

# 自参考光谱相干法的小波变换相位重建<sup>\*</sup>

邓玉强<sup>1)</sup> 吴祖斌<sup>1)</sup> 陈盛华<sup>1)</sup> 柴 路<sup>1)</sup> 王清月<sup>1)</sup> 张志刚<sup>1)✉</sup>

<sup>1)</sup> 天津大学精密仪器与光电子工程学院, 光电信息技术科学教育部重点实验室, 天津 300072)

<sup>2)</sup> 北京大学信息科学与技术学院量子电子学研究所, 北京 100871)

(2004 年 11 月 18 日收到, 2005 年 1 月 12 日收到修改稿)

将小波变换法引入光谱相位相干电场重建法的相位重建, 从光谱干涉条纹的小波变换中直接读取条纹相位, 消除了传统傅里叶方法滤波过程中产生的相位噪声. 这种方法将有利于超宽带、单周期超短脉冲的产生, 更适用于超短脉冲的评价.

关键词: 超短脉冲, 相位重建, 小波变换

PACC: 4280W, 0760L

## 1. 引 言

飞秒激光技术的发展不仅取决于激光技术本身, 还得益于测量技术的更新和改进. 光谱相位评价在超短脉冲发展中有着极为重要的作用. 对激光器设计者而言, 只有准确掌握脉冲光谱相位才能根据相位控制高阶色散, 使之产生超短脉冲. 最近, 通过计算机加载液晶空间光调制器, 根据反馈的相位对脉冲相位补偿, 在可见光至近红外波段产生了近单周期  $3.4 \text{ fs}^{[1]}$  和  $2.8 \text{ fs}^{[2]}$  近变换极限脉冲, 这是迄今为止在该波段获得的最短光脉冲. 对于激光的应用者, 掌握脉冲光谱相位也同样重要, 如在化学反应的产生率、双光子电极化率等量化控制方面都是有意义的.

在评价脉冲相位的方法中, 被广泛应用的主要有频率分辨光学开关(FROG)法<sup>[3]</sup>和自参考光谱相位相干电场重建(SPIDER)法<sup>[4]</sup>. FROG 法计算量大、时间长, 需要多次迭代才能得到与测量图形相近的解, 难以实时测量. 相比之下, SPIDER 法没有移动部件并使用非迭代的还原算法, 拥有极快的测量时间. 因此, 在以空间光调制器补偿相位的系统中, SPIDER 法被用于反馈控制的实时监测. 而且, SPIDER 基于光谱干涉原理, 具有单次测量的能力. 正是由于 SPIDER 法的诸多优点, 已经越来越多地

被应用于超短脉冲的评价中.

传统的 SPIDER 相位求解算法采用傅里叶变换, 将光谱干涉条纹变换到伪时域, 在变换域中出现三个峰值. 用一个矩形窗口或高斯窗口滤出其中一个交流峰, 对滤出的交流峰进行傅里叶反变换, 重建脉冲相位<sup>[4-6]</sup>. 滤波窗口的位置和宽度是两个独立参数. 窗口位置要位于选取的交流分量中心. 窗口的宽度要适当, 应完全包含交流峰而又不与直流峰交叠. 如果窗口太窄, 交流峰将被扭曲, 重建的相位准确度降低. 如窗口太宽, 所包含的噪声成分也足以使重建相位可信度下降<sup>[7]</sup>. 这种噪声来自于背景、干涉条纹包络或干涉条纹自身, 以及仪器采样、量化等因素. 当脉冲的光谱受到空间光调制系统调制时, 光谱所产生的精细结构将影响光谱干涉信号, 使其在频域引起宽带的噪声, 这样的噪声往往难以通过选择滤波窗口消除<sup>[1]</sup>.

本文提出用小波变换重建光谱相位. 光谱干涉条纹的相位从干涉图的小波变换中直接读取, 不需要任何滤波窗口, 消除了窗口引入的误差, 使结果更精确.

