

窄带随机噪声作用下 Duffing 振子的双峰稳态概率密度^{*}

戎海武^{1,2)} 王向东¹⁾ 徐 伟³⁾ 孟 光²⁾ 方 同³⁾

¹⁾(佛山大学数学系, 佛山 528000)

²⁾(上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

³⁾(西北工业大学数学系, 西安 710072)

(2002 年 12 月 26 日收到, 2004 年 10 月 21 日收到修改稿)

研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声激励下的系统响应的双峰稳态概率密度问题. 用多尺度法分离了系统的快变项, 得到了系统慢变项满足的随机微分方程. 用线性化方法求出了双峰稳态概率密度的表达式. 数值模拟表明本文提出的方法是有效的.

关键词: Duffing 振子, 双峰稳态概率密度, 多尺度法, 线性化方法

PACC: 0500, 0547

1. 引 言

众所周知, Duffing 振子在确定性谐和激励下, 在一定的参数范围内, 系统可有三个稳态响应, 其中大的和小的是稳定的, 而中间的是不稳定的. 在窄带随机噪声作用下, Duffing 振子也有类似的现象, 即在一定的参数范围内, 系统响应的稳态概率密度是双峰的. 这种现象已经引起了人们的注意, 朱位秋等^[1]用数值模拟的方法研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声作用下系统响应的双峰稳态概率密度、跳跃和分叉现象; 黄志龙等^[2]用随机平均法和路径积分法研究了 Duffing 振子在确定性谐和与小强度随机噪声联合作用下(确定性谐和与小强度随机噪声联合作用模型也可看作为窄带随机噪声作用模型) 系统响应的双峰稳态概率密度现象, 但没有给出双峰稳态概率密度的解析表达式; Wagner^[3]应用摄动法求出了 Duffing 振子在确定性谐和与小强度随机噪声联合作用下系统响应的双峰稳态概率密度的近似表达式. 本文则用多尺度法和线性化方法研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声作用下系统的响应问题, 在一定的参数范围内, 系统的响应有两种可能的运动状态, 即系统响应的稳态概率密度是双峰的, 本文求出

了系统响应的双峰稳态概率密度的近似表达式. 数值模拟表明本文提出的方法是有效的.

2. 多尺度法

考虑如下受随机噪声激励的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega^2 u + \varepsilon\alpha u^3 = \varepsilon\xi(t), \quad (1)$$

式中 $\varepsilon \ll 1$ 为小参数, β, ω, α 都是常数, $\xi(t)$ 是随机噪声项, 本文采用由 Wedig^[4]提出的模型

$$\xi(t) = h \cos(\Omega t + \bar{\gamma}W(t)), \quad (2)$$

式中 $h > 0$ 为随机激励的强度, Ω 为为中心频率, $W(t)$ 是标准 Wiener 过程, $\bar{\gamma} \geq 0$ 为随机扰动的强度. 由 Wedig^[4]可知当 $\bar{\gamma}$ 充分小时, $\xi(t)$ 是窄带随机噪声. 本文主要用多尺度法^[5]研究这种情形. 多尺度法已广泛应用于确定系统的研究中, 近些年来在随机系统中也有一些应用. 在随机外激的情形, Rajan 和 Davies^[6], Nayfeh 和 Serhan^[7]用多尺度法研究了单自由度非线性系统受随机外激时的响应; 本文作者^[8,9]则将多尺度法推广到非线性系统的随机参激情形和二自由度非线性随机系统中. 设系统(1)具有如下形式的解

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (3)$$
$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t.$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号 10072049)、广东省自然科学基金(批准号 04011640)资助的项目.

