

# 椭圆孔光子晶体光纤的本地正交函数模型 \*

任国斌<sup>†</sup> 王 智 娄淑琴 简水生

(北京交通大学光波所 北京 100044)

(2003 年 3 月 12 日收到 2003 年 5 月 4 日收到修改稿)

提出了一种用于分析椭圆孔光子晶体光纤的正交函数模型,发展了一种新型超格子的构造方法,将光子晶体光纤的横向介电常数表示为两种周期性结构叠加,这两种周期性结构分别用余弦函数展开;同时将横向电场以 Hermite-Gaussian 函数展开,利用正交函数的性质,将全矢量波动方程转化为矩阵本征值问题,求得两偏振模式传输常数。利用此模型可以研究圆孔及椭圆孔光子晶体光纤的模式特性、色散特性、偏振特性等。

关键词:光子晶体光纤,超格子,正交函数,本征值问题

PACC:4280M, 4270Q, 4225B

## 1. 引 言

光子晶体光纤( photonic crystal fiber, PCF)由未掺杂的  $\text{SiO}_2$  和空气孔构成,其横截面是周期性排列的沿轴向均匀的圆空气孔,在芯子的位置,其周期性被破坏形成缺陷,光可以沿缺陷传播。这种新型的光波导通常可以分为两类<sup>[1]</sup>:折射率导模 PCF 的芯子由高折射率材料(如  $\text{SiO}_2$ )构成,外层是二维光子晶体包层结构。由于其导模机理为全反射,又将其称为 TIR-PCF( total internal reflection, PCF)<sup>[2]</sup>。另一类 PCF 的二维光子晶体包层具有光子带隙效应,可以将模场限制在芯子区域(其折射率可以低于包层的折射率)称为 PBG-PCF( photonic bandgap PCF)<sup>[3]</sup>。

自从 Birks 等<sup>[4]</sup>1995 年提出了二维全光子带隙的光子晶体光纤的设想以来,PCF 的发展非常迅速,目前,PCF 的损耗已经降到了  $0.58 \text{ dB/km}$ <sup>[5]</sup>,已接近实用化。与传统光纤比较,PCF 有许多独特的性质<sup>[6-8]</sup>无尽单模特性,特定结构的 PCF 可以在极宽的波长范围内支持单模运行。PCF 的无尽单模特性还与绝对尺寸无关,这表明可以根据需要来设计光纤模场面积,目前已有芯径为  $15 \mu\text{m}$  的大有效面积 PCF 的报道。另外 PCF 的非线性特性,可以应用于全光开关。由于 PCF 独特的色散特性,PCF 具有在色散管理方面的优势,如利用 PCF 的色散特性实现光孤

子传输和产生。应用 PCF 还可以得到模式双折射高达  $10^{-3}$  量级的保偏光纤。

对 PCF 的偏振特性的研究是我们感兴趣的问题之一。由于一般 TIR-PCF 具有六重旋转对称性,在理论上其基模是简并的<sup>[9]</sup>,因此要想实现高模式双折射就要破坏其对称性。方法有改变芯子区域的形状使其为椭圆,改变空气孔的对称性,改变空气孔的形状为椭圆孔等都可以实现高双折射<sup>[10-12]</sup>。

对光子晶体光纤的理论研究最初集中在对周期性结构的光子带隙的讨论上,随着第一根 PCF 的问世<sup>[2]</sup>,人们将注意力转向了折射率导模 PCF,即微结构光纤( micro-structured fiber )或多孔光纤( holey fiber )。光子晶体光纤的理论研究目前还没有成熟的理论模型。Birks 等<sup>[6]</sup>最早提出了等效折射率模型,此方法的优点是概念清楚,计算简单,能得到 PCF 的单模特性,粗略的色散特性等,缺点是由于采用了标量近似,在空气孔较大时,其结果不够准确。另外还有平面波方法<sup>[13]</sup>,这种方法是研究光子晶体的基本方法之一,可以应用于带隙导模的 PCF,但其计算效率较低,对计算条件要求较高。Monro 和 Mogilevtsev 等<sup>[14,15]</sup>提出的本地正交函数方法,由于此方法合理地应用了模场在缺陷位置处的局域性,其计算效率得到很大提高,但其中心缺陷是用 Hermite-Gaussian 函数展开,我们研究发现在空气孔较大时,会出现折射率不匹配及展开式项数的选择<sup>[16]</sup>问题,计算