## 2. 小波变换分析光谱干涉的数学描述

小波变换是 20 世纪 80 年代后期发展起来的应用数学分支, 是傅里叶变换的发展, 被看作近年来在

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60178007)、国家自然科学基金重大项目(批准号: 60490280)和国家重点基础研究专项基金(批准号: G1999075201-2)资助的课题.

<sup>✉</sup> 通讯联系人.

数学方法上的一种突破. 小波变换是对信号的联合时频分析, 尤其适合于分析具有复杂频率成分的信号, 目前已被广泛应用于多个领域. 小波变换分析干涉条纹时, 条纹的相位信息可以直接在二维的小波变换图形中读取, 这种相位识别方法已经成功应用于解决力学问题<sup>[8,9]</sup>.

小波变换<sup>[10]</sup>指信号  $f(t)$  与具有良好局部化性质的小波函数  $\psi_{a,\tau}(t)$  作内积, 即

$$W(a, \tau) = \int f(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt, \quad (1)$$

式中,  $\psi_{a,\tau}^*(t)$  是子小波函数  $\psi_{a,\tau}(t)$  的复共轭, 子小波函数  $\psi_{a,\tau}(t)$  由母小波函数  $\psi(t)$  经过伸缩和平移得到, 即

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right).$$

这里,  $a$  为尺度因子,  $\tau$  为平移因子.

小波变换用于分析光谱干涉信号时, 选角频率  $\omega$  作变量, 平移因子用  $\omega'$  代替  $\tau$ . 小波变换(1)式可以写为

$$W(a, \omega') = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \psi^*\left(\frac{\omega - \omega'}{a}\right) d\omega. \quad (2)$$

这样定义的标准小波变换公式对输入信号具有频率偏向性<sup>[11]</sup>. 为消除频率偏向, 用一个新的小波变换定义, 表示为

$$W(a, \omega') = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \psi^*\left(\frac{\omega - \omega'}{a}\right) d\omega. \quad (3)$$

这里, 子小波用  $\psi[(\omega - \omega')/a]$  代替  $\psi[(\omega - \omega')/a] \sqrt{a}$ .

小波的基函数不是唯一的, 这里选用 Gabor 小波作为小波母函数, 因为 Gabor 小波具有最小的 Heisenberg 窗口, 即具有最高的时间-频率分辨率. 并且, 选择这种小波可以定义相位<sup>[8,10]</sup>. 用角频率  $\omega$  作变量, Gabor 小波可表示为

$$\psi(\omega) = \exp\left(-\omega^2/2\sigma^2 + i2\pi\omega\right) (\sigma^2\pi)^{1/4}. \quad (4)$$

这里  $\sigma = (2\ln 2)^{-1/2}$ .

用 Gabor 小波作为小波母函数时, 尺度因子  $a$  与干涉条纹时间间隔  $t$  的关系为

$$t = 2\pi/a. \quad (5)$$

这样, 可以将光谱干涉条纹的小波变换表示为二维的时间-频率表达式(3)式可改写为

$$W(t, \omega') = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \psi^*\left[\frac{(\omega - \omega') \cdot t}{2\pi}\right] d\omega. \quad (6)$$

相应地, Gabor 小波在变换点  $[t, \omega']$  处的子小波可以表示为

$$\psi[(\omega - \omega') \cdot t] = \frac{t}{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{(\omega - \omega')^2 \cdot t^2}{8\pi^2 \sigma^2}\right] (\sigma^2\pi)^{1/4}. \quad (7)$$

小波变换重建光谱相位, 光谱干涉条纹全部时频信息反映在二维的时间-角频率平面上. 干涉条纹在某一角频率点处的时间间隔体现为该点处小波变换的极大值, 该极大值处的相位就是干涉条纹在该点的相位.

为验证小波变换重建光谱干涉相位的精确性, 我们分别用模拟的和实际的光谱干涉信号来加以验证.