[†] E-mail: ronghw@foshan.net

本文只对首次近似解 $u_0(T_0, T_1)$ 进行讨论. 记 $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots.\end{aligned}\quad (4)$$

将方程(3)(4)代入方程(1)中, 并比较方程两边 ε 同次幂的系数, 可得下列微分方程组:

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2D_0 D_1 u_0 - 2\beta D_0 u_0 \\ &\quad - \alpha u_0^3 + h \cos(\Omega t + \bar{\gamma} W(t))\end{aligned}\quad (6)$$

方程(5)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega T_0) + \text{c.c.}, \quad (7)$$

式中 c.c. 表示前述各项的共轭, $A(T_1)$ 是响应的振幅. 将(2)(7)两式代入(6)式可得

$$\begin{aligned}D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 &= -2i\omega_0 A' \exp(i\omega T_0) - 2i\omega \beta A \exp(i\omega T_0) \\ &\quad - \alpha A^3 \exp(3i\omega T_0) - 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\omega T_0) \\ &\quad + \frac{h}{2} \exp[i(\Omega T_0 + \bar{\gamma} W(T_1))] + \text{c.c.},\end{aligned}\quad (8)$$

式中 A', \bar{A} 分别表示 A 关于 T_1 的导数及共轭, $\gamma = \bar{\gamma}/\sqrt{\varepsilon}$. 由于对于标准 Wiener 过程 $W(t)$, 有 $EW(t) = 0, EW^2(t) = t$ 故有

$$\bar{\gamma} W(t) = (\bar{\gamma}/\sqrt{\varepsilon}) W(\varepsilon t) = \gamma W(T_1).$$

本文主要研究系统(1)的主共振响应即 $\Omega \approx \omega$ 时的情形. 引入调谐参数 $\sigma, \Omega = \omega + \varepsilon\sigma$. 令(8)式右端中的奇异项为零可得

$$\begin{aligned}2i\omega A' + 2i\beta\omega A + 3\alpha A^2 \bar{A} \\ - \frac{h}{2} \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

将 A 表示成极坐标的形式

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)]. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式并分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} a' = -\beta a - \frac{a}{2\omega} h \sin \eta, \\ a\eta' = -\sigma a + \frac{3}{8} \alpha \omega a^3 - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - a\gamma W(T_1), \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\eta = \varphi - \sigma T_1 - \gamma W(T_1)$. 由(11)式解出 a 和 η 后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = a(\varepsilon t) \cos(\Omega t + \varphi(\varepsilon t)) + \gamma W(\varepsilon t) + O(\varepsilon).$$

3. 线性化方法

本文中我们只讨论当 γ 较小 $\xi(t)$ 是窄带随机噪声时的情形. 首先讨论当 $\gamma = 0$ 即受确定性谐和激励时 Duffing 系统的稳态响应. 当 $\gamma = 0$ 时, 方程(11)变为

$$\begin{cases} a' = -\beta a - \frac{a}{2\omega} h \sin \eta, \\ a\eta' = -\sigma a + \frac{3}{8} \alpha \omega a^3 - \frac{h}{2\omega} \cos \eta. \end{cases} \quad (12)$$

对于稳态解满足 $a' = 0, \eta' = 0$, 于是方程(12)变为

$$\begin{cases} \beta a = -\frac{a}{2\omega} h \sin \eta, \\ -\sigma a + \frac{3}{8} \alpha \omega a^3 = \frac{h}{2\omega} \cos \eta. \end{cases} \quad (13)$$

由(13)式可得系统(1)的频率响应方程为

$$\left[\beta^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha}{8\omega} a^2 \right)^2 \right] = \frac{h^2}{4\omega^2}. \quad (14)$$

由(14)式可知在一定的参数范围内, 系统可有三个解. 通过稳定性分析可知其中中间的解是不稳定的, 只有大解和小解是稳定的, 物理上实现那个解取决于系统的初始值.

在以后的数值模拟中, 我们取定系统的参数为

$$\alpha = 1, \beta = 0.3, \omega = 1, \varepsilon = 0.05, h = 2.$$

此时系统的频率响应曲线见图 1.

