 M^2 因子的测量误差范围内这种小的差别可忽略不计.

为了说明自收敛束宽因子 F_s 的物理含义,对 SCBW 法确定的积分范围 $(0, r_{\lim})$ 内所含激光功率含量百分比 η 做了计算, η 定义为

$$\eta = \frac{\int_0^{r_{\lim}} |E(r,z)|^2 r dr}{\int_0^\infty |E(r,z)|^2 r dr} = \frac{\int_0^{r_{\lim}} |E(r,z)|^2 r dr}{\int_0^a |E(r,0)|^2 r dr}. \quad (29)$$

图 3 给出截断高斯光束功率含量百分比 η 随距离 z 的变化. 图 3 表明,与 f 参数不同, η 随传输距离 z 有小的变化. 由此可知,虽然一般地 AA 法的 f 参数

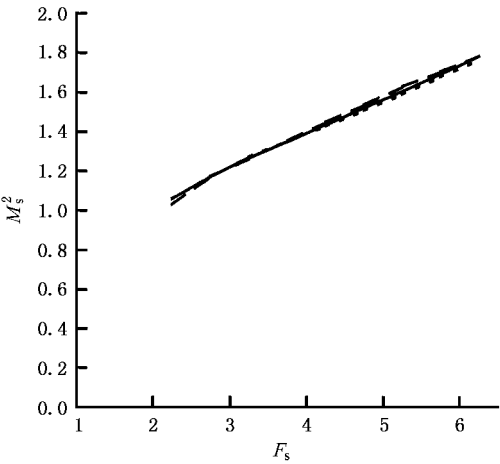


图2 截断高斯光束的 M_s^2 因子随自收敛束宽因子 F_s 的变化 $w_0 = 0.6\text{mm}$ (—), 0.8mm (·····), 1.0mm (---)

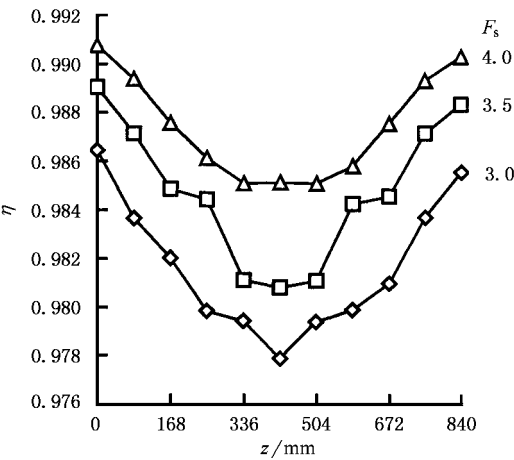


图3 截断高斯光束功率含量百分比 η 随距离 z 的变化 $w_0 = 0.6\text{mm}$, 其他参数同图2

和 SCBW 法的 F_s 或 η 无一一对应关系,但对已确定的 F_s ,可求出 f 的对应范围^[18],在这种意义上,可认为两种方法是等价的,其物理原因是这两种方法本质上都是基于用功率含量百分比确定的截断二阶矩法.

