

含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons 项 $O(3)$ 非线性 σ 模型的分数自旋和分数统计性质^{*}

张 莹[†] 李爱民 李子平^{††}

(北京工业大学数理学院, 北京 100022)

(2004 年 1 月 9 日收到, 2004 年 3 月 18 日收到修改稿)

研究了 $(2+1)$ 维时空中含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons (MCS) 项的非线性 σ 模型的分数自旋性质. 根据约束 Hamilton 系统的 Faddeev-Senjanovic (FS) 路径积分量子化方案, 对该系统进行量子化, 由量子 Noether 定理给出了量子守恒角动量, 说明了在量子水平上该系统仍具有分数自旋的性质.

关键词: 约束 Hamilton 系统, 分数自旋, $O(3)$ σ 模型

PACC: 1110, 1130

1. 引 言

$O(3)$ 非线性 σ 模型是用来描述 $O(3)$ 整体对称自发破缺的物理系统^[1]. 在凝聚态物理和高能物理领域, 是应用广泛的场论模型. 自人们发现在 $2+1$ 维时空中粒子可能拥有分数自旋的性质(任意子)以来^[2], 这个模型就受到人们的广泛关注. 任意子在分数量子霍尔效应乃至高温超导中有重要应用. Wilcheck 和 Zee 最早提出由于 Hopf 项的存在而使 $(2+1)$ 维非线性 σ 模型具有分数自旋和分数统计的性质^[3]. 对于含 Chern-Simons (CS) 项的 $(2+1)$ 维非线性 σ 模型的规范理论也得到分数自旋和分数统计特性^[4]. 对含有 Hopf 项和 CS 项的 $O(3)$ 非线性 σ 模型在经典和量子水平下都给出了分数自旋和分数统计的性质^[5,6]. 并对含有 Maxwell 项的拓扑 $U(1)$ 规范场非线性 σ 模型也给出具有分数自旋和分数统计的结果^[7], 但文中是半经典的并且是近似的. 关于任意子的角动量的讨论, 通常是从能量-动量张量构造角动量或从经典的 Noether 定理来导出的, 其结果在量子水平下是否有效还值得仔细研究^[8]. 本文将对含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons (MCS) 项的 $(2+1)$ 维 $O(3)$ 非线性 σ 模型采用 FS 路径积分量子

化方法, 对该系统进行量子化, 讨论其量子对称性, 由量子 Noether 定理给出量子守恒角动量, 并严格地在量子水平下说明了文献[7]中的模型仍具有分数自旋和分数统计性质.

2. $O(3)$ 非线性 σ 模型和 FS 路径积分量子化

含有 Hopf 项和 MCS 项 $O(3)$ 非线性 σ 模型的 Lagrange 量密度为^[7]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda - A_\mu J^\mu + \frac{1}{2f} (\partial_\mu n^a)^2, \quad (1)$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. n^a 为标量场, 并遵从约束 $(n^a)^2 = 1$ ($a = 1, 2, 3$). 如果 Lagrange 量(1)中不含 Maxwell 项时, A_μ 代表非动力场, 它在适当的规范下可被完全消除, 但在拉氏量里面加入一个 Maxwell 动力学项, 它就变成一个动力场^[7]. 拓扑守恒流

$$J^\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{abc} n_a \partial_\nu n_b \partial_\lambda n_c, \quad (\partial_\mu J^\mu = 0), \quad (2)$$

该拉氏量在 Dirac 意义上是奇异的, 首先要确定系统在相空间的约束^[9,10]. 与场量 n^a 和 A_μ 相对应的正

^{*} 北京市自然科学基金(批准号: 1942005)资助的课题.

[†] E-mail: zhangying792002@yahoo.com.cn

^{††} E-mail: zpli@solaris.bjpu.edu.cn

则动量为

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}^a} = \dot{n}^a - \frac{1}{4\pi} \epsilon^{ij} A_i \epsilon^{abc} n^b \partial_j n^c, \quad (3)$$

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \quad (4)$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = F_{i0} + \frac{\kappa}{4} \epsilon_{ij} A^j, \quad (5)$$

其中 $\epsilon^{ij} = \epsilon^{0ij}$. 初级约束分别为^[5]

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0, \quad \theta_1 = (n^a)^2 - 1 \approx 0, \quad (6)$$

其中, 符号‘ $\approx$ ’表示 Dirac 意义上的弱等. 该系统的正则哈密顿量密度

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \pi_\mu \dot{A}^\mu + \pi_a \dot{n}^a - \mathcal{L} \\ &= \mathcal{H}_0 - A_0 [(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{ij} \partial_i A_j) - J^0], \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} \pi_i A_j - \frac{\kappa^2}{16} A^i A_i \\ &+ \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} (\pi^a)^2 - \frac{1}{32\pi^2} (\epsilon^{ij} A_i \epsilon^{abc} n^b \partial_j n^c)^2 \\ &- \frac{1}{2} (\partial_i n^a)^2 + \frac{1}{4\pi} \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} A_i n^a \partial_j n^b \\ &\times \left(\pi^c + \frac{1}{4\pi} \epsilon^{lm} \epsilon^{cde} A_l n^d \partial_m n^e \right). \end{aligned} \quad (8)$$