### 3. 重建光谱相位的数值模拟

这里模拟的脉冲光谱为高斯型, 半高宽(FWHM)为 64 THz, 中心波长 800 nm, 满足变换极限脉冲的时域宽度为 14.07 fs. 模拟的脉冲具有二阶相位  $\varphi''(\omega) = +30 \text{ fs}^2$ , 脉冲时域宽度 18.37 fs, 光谱侧切量  $\Omega = 25 \times 10^{12} \text{ rad/s}$ , 两复制脉冲的时间延迟  $\tau = 0.8 \text{ ps}$ . 模拟的光谱和相位以及由给定参数得到的光谱干涉信号如图 1 所示.

图 1(a) 是模拟的光谱和相位, 图 1(b) 是根据模拟的光谱和相位以及给定参数得到的光谱干涉信号. 对图 1(b) 的光谱干涉信号作小波变换, 由于所选的小波是复数小波, 所以得到的小波变换也是复数, 其模和幅角分别示于图 2(a) 和 (b).

在图 2(a) 中, 某一角频率处的极大值, 反映了干涉信号在该处的时间间隔. 在图 2(b) 中, 在同一角频率处提取该极大值点所在坐标的小波变换幅角, 就是干涉条纹于该角频率处在  $[0, 2\pi]$  的相位分布. 依次取出各个角频率的相位, 并将在  $[0, 2\pi]$  范围内折叠的相位展开成连续相位, 将连续相位减去条纹的快变部分  $\omega\tau$ , 得到光谱相位差  $\theta(\omega_c) = \varphi_\omega(\omega_c - \Omega) - \varphi_\omega(\omega_c)$ <sup>[4]</sup>, 如图 3(a) 所示. 相位差积分后, 重建的光谱相位如图 3(b) 所示.

由图 3(b) 可见, 小波变换重建的相位和模拟给定的相位能很好相符. 可见在理想情况下, 小波变换能精确重建脉冲光谱相位. 为进一步验证小波变换重建实际相位的正确性和可靠性, 我们将以实际

光谱干涉信号为例予以验证.