\* 北京交通大学论文基金(批准号: NJTUPD210)资助的课题。

† E-mail: guobin-ren@yahoo.com.cn

精度和速度受到很大的限制。

对椭圆孔 PCF 的研究,据我们所知目前只有平面波法<sup>[12]</sup>,但其计算效率较低,需要大量的计算时间。我们提出了一种基于正交函数法的全矢量模型。采用一种新型的超格子构造方法将光子晶体光纤的横向折射率用余弦函数展开,同时将横向电场用 Hermite-Gaussian 函数展开。从电磁场的波动方程出发得到关于传播常数的本征方程,进而得到 PCF 的传播常数,模场分布,偏振特性等传输特性。作为椭圆的特例,此方法同样可以分析圆空气孔 PCF。仿真结果表明,这是一种高效的用于分析光子晶体光纤的模型。

## 2. 椭圆孔 PCF 的全矢量模型

假设折射率导模 PCF(图 1)沿纵向(传播方向)均匀,其模式电场可以写成

$$E_j(x, y, z) = [e_x(x, y) + e_y(x, y)]e^{j\beta_j z}e^{-\alpha z} \quad (1)$$

其中  $\beta_j$  为  $j$  阶模式的传播常数,  $\alpha$  为 PCF 的衰减系数,  $e_x(x, y) = e_x \hat{x} + e_y \hat{y}$ ,  $e_z(x, y)$  分别是电场的横向分量与纵向分量。本文不考虑光纤衰减,即  $\alpha = 0$ 。将模式电场的表达式(1)代入矢量波动方程,可得到横向模式电场  $e_x(x, y)$ ,  $e_y(x, y)$  的耦合波动方程<sup>[17]</sup>,若不考虑两偏振模的耦合过程,将得到(简化起见,略去模式阶数  $j$ )

$$(\nabla_x^2 - \beta_x^2 + k^2 n^2) e_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( e_x \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \right),$$

$$(\nabla_y^2 - \beta_y^2 + k^2 n^2) e_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( e_y \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right), \quad (2)$$

其中  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  是分别沿  $x$ ,  $y$  方向的两个偏振模式的传输常数,  $n^2 = n^2(x, y)$  是横向折射率分布,  $k = 2\pi/\lambda$ , 是真空波数,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 。如果忽略右侧两项即成为标量波动方程,并且有  $\beta_x = \beta_y$ 。为了解方程(2),可以将电场和横向折射率分布用正交函数展开。下面讨论电场和横向折射率的展开。

### 2.1. 电场的展开

由基模的对称性,选取 Hermite-Gaussian 函数将模式场展开,即

$$e_x(x, y) = \sum_{a,b=0}^{F-1} \epsilon_{ab}^x \psi_a(x) \psi_b(y), \quad (3)$$

$$e_y(x, y) = \sum_{a,b=0}^{F-1} \epsilon_{ab}^y \psi_a(x) \psi_b(y),$$

其中  $F$  为展开式的项数,  $\psi_i(s) \quad (i = a, b, s = x, y)$

是正交归一化 Hermite-Gaussian 函数,定义为

$$\psi_i(s) = \frac{2^{-i} \pi^{-1/4}}{\sqrt{(2i)!}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\omega^2}\right) H_{2i}(s/\omega), \quad (4)$$