J^0 由(2)式给出, 总哈密顿量

$$H_T = \int d^3x (\mathcal{H}_c + \lambda_1 \Lambda_1 + \mu_1 \theta_1). \quad (9)$$

由初级约束的自治性条件 $\{\Lambda_1, H_T\} \approx 0$ 和 $\{\theta_1, H_T\} \approx 0$ 分别给出次级约束

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \left(\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right) - J_0 \approx 0, \\ \theta_2 &= n^a \pi_a \approx 0, \end{aligned} \quad (10)$$

次级约束的自治性条件不再产生新的约束. 不难验证, Λ_1 和 Λ_2 为第一类约束, θ_1 和 θ_2 为第二类约束. 按约束系统的 FS 路径积分量子化方法, 对每一个第一类约束需选取一个相应的规范条件^[11]. 考虑库仑规范 $\Omega_1 = \partial_i A_i \approx 0$, 由其自治性要求 $\{\Omega_1, H_T\} \approx 0$, 给出另一规范约束为

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0. \quad (11)$$

按 FS 量子化方案, 相空间 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J, K] &= \int \mathcal{D}\varphi^a \mathcal{D}\pi_a \prod_{i,k,l} \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \delta(\theta_i) \\ &\times \det | \Lambda_k, \Omega_l | \cdot (\det | \theta_i, \theta_j |)^{1/2} \\ &\times \exp \left\{ \int d^3x (\pi_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{H}_c + J_a \varphi^a + K^a \pi_a) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

不难看出, $\det | \Lambda_k, \Omega_l |$ 与场量无关, 故可以从生成泛函中略去. 通过对 $\det | \theta_i, \theta_j |$ 的计算, 利用 δ 函数和 Grassmann 变量积分的性质, 可得相空间中 Green 函数的生成泛函为^[12,13]

$$\begin{aligned} Z[J^a, K_a, U^i, V^i, W^i] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\omega \\ &\times \exp \left\{ \int d^3x (\mathcal{L}_{\text{eff}}^P + J^a \phi_a \right. \\ &+ K_a \pi^a + U^i \lambda_i \\ &+ V^i \mu_i + W^i \omega_i) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}^P &= \mathcal{L}^P + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{gh} \\ &= \pi_a \dot{n}^a + \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}_c + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{gh}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_m = \lambda_l \Lambda_l + \mu_n \Omega_n + \omega_i \theta_i, \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_{gh} = 2\bar{C}(x) (n^a(x))^4 C(x), \quad (16)$$

λ_l, μ_n 和 ω_i 为乘子场, C 和 $\bar{C}$ 为鬼场 (Grassmann 变量), (J^a, U^i, V^i, W^i) 是分别对场 $(\phi_a, \lambda_l, \mu_n, \omega_i)$ 引入的外源, (K_a, K_μ) 是分别对动量 (π^a, π^μ) 引入的外源.

3. 分数自旋

如果在下面整体变换

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \Delta x^\mu \\ &= x^\mu + \epsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi), \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta\varphi(x) \\ &= \varphi(x) + \epsilon_\sigma \xi^\sigma(x, \varphi, \pi), \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta\pi(x) \\ &= \pi(x) + \epsilon_\sigma \eta^\sigma(x, \varphi, \pi) \end{aligned} \quad (17)$$

下, 有效作用量 $I_{\text{eff}}^P = \int d^2x \mathcal{L}_{\text{eff}}^P$ 不变. 其中 ϵ_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 是无穷小参数, $\tau^{\mu\sigma}, \xi^\sigma, \eta^\sigma$ 为时间和正则变量的给定函数. 且变换的 Jacobi 行列式为 1, 那么由正则量子 Noether 定理, 有量子守恒荷^[14,15]

$$\begin{aligned} Q^\sigma &= \int_V d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}} \tau^{0\sigma}] \\ &= \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (18)$$

在空间转动下, 有效正则作用量不变, 且场变换的 Jacobi 行列式为 1, 又 $\mathcal{L}_{gh}$ 不含场的微商, 对正则动量无贡献. 在 (x_i, x_j) 平面内的转动下, 由量子守恒律可得量子守恒量

$$\begin{aligned} L &= \int d^2x \epsilon^{ij} [x_i \pi_a \partial_j n^a \\ &+ (\pi_\mu S_{ij}^{\mu\nu} A_\nu + x_i \pi^\mu \partial_j A_\mu)], \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $S_{ij}^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l$. 将(5)式代入(19)式,并利用关系式 $\epsilon^{jk} \epsilon_{il} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_i^l \delta_j^k$ [16], 可得

$$L = \int d^2 x \epsilon^{ij} x_i (\pi_a \partial_j n^a + F_{k0} \partial_j A_k) + \int d^2 x \epsilon^{ij} F_{k0} S_{ij}^{kl} A_l + \frac{\kappa}{4} \int d^2 x [\epsilon^{ij} x_i A_j (\epsilon^{lk} \partial_l A_k)]. \quad (20)$$