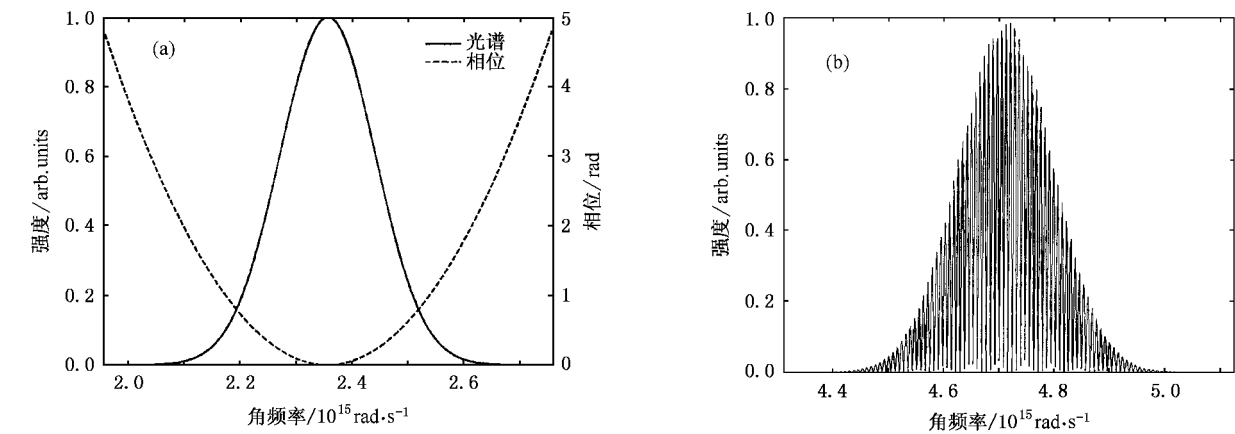


图 1 模拟的光谱、相位和光谱干涉信号 (a) 光谱和相位 ,(b) 根据给定参数得到的光谱干涉信号

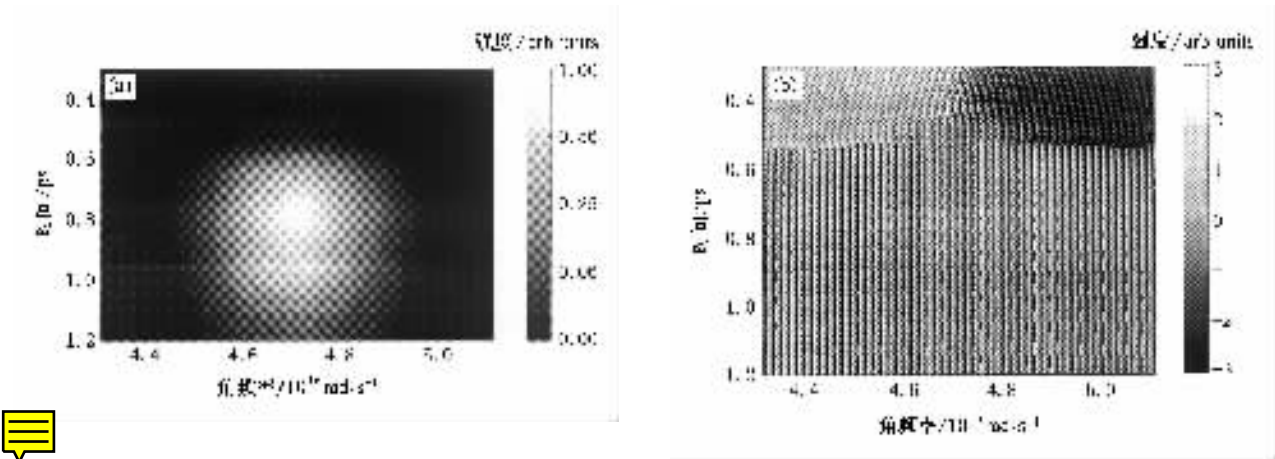


图 2 光谱干涉信号的小波变换结果 (a) 小波变换的模 ,(b) 小波变换的幅角

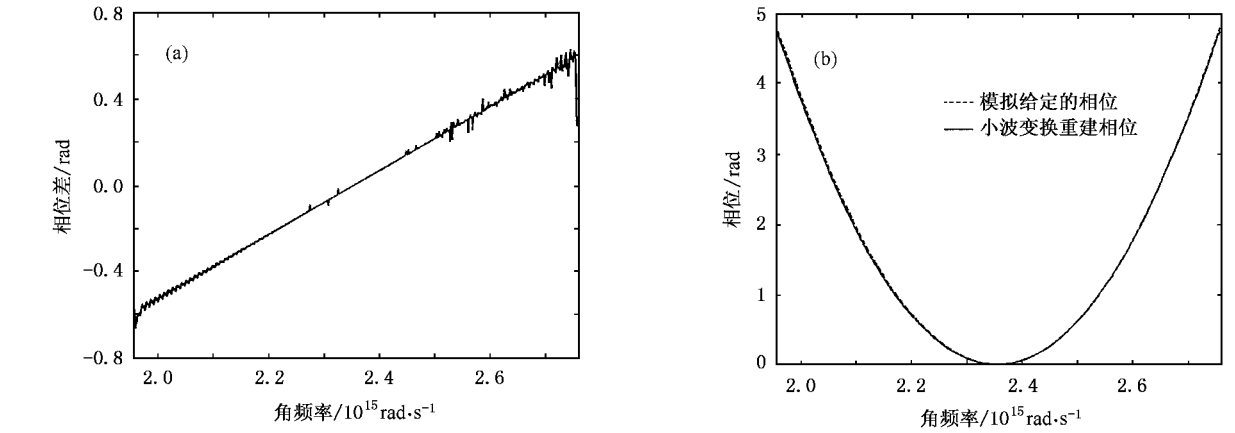


图 3 小波变换重建的光谱相位差和相位 (a) 重建的相位差 ,(b) 重建相位和模拟给定相位的比较

4. 重建光谱相位的实验验证

我们利用自制的 SPIDER 实验装置 ,测一台啁

啾镜色散补偿的钛宝石激光器的输出脉冲 ,得到的光谱干涉信号如图 4 ( a )所示 ,图 4 ( b ) ( c )分别是图 4 ( a )的小波变换的模和幅角 . 按照重建模拟相位所描述的过程 ,重建的光谱相位如图 4 ( d )所示 .