其中  $H_{2i}(s/\omega)$  是  $2i$  阶 Hermite 函数,  $\omega$  可以称为特征宽度。

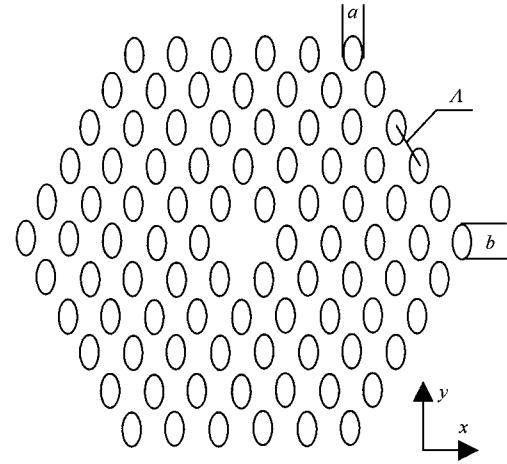


图 1 椭圆孔 PCF 的横截面

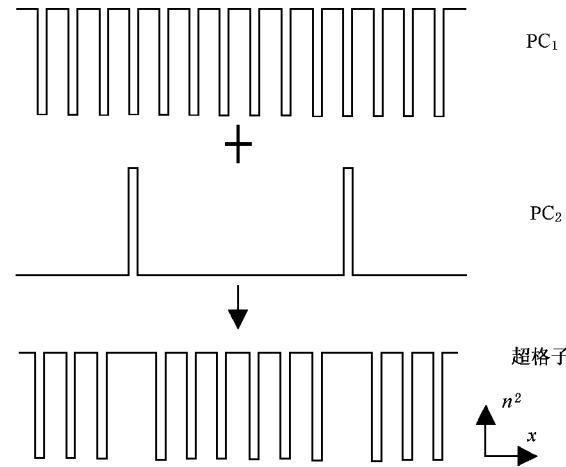


图 2 二维光子晶体的超格子的构造

### 2.2. 横向折射率的展开

对于椭圆孔三角排列的 PCF,定义表征其结构的参量:孔中心距  $\Lambda$ ,空气孔长轴  $b$ ,短轴  $a$ ,或椭圆率  $\eta = b/a$ ;孔径孔距比  $f = b/\Lambda$ ,如图 1 所示。PCF 可以看作是存在缺陷的二维光子晶体,其横向折射率分布可以分为两部分,包层由空气孔和石英组成的光子晶体结构组成,芯子由中心缺陷构成。我们提出了一种新的构造光子晶体超格子的方法,如图 2 所示,将含有缺陷的光子晶体结构视为两种周期性

结构( PC1,PC2 )的叠加, PC1,PC2 的排列方式与 PCF 的包层相同, 在这里都是三角排列, 区别在于 PC2 的周期是 PC1 周期的整数倍. PC1,PC2 的叠加互补就构成了二维光子晶体的超格子.

对二维周期性结构作 Fourier 变换

$$F(G) = \frac{1}{A} \iint_A f(R) e^{-iG \cdot R} dS, \quad (5)$$

其中  $A$  为元胞面积, 函数  $f(R)$  表示元胞介电常数分布,  $G$  为倒格子空间的矢量. 由周期性结构的 Fourier 变换理论<sup>[18]</sup> 具有反演对称性的周期性结构的 Fourier 变换经推导可以得到解析形式. 用上述方法将 PCF 的横向折射率  $n^2$  和  $\ln n^2$  表示为

$$\begin{aligned} n^2(x, y) &= \sum_{a,b=0}^{P-1} P_{ab} \cos \frac{2\pi ax}{l_x} \cos \frac{2\pi by}{l_y} \\ &\quad + \sum_{a,b=0}^{D-1} D_{ab} \cos \frac{2\pi ax}{ml_x} \cos \frac{2\pi by}{ml_y}, \\ \ln n^2(x, y) &= \sum_{a,b=0}^{P-1} P_{ab}^{\ln} \cos \frac{2\pi ax}{l_x} \cos \frac{2\pi by}{l_y} \\ &\quad + \sum_{a,b=0}^{D-1} D_{ab}^{\ln} \cos \frac{2\pi ax}{ml_x} \cos \frac{2\pi by}{ml_y}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $P_{ab}, D_{ab}, P_{ab}^{\ln}, D_{ab}^{\ln}$  分别为两种周期性结构 PC1 和 PC2 的展开式系数, 可以由(5)式中的  $F(G)$  得到,  $P, D$  为展开式项数,  $l_x, l_y$  分别是周期性折射率分布在  $x, y$  两个方向上的周期长度.  $m$  为 PC2 与 PC1 的周期的比值, 也就是超格子的归一化尺寸.