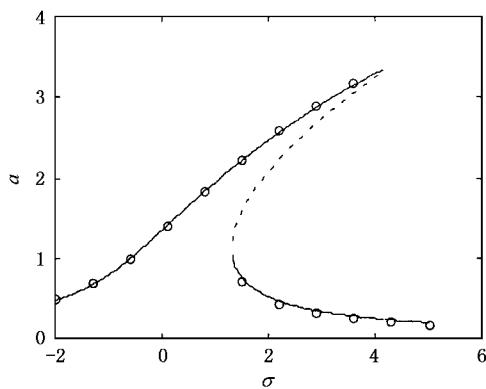


图 1 系统(1)响应曲线: $\gamma = 0$ —— 稳定解, - - - 不稳定解, $\circ \circ \circ$ 数值解

下面讨论当 $\gamma \neq 0$ 为小参数时, 随机扰动对系统稳态响应的影响. 由于 γ 较小, 可用线性化方法求解, 令

$$a = a_0 + a_1, \eta = \eta_0 + \eta_1,$$

式中 a_0, η_0 为由(13)(14)式确定的受确定性谐和

激励时系统的稳态响应的幅值和相位角 a_1, η_1 为小扰动项, 将此式代入(11)式并忽略高阶项可得线性化方程

$$\begin{cases} a'_1 = -\beta a_1 + \left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \eta_1, \\ \eta'_1 = \left(-\frac{\sigma}{a_0} + \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) a_1 - \beta \eta_1 - \gamma W'. \end{cases} \quad (15)$$

方程(15)可写为如下的 Ito 方程形式

$$\begin{cases} da_1 = \left[-\beta a_1 + \left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \eta_1 \right] dT_1, \\ d\eta_1 = \left[\left(-\frac{\sigma}{a_0} + \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) a_1 - \beta \eta_1 \right] dT_1 - \gamma dW(T_1). \end{cases} \quad (16)$$

由方程(16)可知 (a_1, η_1) 的稳态概率密度为联合正态分布, 只需求出 a_1, η_1 的一、二阶矩, 求可确定它们的分布. 可以用矩方法^[10]从方程(16)求出一、二阶矩. 对于稳态响应有 $\frac{dEa_1}{dT_1} = \frac{dE\eta_1}{dT_1} = 0$, 方程(16)两边取数学期望可得一阶稳态矩为

$$Ea_1 = E\eta_1 = 0. \quad (17)$$

同样由 $\frac{dEa_1^2}{dT_1} = \frac{dEa_1 \eta_1}{dT_1} = \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} = 0$ 可得

$$\begin{cases} -2\beta E a_1^2 + \left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) E a_1 \eta_1 = 0, \\ -\left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) E a_1^2 - 2\beta E a_1 \eta_1 + \left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) E \eta_1^2 = 0, \\ \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) E a_1 \eta_1 + 2\beta E \eta_1^2 = \gamma^2. \end{cases} \quad (18)$$

由(18)式可解得

$$\begin{cases} E a_1^2 = \frac{\left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right)^2}{\left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) + 2\beta^2} \frac{\gamma^2}{4\beta}, \\ E a_1 \eta_1 = \frac{\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3}{\left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) + 2\beta^2} \frac{\gamma^2}{2}, \\ E \eta_1^2 = \frac{\left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) + 4\beta^2}{\left(\sigma a_0 - \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 \right) \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right) + 2\beta^2} \frac{\gamma^2}{4\beta}. \end{cases} \quad (19)$$

从(17)(19)式可得系统响应幅值 a 的一、二阶矩分别为

$$\begin{aligned} Ea &= a_0 + E a_1 = a_0, \\ E a^2 &= E(a_0 + a_1)^2 = a_0^2 + E a_1^2. \end{aligned} \quad (20)$$

而 a 的近似稳态概率密度为正态分布 $N(a_0, E a_1^2)$.