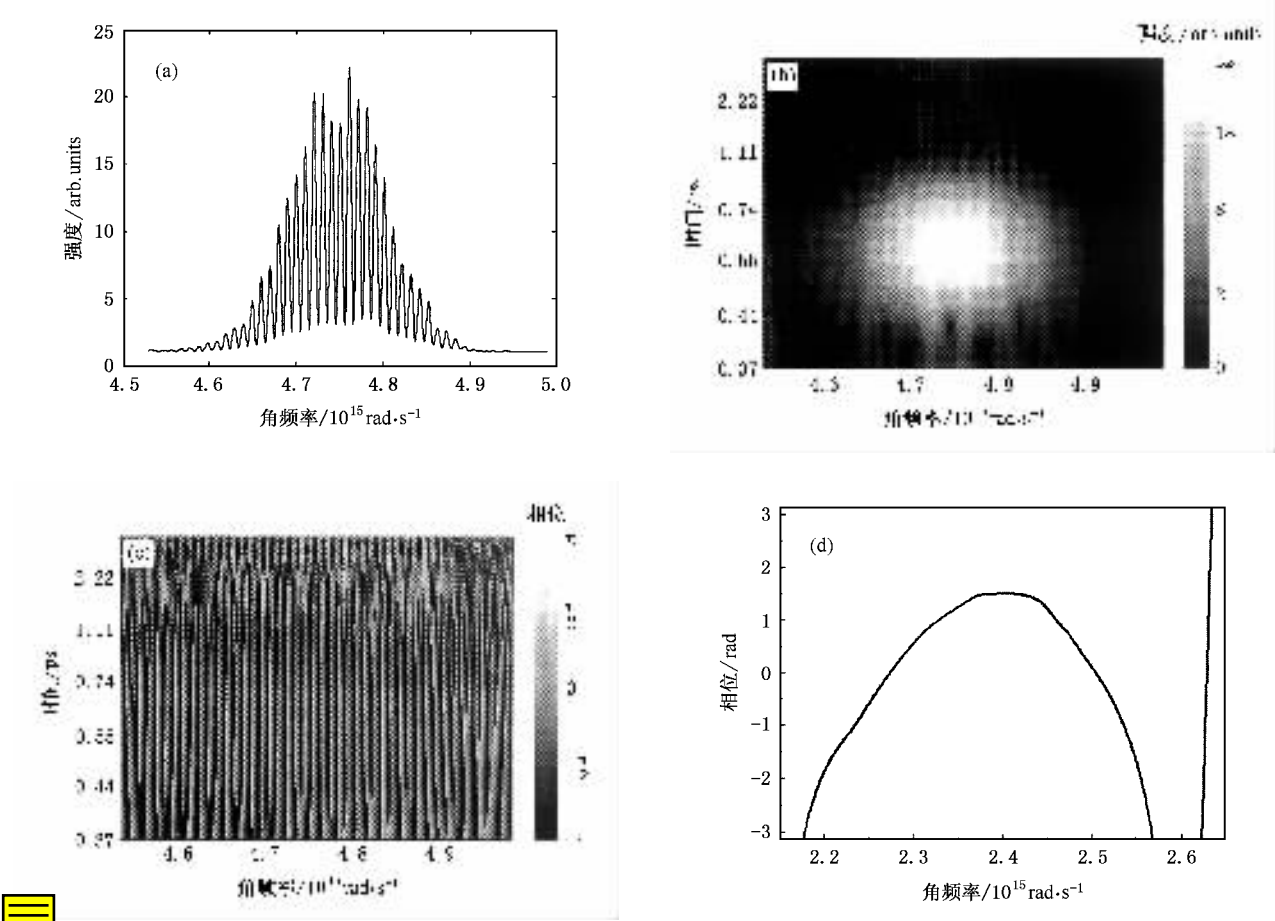


图 4 小波变换重建实测光谱干涉相位过程 ( a )实测的 SPIDER 干涉信号 ,( b )小波变换的模 ,( c )小波变换的幅角 ,( d )重建的脉冲相位

用传统的傅里叶方法<sup>[4-6]</sup>重建图 4 ( a )的光谱干涉相位 . 滤波窗口选用四阶超高斯窗口 ,FWHM 分别

为  $\tau/5, \tau/3, 2\tau/5, \tau/2$  ( $\tau = 680 \text{ fs}$ ). 滤波窗口和不同宽度窗口重建的相位分别如图 5 ( a ) ( b )所示 .

