

一个小波函数指数参数变化的分岔现象^{*}

于万波[†] 魏小鹏

(大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

(大连大学信息科学与工程辽宁省重点实验室, 大连 116622)

(2005 年 11 月 23 日收到, 2006 年 4 月 13 日收到修改稿)

研究一个高斯小波函数产生的混沌分岔现象. 随着小波函数中指数参数的增加, 它的分岔图出现了倍周期分岔, 然后出现混沌. 经过一段混沌区域后又出现 2 的幂周期. 在整个过程中, 正分岔与逆分岔完整地结合在一起. 改变小波函数的系数出现一些明显的奇数周期, 如 3 周期、5 周期等. 绘制 Lyapunov 指数曲线及映射折射过程, 对混沌现象进行研究. 将小波函数展开成近似的多项式函数, 对近似多项式函数的分岔图进行了分析.

关键词: 混沌, 分岔, 小波函数

PACC: 0545

1. 引言

分岔是混沌现象的基本特征, 是产生混沌的必要条件. 自然现象与数学演算中都存在着分岔现象, 简单的分岔现象蕴含着深刻的道理^[1-5].

关于分岔的研究工作很多, 例如, 陈关荣等^[6]对 Hopf 分岔进行研究, 给出了反馈控制方法; 孙政策、徐健学^[7]对转子系统的分岔现象进行研究, 针对一些分岔特性给出了分析和描述; 李月等^[8]研究弱信号混沌检测问题, 给出了确定分岔阈值的基于线性偏微分方程理论的方法; 马文麒、杨承辉^[9]对一类耦合非线性振子同步分岔混沌现象进行研究, 对这一新的分岔现象进行分析仿真等.

著名的 logistic 映射 $y = \mu x(1 - x)$ ($0 < \mu < 4$), 随着 μ 的增加逐渐出现了 2 个、4 个、8 个周期点等等. 在 $\mu = 3.569946\dots$ 以后出现了混沌. logistic 映射是单峰映射, 常见的单峰映射的分岔图都是类似的, 一般是倍周期分岔, 然后出现混沌, 出现混沌后又突然发散. 不过, 小波函数映射也是单峰映射, 但它的分岔现象与 logistic 映射的分岔现象有很大的区别. 这里要研究的函数为

$$y = \varphi(x) = k(1 - x^2)\exp(-0.5(x + \mu)^2) \quad (-4 < \mu < 4). \quad (1)$$

在使用 (1) 式进行迭代时发现, 在 $k > 1.5$ 时出现了(混沌)分岔现象.

(1) 式是高斯函数 $\exp(-0.5x^2)$ 的二阶导数形成的小波函数. 小波函数的特点是当自变量 x 向左右两个方向延伸的时候, 函数会急剧地趋近于零, 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0.$$

从小波函数的定义与图像上可以看出, 小波函数与二次函数有很大的区别, 它的图像更加弯曲光滑. 并且, 这类小波函数存在任意阶的非恒等于零的导函数.

对抛物线映射等的分岔现象研究已比较深入, 但对小波函数迭代产生分岔的研究工作开展不多. 基于此, 本文对小波函数分岔现象进行研究. 首先使 (1) 式表示的小波函数的系数 k 变化, 对其分岔特性进行了研究. 接着对两个小波函数进行了对比分析, 说明小波函数产生混沌是一类问题, 不是特殊与孤立的. 然后绘制该映射的 Lyapunov 指数图, 可以看出 Lyapunov 指数大于零的区域与分岔图显示的混沌区域是一致的. 还对小波函数的 3 周期分岔现象以及混沌的映射过程进行了研究. 最后把小波函数离散为多项式的形式进行比较分析, 给出了一些规律性的结论.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 70572069, 50275019)资助的课题.