4. 双峰稳态概率密度

当由(14)式确定的 a_0 只有一个解时, 对应的 a 的稳态概率密度为单峰的. 而当由(14)式确定的 a_0 有二个稳定的稳态解时, 对应的 a 的稳态概率密度为双峰的. 此时系统有两种可能的运动状态, 两种运动状态对应的稳态概率密度分别为正态分布 $N(a_l, E a_1^2)$ 和 $N(a_s, E a_1^2)$, 其中 a_l 和 a_s 分别表示由(14)式确定的大解和小解, 分别记正态分布 $N(a_l, E a_1^2)$ 和 $N(a_s, E a_1^2)$ 的概率密度函数为 $p_l(a)$ 和 $p_s(a)$. 下面我们讨论怎样由 $p_l(a)$ 和 $p_s(a)$ 构造出数值模拟中观测到的双峰稳态概率密度函数 $p(a)$. 一个自然的想法就是设

$$p(a) = c_l p_l(a) + c_s p_s(a), \quad c_l + c_s = 1, \quad (21)$$

式中 c_l 和 c_s 为常数, 分别表示实现大的运动状态和小的运动状态的可能性. 对于 c_l 和 c_s 的求法, Wagner^[3]给出了一种算法, 即令 c_l 和 c_s 分别为当 $\gamma = 0$ 受确定性谐和激励时系统实现大的稳态解和小的稳态解的概率, 可用数值方法计算出. 例如, 当 $\sigma = 1.5$ 时, 大解和小解的吸引域见图 2, 图中阴影部分表示大解的吸引域, 白色部分表示小解的吸引域, 可得 $c_l = 0.747$, 即黑色部分的面积占总面积的 74.7%.

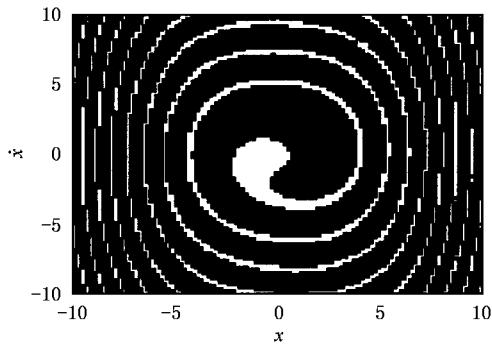
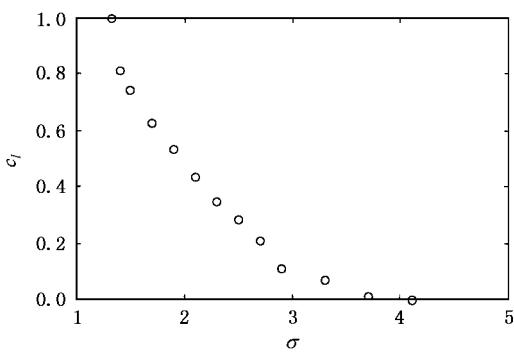
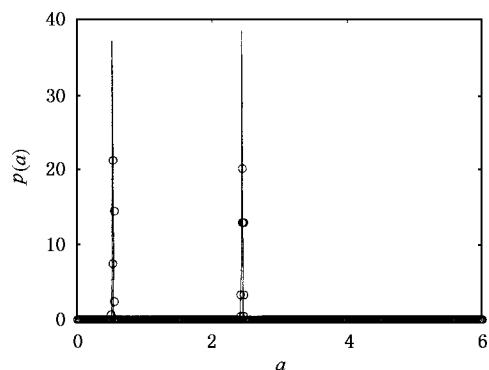
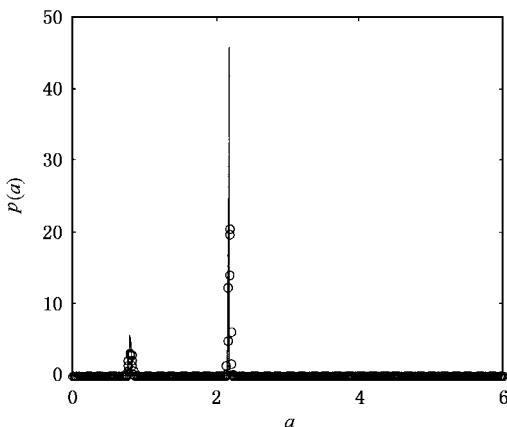
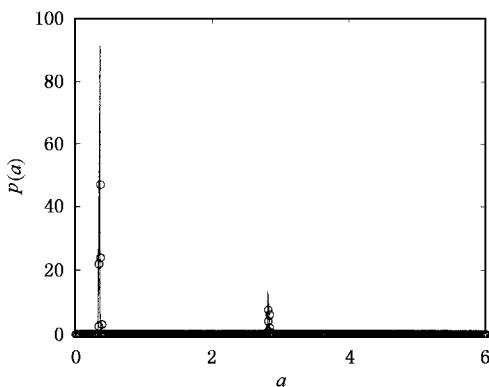