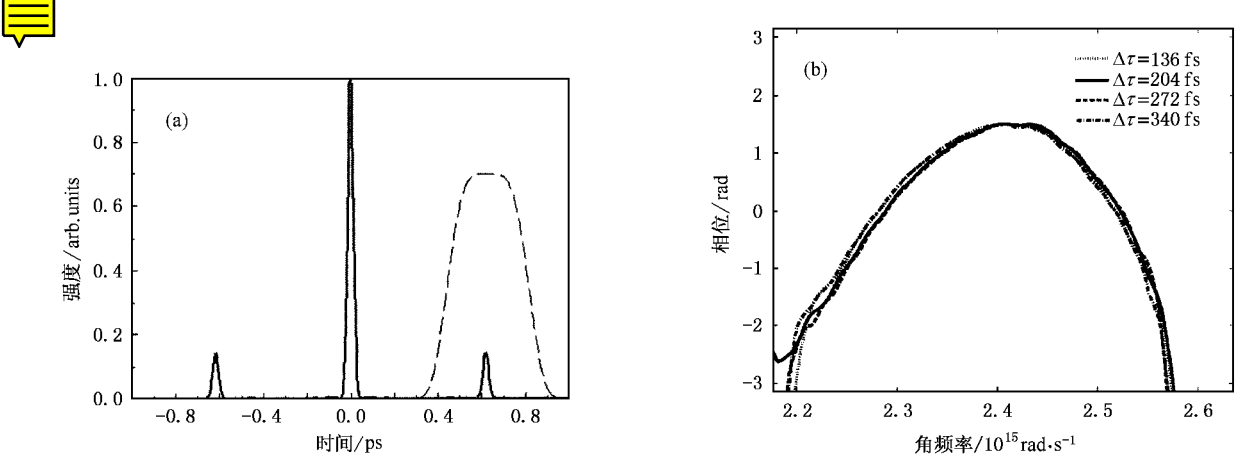


图 5 傅里叶变换重建实测光谱干涉相位过程 ( a )选择的滤波窗口 ( b )不同宽度窗口重建的相位

将傅里叶变换通过选择窗口( FWHM 为  $\tau/3^{[7]}$ )重建的相位和小波变换重建的相位与光谱叠放在一起,如图 6(a)所示. 根据光谱和相位变换的时域脉

冲包络如图 6(b)所示,图中实线变换极限脉冲宽度为 17.37 fs,用小波变换和傅里叶变换重建的相位得到的时域脉冲宽度分别为 30.83 和 31.35 fs.