[†] E-mail: yu_wb@126.com

2. 调整(乘积)系数出现分岔现象

图 1 是 $y = k(1 - x^2)\exp(-0.5(x + \mu)^2)$ 的 (μ, y) 分岔图(μ - y 曲线).从图 1 可以看出,随着 k 的增加,逐渐出现更多的分岔,当 $k \approx 1.25$ 时出现了混沌现象.从图 1(a)(b)可以看出,每次分岔都像是出现了一个环.经过大量的实验,增加迭代次数,得到分岔数据,初步判断这是一个环.可以推测,图 1(c)中的每次分岔都是类似于环形的分岔.

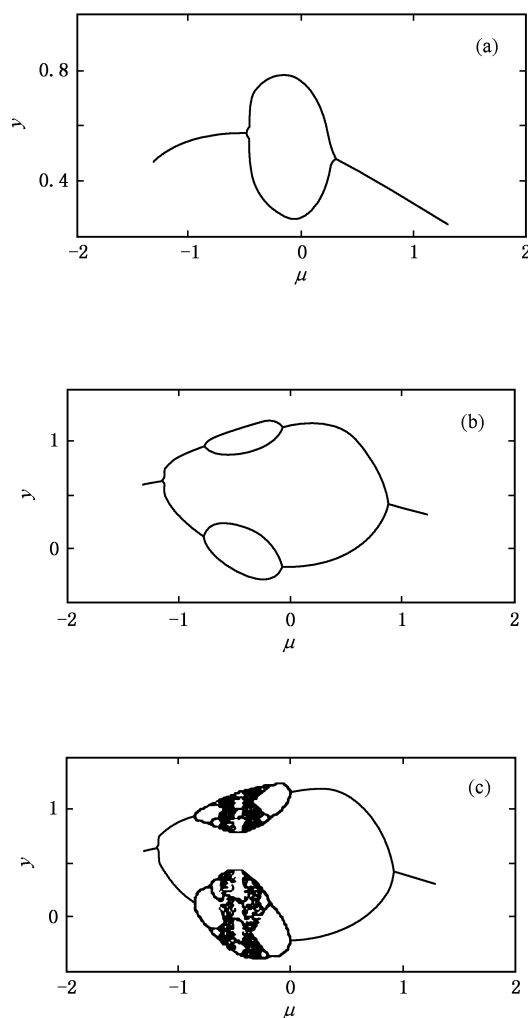


图 1 $y = k(1 - x^2)\exp(-0.5(x + \mu)^2)$ 的 (μ, y) 分岔图
(a) $k = 0.85$ (b) $k = 1.2$ (c) $k = 1.25$

为了更好地分析图 1 中的各个映射的混沌状况,绘制出图 1 中 3 个映射的 Lyapunov 指数曲线(图 2).从图 2 可以看出, k 取不同数值时, Lyapunov 指数曲线不同.图 2(c)有一段 Lyapunov 指数明显大于零,说明出现了混沌.