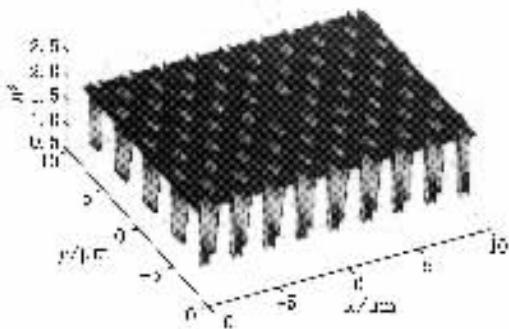


图3 TIR-PCF 的横向折射率的分布图 结构参数:  $\Lambda = 2.3\mu\text{m}$ ,  $d/\Lambda = 0.8$ ,  $\eta = 3$ ,  $m = 10$

图3 为应用这种新型光子晶体超格子构造方法仿真得到的介电常数  $n^2$  分布的结果, 受计算量的限制, 只给出一个元胞的仿真结果. PCF 的结构参数选为:  $\Lambda = 2.3\mu\text{m}$ ,  $d/\Lambda = 0.8$ ,  $\eta = 3$ . 超格子的归一化大小  $m = 10$ . 展开式项数选取为:  $P = 30$ ,  $D = 300$ . 进一

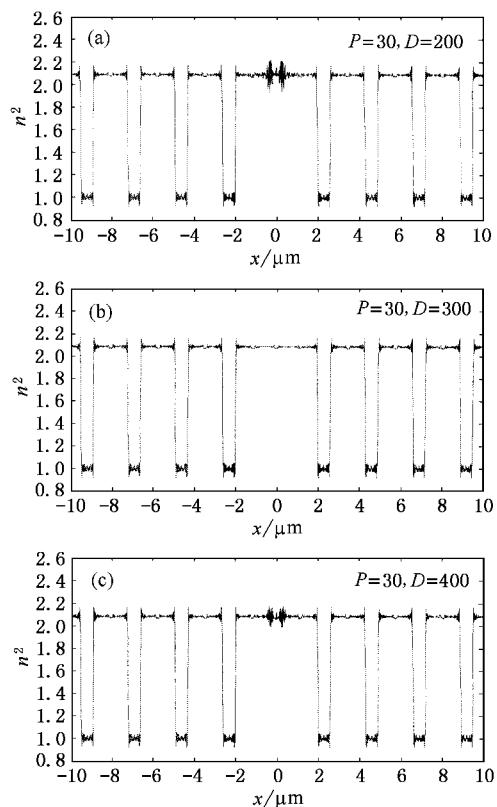


图4 椭圆孔 PCF 的折射率剖面图 结构参数:  $\Lambda = 2.3\mu\text{m}$ ,  $d/\Lambda = 0.8$ ,  $\eta = 3$ ,  $m = 10$ .

步的分析发现, 要得到较精确的折射率分布, 展开式的项数  $P, D$  存在匹配问题. 图4是结构参数、超格子大小与图3相同时, 取不同展开式项数得到的介电常数  $n^2$  沿  $x$  方向( $y = 0$ )的剖面图. 由图4, 我们认为当  $D/P = m$  时可以得到较精确的折射率分布. 这一点可以从 Fourier 变换理论得到解释.

### 2.3. 模式的特征值方程

考虑基模的两个偏振模式  $e_x, e_y$  所满足的矢量波动方程(2), 将(3)式带入(2)式, 可得两个偏振模的特征方程

$$\begin{aligned} e_x : \sum_{c,d=0}^F \epsilon_{cd}^x [ I_{abcd}^{(1)} + k^2 I_{abcd}^{(2)} + I_{abcd}^{(3)x} ] &= \beta_x^2 \epsilon_{ab}^x, \\ e_y : \sum_{c,d=0}^F \epsilon_{cd}^y [ I_{abcd}^{(1)} + k^2 I_{abcd}^{(2)} + I_{abcd}^{(3)y} ] &= \beta_y^2 \epsilon_{ab}^x, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} I_{abcd}^{(1)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \nabla_t^2 [\psi_c(x) \psi_d(y)] dx dy, \\ I_{abcd}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 \psi_a(x) \psi_b(y) \psi_c(x) \psi_d(y) dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{abcd}^{(3)x} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \\
 &\times \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi_c(x) \psi_d(y) \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \right] dx dy, \\
 I_{abcd}^{(3)y} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \\
 &\times \frac{\partial}{\partial y} \left[ \psi_c(x) \psi_d(y) \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right] dx dy.
 \end{aligned} \quad (8)$$