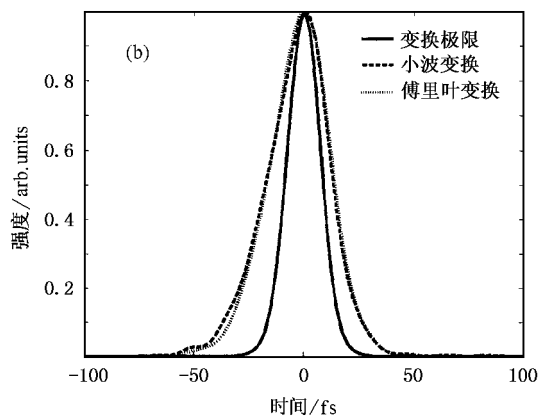
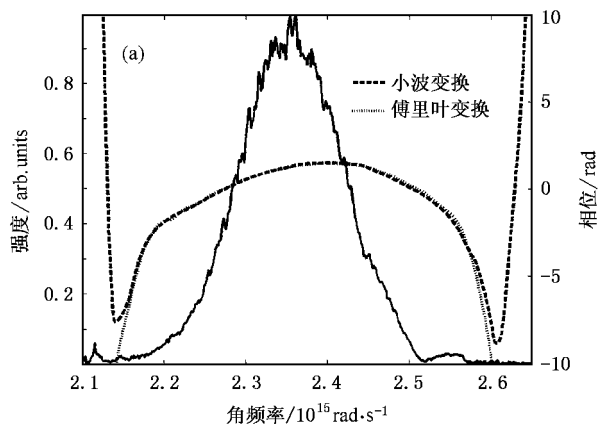


图 6 小波变换和傅里叶变换重建的光谱相位和根据相位重建的时域脉冲比较 (a)小波变换和傅里叶变换重建的相位,(b)两种方法重建的相位变换的时域脉冲和变换极限脉冲

由图 6(a)可见,两种方法重建的相位在脉冲光谱区( $2.15 \times 10^{15} - 2.65 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ )符合很好,这进一步证明了重建光谱相位中小波变换方法的精确性.但是,傅里叶变换由于不同的滤波窗口包含的噪声不同,因而会重建出不同的相位结果,而小波变换由于没有滤波窗口,消除了噪声的干扰,因而重建的结果是唯一的,也是精确的.在光谱区之外,小波变换重建的相位发生了突变.这是因为小波变换是一种联合时频分析,光谱区之外已不存在干涉信号,噪声信息导致突变,得到的是偏离真实值的错误相位.傅里叶变换则是将整个干涉信号视为无限长的周期信号变换到伪时域,不能区分出不同位置的信号信息.当光谱干涉在光谱区以外时,干涉信息已不存在,而傅里叶变换仍然把噪声信息当作信号的一部分求解重建,因而重建的相位是光滑没有突变的.这种方法难以区分信息的有效区域.

另外,在光谱区两种方法得到的结果都显示出在 5 rad 范围的二阶相位为  $\varphi''(\omega) = -123.26 \text{ fs}^2$  的负啁啾.这是因为在以啁啾镜为色散补偿元件的激光腔中,设计的啁啾镜色散量是一定的,实验中不可调节,其负色散太大,造成对脉冲过度补偿的结果.

## 5. 小波变换法与傅里叶变换法的比较

首先,小波变换不是通过选择滤波窗口重建相位,而是将光谱干涉信息展开成二维的时间-角频率

平面,提取该平面上代表条纹间隔的极大值处相位信息,精确地重建干涉条纹的相位,消除了不合适的滤波窗口带来的噪声误差.

其次,小波变换步骤更简单.傅里叶变换要经过三个步骤:傅里叶变换—选择滤波窗口—逆变换;而小波变换只需要一次变换,就可以直接读取相位,不需要选窗滤波和逆变换.

第三,小波变换不需要人为的选择、监控和调整滤波窗口,更适用于计算机自动分析、实时反馈和相位补偿.