5. 小 结

本文将 AA 法、GTSM 法和 SCBW 法推广用于旋转对称截断光束,对由这三种方法确定的广义 M^2 因

子随光束和截断参数的变化做了详细的比较研究. 对 GTSM 法和 AA 法,得到了解析结果,说明用这两种方法所推导的广义 M^2 因子与光束形状和截断参数有关,但与束宽无关. 用 SCBW 法做数值计算,结果说明广义 M^2 因子与束宽有关,但变化不大,在 M^2 因子实验测量误差范围内可忽略. 文献中独立提出的三种方法物理本质都是用截断二阶矩来定义广义 M^2 因子,因此它们之间存在必然的物理联系,这可以通过三个参数 χ, f 和 F_s (或 η) 的对应关系来确定. 遗憾的是,研究表明, f 和 F_s 间无一一对应关系,只能在一定范围内加以确定,而 GTSM 法和 AA 法定义的空域中二阶矩有差别,由此造成了用三种方法确定的广义 M^2 因子不能完全相等. 作为示例,表2列出对截断高斯光束的相关结果,其中 $\bar{\eta}$ 是由图3求得平均功率含量百分比. 由表2可知,在使用平均值 $\bar{\eta}$ 意义上,用这三种方法对截断高斯光束可得到近似相同的广义 M^2 因子. 因此使用 χ, F_s, f 参数,能建立截断光束的 M_G^2, M_s^2 和 M_Q^2 因子间的某种对应关系,这对用不同方法计算出截断光束的广义 M^2 因子进行分析和比较有应用意义. 本文的研究解决了文献中用 AA 法和 SCBW 法计算广义 M^2 因子时的不确定问题. 产生这种不确定的物理原因是在广义 M^2 因子的计算中不能将进入光阑的全部功率计入,否则会引起发散困难,因此广义 M^2 因子与 f 或 F_s 取值有关. 在 GTSM 法中表观上 M_G^2 因子是惟一确定的,其原因是与功率含量百分比相关的 χ 参数已取定. 因此,在使用 AA 法或 SCBW 法时,一旦规定了 f 或 F_s 值, M_Q^2 和 M_s^2 因子也是确定的. 而本文建立的 χ, f 和 F_s (或 η) 间的联系有助于对不同截断光束一旦 χ 确定后,来确定 f 和 F_s (或 η) 的取值,由此 M_Q^2 和 M_s^2 因子便可唯一确定.

表2 用 SCBW 法、AA 法和 GTSM 法所得截断高斯光束的广义 M^2 因子					
F_s	$f = \bar{\eta}$	χ	M_s^2	M_Q^2	M_G^2
3	0.98172	0.14097	1.267	1.270	1.292
3.5	0.98481	0.15863	1.349	1.329	1.349
4	0.98748	0.18123	1.436	1.401	1.418

[1]

Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2

[2]

Siegman A E 1998 *OSA TOPS* **17** 184

[3]

Gao C and Weber H 2000 *Opt. Laser Technol.* **32** 221

[4]

Lü B D 1999 *Propagation and Control of High-Power Lasers* (Beijing :National Defense Industry Press) (in Chinese) [吕百达 1999 强激光的传输与控制 (北京 国防工业出版社)]

[5]

ISO/DIS 11146 Document 1999 Test methods for laser beam parameters : beam widths, divergence angle, and beam propagation factor

[6]

Parent A, Morin M and Lavigne P 1992 *Opt. Quantum Electron.* **24** 1071

[7]

Borghi R and Santarsiero M 1997 *Opt. Lett.* **22** 262

[8]

Lü B D, Zhang B and Luo S R 1999 *Appl. Opt.* **38** 4581

[9]

Wang X Q and Lü B D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 247 (in Chinese)

[10]

Luo S R, Lü B D and Zhang B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1446 (in Chinese) [罗时荣、吕百达、张彬 1999 物理学报 **48** 1446]

[11]

Zhang B, Ma H and Lü B D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1869 (in Chinese) [张彬、马虹、吕百达 1999 物理学报 **48** 1869]

[12]

Martinez-Herrero R and Mejias P M 1993 *Opt. Lett.* **18** 1699

[13]

Martinez-Herrero R, Mejias P M and Arias M 1995 *Opt. Lett.* **20** 124

[14]

Pare C and Belanger P A 1996 *Opt. Commun.* **123** 679

[15]

Amarande S, Giesen A and Hügel H 2000 *Appl. Opt.* **39** 3914

[16]

Luo S R and Lü B D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 82 (in Chinese) [罗时荣、吕百达 2004 物理学报 **53** 82]

[17]

Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am.* **60** 1168

[18]

Lü B D and Qing Y S 2001 *Opt. Commun.* **199** 25

Generalized M^2 factor of truncated beams^{*}

Luo Shi-Rong¹⁾ Lü Bai-Da¹⁾²⁾ Sun Nian-Chun³⁾

¹⁾ (Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

²⁾ (College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

³⁾ (Chengdu Dongjun Laser Company Ltd., Chengdu 611630, China)

(Received 20 October 2003 ; revised manuscript received 21 November 2003)

Abstract

The generalized M^2 factor of rotationally symmetric truncated beams is studied in detail by using the asymptotic analysis, generalized truncated second-order moments method and self-convergent beam width approach. The physical relation between the three methods and how to determine the generalized M^2 factor in a unified way are analyzed and illustrated with numerical results.

Keywords : generalized M^2 factor, asymptotic analysis, generalized truncated second-order moments method, self-convergent beam width approach

PACC : 4255, 4200

^{*} Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No.2003A823070), and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No.20020212021).