将折射率的展开式(6)代入(8)式,并利用 Hermite-Gaussian 函数的递推关系和积分公式<sup>[19]</sup>(8)式可以写成解析形式。这是提高计算速度的关键因素之一,也是正交函数法的主要优点。(8)式的解析形式为

$$\begin{aligned}
 I_{abcd}^{(1)} &= -\frac{2a+2b+1}{\omega^2} \delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{\sqrt{2b(2b+1)}}{2\omega^2} \delta_{ac} \delta_{b-1,d} \\
 &+ \frac{\sqrt{2a(2a+1)}}{2\omega^2} \delta_{a-1,c} \delta_{bd} + \frac{\sqrt{(2b+1)(2b+1)}}{2\omega^2} \\
 &\times \delta_{ac} \delta_{b,d-1} + \frac{\sqrt{(a+1)(2a+1)}}{2\omega^2} \delta_{a,c-1} \delta_{bd} \quad (9a)
 \end{aligned}$$

$$I_{abcd}^{(2)} = \sum_{f,g=0}^P P_{fg} I_{fac}^{(21)x} I_{gbd}^{(21)y} + \sum_{f,g=0}^C D_{fg} I_{fac}^{(22)x} I_{gbd}^{(22)y}, \quad (9b)$$

$$I_{abcd}^{(3)x} = \sum_{f,g=0}^C P_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(31)x} I_{gbd}^{(31)y} + \sum_{f,g=0}^P D_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(32)x} I_{gbd}^{(32)y}, \quad (9c)$$

$$I_{abcd}^{(3)y} = \sum_{f,g=0}^C P_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(21)y} I_{gbd}^{(31)x} + \sum_{f,g=0}^P D_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(22)y} I_{gbd}^{(32)x}, \quad (9d)$$

其中

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(21)s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi i_1 s/l_s) \psi_{i_2}(s) \psi_{i_3}(s) ds, \quad (10a)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(22)s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi i_1 s/ml_s) \psi_{i_2}(s) \psi_{i_3}(s) ds, \quad (10b)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(31)s} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \cos(2\pi i_1 s/l_s)}{\partial s} \frac{\partial \psi_{i_2}(s)}{\partial s} \psi_{i_3}(s) ds, \quad (10c)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(32)s} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \cos(2\pi i_1 s/ml_s)}{\partial s} \frac{\partial \psi_{i_2}(s)}{\partial s} \psi_{i_3}(s) ds. \quad (10d)$$

由(7)式,将两个偏振模的特征方程简写为

$$M^s \hat{V}^s = \beta^s \hat{V}^s, \quad (11)$$

$$M^s = I^{(1)} + k^2 I^{(2)} + I^{(3)s}, \quad s = x, y,$$

其中  $M^s$  是一个四维向量。将  $M^s$  转化为二维矩阵,(11)式就成为矩阵的本征值问题。矩阵  $M^s$  的特征值有  $F^2$  个,大部分没有物理意义,可以根据 PCF

中模式的传输常数  $\beta : n_{\text{eff}} < \beta/k < n_{\text{SiO}_2}$  来确定 PCF 中模式的传输常数  $\beta$ ,其中  $n_{\text{SiO}_2}$  是工作波长时纯石英折射率,  $n_{\text{eff}}$  是光子晶体包层等效折射率<sup>[6]</sup>。利用与传输常数对应的特征向量即可根据电场展开式(3)得到模式电场分布。

应用叠加法构造超格子可以精确地表示 PCF 横向折射率的分布,另外特征方程(7)中的矩阵元都可以得到全解析的表示式。这是提高计算效率与精度的关键。与平面波法比较,由于此模型充分利用了模式场的局域性,计算效率得到很大的提高,例如文献[20]中计算椭圆孔 PCF 中的磁场时用了  $2^{16}$  个平面波基矢,而此模型只需要较少数量的基矢( $F$ )就可较为准确地分析 PCF 的传输特性。