此外,从计算量的角度考虑,虽然小波变换将光谱干涉信号展开成二维的时间-频率信息,增加了计算点,但小波变换每一点的计算量只与该处子小波所包含的有限区域有关,而傅里叶变换每一点的计算量与整个信号范围有关.相对于傅里叶变换,小波变换单点的计算量要小得多.而且在小波变换的二维平面上,表示条纹间隔的极大值在很小范围内波动,此范围之外的小波变换与重建相位无关,因而实际只需要计算在脉冲延迟时间  $\tau$  附近很小区域的小波变换,而且时间步长不需要很精细就能精确重建相位.

## 6. 结 论

本文引入了一种新的光谱干涉相位重建方法——小波变换法.该方法不需要传统傅里叶变换

法中的窗函数滤波,消除了滤波引入的噪声,可更精确地重建光谱相位.理论模拟和实际应用都证明了这种方法的正确性和可靠性.这种方法将在以空间

光调制器为脉冲相位补偿的系统中发挥重要的作用,更有利于单周期超短脉冲的产生和评价.

- 
- [ 1 ] Yamane K , Zhang Z , Oka K *et al* 2003 *Opt. Lett.* **28** 2258
  - [ 2 ] Yamane K , Kito T , Morita R *et al* 2004 *Conf. Lasers and Electro-Optics* ( Washington D. C. : Optical Society of American ) postdeadline paper PDC2
  - [ 3 ] Kane D J , Trebino R 1993 *Opt. Lett.* **18** 823
  - [ 4 ] Iaconis C , Walmsley I A 1999 *IEEE J. Quantum Electron.* **35** 501
  - [ 5 ] Chai L , He T Y , Yang S J *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 114 ( in Chinese ) [ 柴路、何铁英、杨胜杰等 2004 物理学报 **53** 114 ]
  - [ 6 ] Chai L , He T Y , Gao F *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 1487
  - [ 7 ] Anderson M E , de Araujo L E E , Kosik E M *et al* 2000 *Appl. Phys. B* **70** S85
  - [ 8 ] Morimoto Y , Imamoto Y 1995 *Proc. SEM Spring Conf. Exp. Mech.* ( Michigan Society for Experimental Mechanics ) p898
  - [ 9 ] Deng Y Q , Ji X H , Qin Y W *et al* 2003 *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* **5286** 277
  - [ 10 ] Chui C K 1992 *An Introduction to Wavelets* ( Boston : Academic Press )
  - [ 11 ] Telfer B , Szu H H 1992 *Opt. Eng.* **31** 1830

## Wavelet transform analysis for phase reconstruction of spectral shearing interferometry of ultrashort optical pulses<sup>\*</sup>

Deng Yu-Qiang<sup>1)</sup> Wu Zu-Bin<sup>1)</sup> Chen Sheng-Hua<sup>1)</sup> Chai Lu<sup>1)</sup> Wang Qing-Yue<sup>1)</sup> Zhang Zhi-Gang<sup>1 2)</sup>

<sup>1)</sup>*College of Precision Instrument and Optoelectronics Engineering , Key Laboratory of Opto-electronic Information Science and Technology of Ministry of Education , Tianjin University , Tianjin 300072 , China )*

<sup>2)</sup>*Institute of Quantum Electronics , School of Electronics Engineering and Computer Science , Peking University , Beijing 100871 , China )*

( Received 18 November 2004 ; revised manuscript received 12 January 2005 )

### Abstract

We introduce the wavelet transform for phase reconstruction of SPIDER in this paper. With the technique , we can directly read the phase from the wavelet transform of spectral interferogram , which essentially eliminates the phase noise resulting from improper temporal filters in the conventional Fourier method. The simulation and the practical example proved the validity and reliability of this technique. This technique will find more applications in generation and characterization of monocycle optical pulses.

**Keywords :** ultrafast lasers , phase retrieval , wavelet transform

**PACC :** 4280W , 0760L

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60178007 ) , the Major Program of the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60490280 ) , and the Special Foundation for State Major Basic Research of China ( Grant No. G1999075201-2 ) .