图 2 大解和小解的吸引域 $\sigma = 1.5, c_l = 0.747$

c_l 随 σ 的变化情况见图 3, 从图 3 中可见, 当 $\sigma < 1.32$ 时, $c_l = 1$; 当 $\sigma > 4.16$ 时, $c_l = 0$; 而在双稳态解区域 $1.32 < \sigma < 4.16$ 中, c_l 随 σ 增大而减小.

当 $\sigma = 1.4, 1.9, 2.7$ 时, 相应的由(21)式给出的双峰稳态概率密度与数值模拟结果的比较见图 4—6.

图 3 c_l 随 σ 的变化情况5 概率密度函数($\sigma = 1.9, c_l = 0.536$).——理论解, $\circ \circ \circ$ 数值解4 概率密度函数($\sigma = 1.4, c_l = 0.814$).——理论解, $\circ \circ \circ$ 数值解6 概率密度函数($\sigma = 2.7, c_l = 0.211$).——理论解, $\circ \circ \circ$ 数值解

5. 结 论

在一定的参数范围内, Duffing 振子在窄带随机激励下有两种可能的运动状态, 系统响应的稳态概

率密度时双峰的. 用多尺度法分离了系统的快变项, 得到了系统慢变项满足的随机微分方程. 用线性化方法求出了双峰稳态概率密度的近似表达式. 进一步的工作可研究系统的随机分岔^[11]和随机混沌^[12].

- [1] Zhu W Q, Lu M Q and Wu Q T 1993 *Journal of Sound and Vibration* **165** 285
- [2] Huang Z L and Zhu W Q 2000 *Journal of Sound and Vibrations* **238** 233
- [3] Wagner U V 2002 *Nonlinear Dynamics* **28** 243
- [4] Wedig W V 1990 *Structural Safety* **8** 13
- [5] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* (New York : Wiley)
- [6] Rajan S and Davies H G 1988 *Journal of Sound and Vibration* **123** 497
- [7] Nayfeh A H and Serhan S J 1990 *International Journal of Nonlinear*

Mechanics **25** 493

- [8] Rong H W, Xu W and Fang T 1998 *Journal of Sound and Vibration* **210** 483
- [9] Rong H W, Xu W, Wang X D, Meng G and Fang T 2002 *International Journal of Non-linear Mechanics* **37** 1017
- [10] Zhu W Q 1992 *Random Vibration* (Beijing Science Press) [朱位秋 1992 随机振动(北京科学出版社)]
- [11] Xiong J J, Gao Z T, Liu X B and Sun X F 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** [熊峻江、高镇同、刘先斌、孙训方 2000 物理学报 **49** 1]
- [12] Luo X S, Wang B H, Jiang F and Gan Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 17

On double-peak probability density functions of a Duffing oscillator under narrow-band random excitations^{*}

Rong Hai-Wu^{1,2†} Wang Xiang-Dong¹⁾ Xu Wei³⁾ Meng Guang²⁾ Fang Tong³⁾

¹⁾ Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China

²⁾ State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

³⁾ Department of Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

(Received 26 December 2002; revised manuscript received 21 October 2004)

Abstract

The principal resonance of Duffing oscillator under the narrow-band random external excitation is investigated. The method of multiple scales is used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The one-peak probability density function of each of the two stable stationary solutions is then calculated by perturbation analysis in the resonant case. These two functions are combined by using the probability of realization of the two stable stationary solutions to calculate the double-peak probability density function approximately. Theoretical analyses are verified by numerical results.

Keywords : Duffing oscillator, double peak probability density, multiple scale method, linearization method

PACC : 0500, 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10072049), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 04011640)

[†]E-mail: ronghw@foshan.net