### 3. 数值分析结果

我们采用上述方法,对椭圆孔 PCF 进行了数值研究。选择结构参量:  $\Lambda = 2.3\mu\text{m}$ ,  $d/\Lambda = 0.8$ ,  $\eta = 3$ 。计算时参数选择为  $P = 30$ ,  $D = 300$ ,  $F = 10$ 。图 5 是工作波长为 1550nm 时,采用全矢量方法得到的基模的两个偏振模式的模场强度分布等高线,等高线间距为 2dB,背景为 PCF 的横向折射率分布。图中周期性空气孔对电场起到了很强的限制作用,从等高线图上看到,横向场绕过空气孔位置,在空气孔之间的石英区域向外扩展,场形反映出了最内层空气孔的椭圆形状。 $x, y$  方向偏振模式的模式折射率分别为  $n_x = 1.417697$ ,  $n_y = 1.418626$ 。模式双折射为  $\Delta n = 9.29 \times 10^{-4}$ 。这个数值约为普通保偏光纤的 2 倍,因此椭圆孔 PCF 可以应用于保偏光纤。图 6 给出模式双折射  $\Delta n$  与波长的关系,双折射随波长增加而增大,在波长大于  $1.6\mu\text{m}$  时,双折射可以达到  $10^{-3}$  量级,这是传统的保偏光纤(如椭圆芯光纤)所无法做到的。

从传输常数  $\beta$  可以得到 PCF 的色散曲线,图 7 是椭圆孔 PCF 的两个偏振模式的色散曲线,由于 PCF 的圆对称性受到破坏,这两个模式的色散曲线出现了分离。 $x$  偏振模式的色散较  $y$  偏振模式的色散要高,两个模式的色散零点小于  $1\mu\text{m}$ 。进一步分析表明,通过改变椭圆孔 PCF 的结构参量,可以实现短波长的异常色散及超宽带色散平坦。这对于色散补偿,光孤子传输和产生,超宽带白光产生等有重要意义。

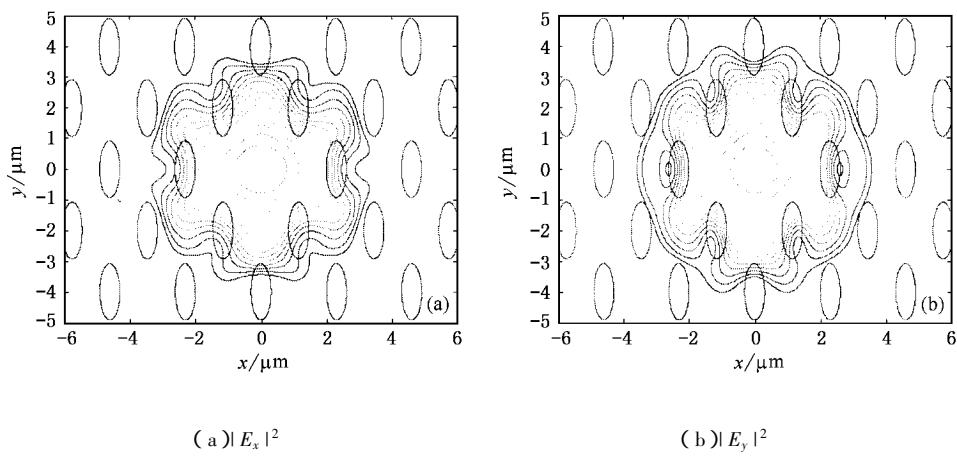


图5 椭圆孔 PCF 基模的两个偏振模式的模场分布等高线(等高线间距为 2dB)

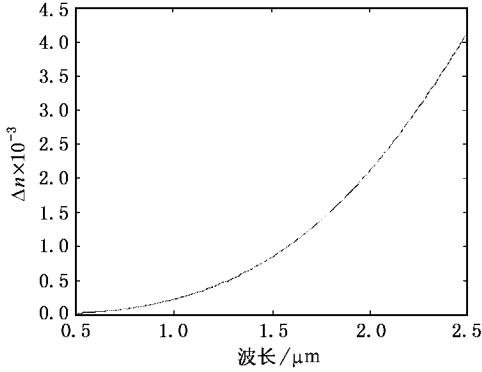
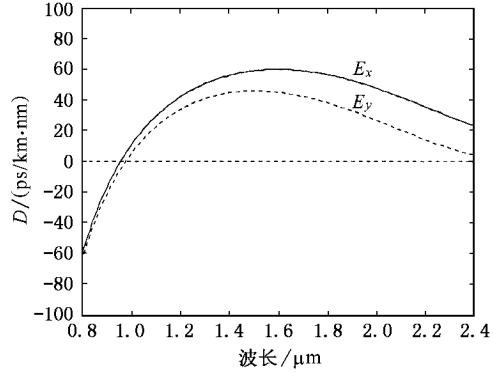
图6 模式双折射  $\Delta n$ 