由(1)式可知矢量场 A_μ 的方程为

$$\partial_\mu F^{\nu\omega} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\nu\omega\lambda} \partial_\mu A_\lambda = J^\nu. \quad (21)$$

在(21)式中让 $v = 0$, 并利用(5)式, 有

$$\partial^i \pi_i + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{ij} \partial_i A_j = J^0. \quad (22)$$

由(22)式, 可得

$$A_i(x) = -\frac{4}{\kappa} \epsilon_{ij} \partial_x^j \int d^2 y G(x, y) J^0(y), \quad (23)$$

其中 $G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| + \text{const}$, 由(20)式和(23)式得

$$L = \int d^2 x \epsilon^{ij} x_i (\pi_a \partial_j n^a + F_{k0} \partial_j A_k) + \int d^2 x \epsilon^{ij} F_{k0} S_{ij}^{kl} A_l + \frac{Q^2}{\pi\kappa}, \quad (24)$$

式中 $Q = \int d^2 x J^0$ [17]. (24) 式右边第一项为轨道角动量; 第二项为通常的自旋角动量, 它与 A_μ 场的 Maxwell 项有关; 最后一项为附加项, 仿文献[5] 和

[17] 的分析, 该项为分数自旋项.

4. 结论和讨论

可见, 对于含 Hopf 项和 MCS 项的 $O(3)$ 非线性 σ 模型, 在量子水平上仍具有分数自旋的性质. 文献[7] 从半经典和近似情况分析了此模型的分数自旋的性质, 角动量可以取任意值, 其大小取决于 CS 项前面的系数. 本文中在量子水平下严格导出了该结果. 如果在 Lagrange 量密度(1)式中缺少 Maxwell 动力学项, 可以得到相同的分数自旋项, 但是对于此系统的总角动量就会缺少了通常的自旋项, 即(24)式的第二项.

本文将 $\theta_1 \approx 0$ 是作为初级约束来处理的. 系统的运动也可由 $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + v_1 \theta_1$ 来描述, 约束乘子场 v_1 的正则动量 $\pi_{v_1} \approx 0$, 不难看出由 $\pi_{v_1} \approx 0$ 的自治性条件, 导致次级约束 $\theta_1 \approx 0$. 此时 $\theta_1 \approx 0$ 是 $\mathcal{L}^*$ 描述的次级约束, 由 $\mathcal{L}^*$ 导致的其他约束与 $\theta_1 \approx 0$ 作为初级约束结果相同, 约束分类(第一类和第二类)也无变化. 可见对 $(n^a)^2 = 1$ 的两种处理方式其结果是相同的.

考虑拉氏量中含非 Abel CS 项后, 系统是否还保持分数自旋性质, 还值得进一步研究.

- [1] Kimura M, Kobayashi H and Tsutsui I 1998 *Nucl. Phys. B* **527** 624
- [2] Wilczek F 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 957
- [3] Wilczek F and Zee A 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2250
- [4] Mukherjee P 1997 *Phys. Lett. B* **403** 70
- [5] Banerjee R 1994 *Nucl. Phys. B* **419** 611
- [6] Li Z P 1996 *Since in China A* **39** 738
- [7] Karabali D 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1522
- [8] Xu J J et al 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1217 (in Chinese) [许京军等 1991 物理学报 **40** 1217]
- [9] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1599 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1599]

- [10] Li Z P 1984 *Acta Phys. Sin.* **33** 814 (in Chinese) [李子平 1984 物理学报 **33** 814]
- [11] Li Z P 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1255 (in Chinese) [李子平 1996 物理学报 **45** 1255]
- [12] Li Z P and Jiang J H 2002 *Symmetries in constrained canonical systems* (Beijing, Science Press).
- [13] Jiang J H, Liu Y and Li Z P 2004 *Chin. Phys.* **13** 157
- [14] Li Z P 1996 *Inter. J. Theor. Phys.* **35** 1353
- [15] Li Z P 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1601 (in Chinese) [李子平 1996 物理学报 **45** 1601]
- [16] Banerjee R and Chakraborty B 1994 *Phys. Rev. D* **49** 5431
- [17] Kim J K, Kim W T and Shin H 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 6

Fractional spin in the $O(3)$ nonlinear sigma model with Hopf and Maxwell-Chern-Simons terms^{*}

Zhang Ying Li Ai-Min Li Zi-Ping

(College of Applied Sciences, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

(Received 9 January 2004 ; revised manuscript received 18 March 2004)

Abstract

The property of fractional spin of the $O(3)$ nonlinear sigma model with Hopf and Maxwell-Chern-Simons (MCS) terms is studied. According to the rule of path integral quantization for a constrained Hamilton system in Faddeev-Senjanovic scheme, the system is quantized. Based on the quantal Noether theorem, we get the quantal conserved angular momentum, and the fractional spin at the quantum level of this system is presented.

Keywords : constrained Hamiltonian system, fractional spin, $O(3)$ nonlinear σ model

PACC : 1110, 1130

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1942005).