图7 两个偏振模式的色散曲线

## 4. 结 论

本文提出了用于分析椭圆孔光子晶体光纤的本地正交函数模型. 应用新型超格子的构造方法, 将光子晶体光纤的横向介电常数表示为两种周期性结构叠加, 这两种周期性结构分别用余弦函数展开, 同时将横向电场以 Hermite-Gaussian 函数展开. 利用正交

函数的性质, 将全矢量波动方程转化为矩阵本征值问题, 求得两偏振模式传输常数. 对折射率分布的仿真结果显示, 采用这种超格子的构造方法可以使我们对 PCF 横向折射率的刻划达到较高的精度. 利用此模型可以研究圆孔及椭圆孔光子晶体光纤的模式特性、色散特性、偏振特性等. 作为应用的例子, 本文最后给出了椭圆孔 PCF 的两个偏振模式的模场分布、双折射特性及色散特性.

- [1] Night J C and St P 2002 *Russell Science* **296** 276
- [2] Night J C, Birk T A *et al* 1996 *Opt. Lett.* **21** 1547
- [3] Night J C, Broeng J *et al* 1998 *Science* **282** 1476
- [4] Birk T A, Robert P J *et al* 1995 *Electron Lett.* **31** 1941
- [5] Farr L, Night J C *et al* 2002 *ECOC PD* **1** 3
- [6] Birk T A, Night J C *et al* 1997 *Opt. Lett.* **22** 961
- [7] Nielsen M D, Petersson A *et al* 2002 *ECOC 3.4.2*
- [8] Wadsworth W J, Night J C *et al* 2000 *Electron Lett.* **36** 53

- [9] Steel M J, White T P *et al* 2001 *Opt. Lett.* **26** 488
- [10] Guy, Millot, Alexandre, Sauter *et al* 2002 *Opt. Lett.* **27** 695
- [11] Suzuki K, Kubota H *et al* 2001 *Electron Lett.* **37** 1399
- [12] Steel M J, Osgood M J Jr 2001 *Opt. Lett.* **26** 229
- [13] Barkou S E, Broeng J, Bjarklev A 1998 OFC98, FG5, 117
- [14] Monro T M, Richardson D J 1999 *J. Lightwave Technol.* **17** 1093
- [15] Mogilevtsev D, Birks T A, St. Russell P 1999 *J. Lightwave Technol.* **17** 2078

- [ 16 ] Monro T M , Richardson D J 2000 *J. Lightwave Technol.* **17** 50
- [ 17 ] Snyder A W 1983 *Optical waveguide theory* ( New York : Chapman and Hall )
- [ 18 ] Shangping Guo , Sacharia Albin 2003 *Opt. Exp* **11** 167
- [ 19 ] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1994 *Tables of integrals , series and products* ( New York : Academic )
- [ 20 ] Steel M J ,Osgood R M 2001 *J. Lightwave Technol.* **19** 495

## Localized orthogonal function model of elliptical-hole photonic crystal fibers<sup>\*</sup>

Ren Guo-Bin Wang Zhi Lou Shu-Qin Jian Shui-Sheng

( Institute of Lightwave Technology , Beijing Jiaotong University , Beijing 100044 ,China )

( Received 12 March 2003 ; revised manuscript received 4 May 2003 )

### Abstract

A novel model for light propagation in elliptical-hole photonic crystal fibers ( PCFs ) is developed in terms of orthogonal function model. A new method for constructing supercell lattice is proposed ; with this method the transverse index profile is decomposed into two periodic structures , and the mode field is decomposed using Hermite-Gaussian functions. The propagation constant and the mode field distribution of the PCF can be calculated by recasting the Maxwell equations into on eigenvalue system. With this model , the mode properties including dispersion properties , polarization properties and mode area can be analyzed for circular or elliptical hole PCF.

**Keywords** : photonic crystal fiber , supercell , orthogonal functions , eigenvalues

**PACC** : 4280M , 4270Q , 4225B

<sup>\*</sup> Project supported by the Foundation of Beijing Jiaotong University , China( Grant No. NJTUPD210 ).