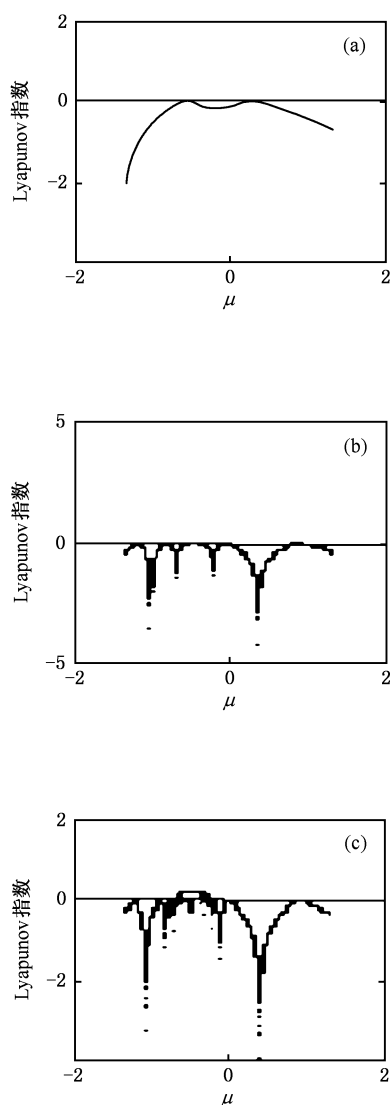


图 2 Lyapunov 指数的变化情况 (a) $k = 0.85$ (b) $k = 1.2$,
(c) $k = 1.25$

3. 两个类似小波函数指数参数变化的迭代分岔图比较

取 $k = 1.3$, 绘制出(1)式的 (μ, y) 分岔图(图 3(a)),这个图形很有特点,从两边往中间分岔,然后在中间的区域出现混沌,结合得非常完美.这种分岔图作者未曾在相关的文献中见到,所以对它进行研究.

为了更好地进行比较分析,在图 3(b)中给出了

$y = k(1 - x^2)\exp(-(x + \mu)^2)$ (2)
 (μ, y) 分岔图($k = 1.3$).对图 3(a)与(b)进行比较,并且通过实验得到它们的分岔点位置(μ 值)的分布情况,列在表 1 中.

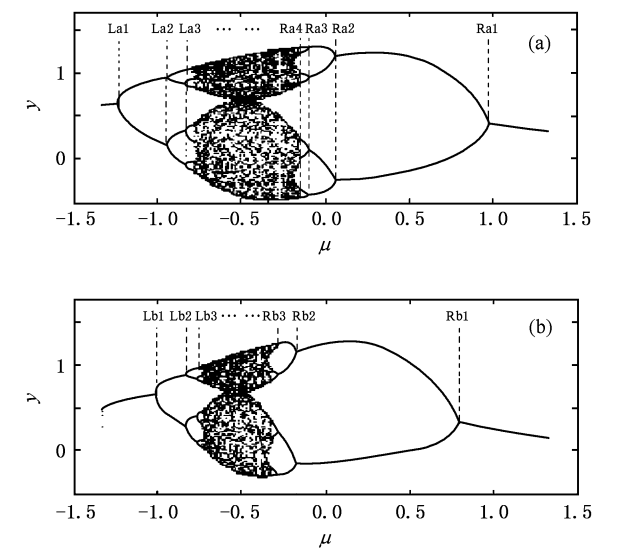


图3 两个函数的 (μ,y) 分岔图比较 (a) $y=k(1-x^2)\times\exp(-0.5(x+\mu)^2)$ 的 (μ,y) 分岔图($k=1.3$) (b) $y=k(1-x^2)\times\exp(-(x+\mu)^2)$ 的 (μ,y) 分岔图($k=1.3$)

表1 分岔点的 μ 值表			
$k(1-x^2)\exp(-(x+\mu)^2)$		$k(1-x^2)\exp(-\frac{(x+\mu)^2}{2})$	
La1	-1.0580	Lb1	-1.3592
La2	-0.8550	Lb2	-0.9824
La3	-0.7700	Lb3	-0.8622
La4	-0.7491	Lb4	-0.8095
La5	-0.7415	Lb5	-0.8008
Ra1	0.7795	Rb1	1.0999
Ra2	-0.1727	Rb2	0.0667
Ra3	-0.2936	Rb3	0.1057
Ra4	-0.3155	Rb4	0.1416
Ra5	-0.3199	Rb5	0.1490

表1中的分岔点数值是在 $k=1.33$ 、初值 $x_0=0.1$ 的时候得到的.由于在分岔点附近振荡比较大,所以只给出了这些分岔点的 μ 值.通过这些数据可以得到结论:分岔点的分布基本上满足费根鲍姆比例常数.

4. 函数 $y = k(1 - x^2)\exp(-0.5(x + \mu)^2)$ 的迭代混沌过程分析

图4为当 $k=1.3$ 时(1)式的 (μ,y) 分岔图,可以看出它的混沌区域基本呈对称.这与它的Lyapunov指数曲线表达的信息是相同的.

另外,通过对图4的放大可以看出,中间混沌区域也是间隔出现的,只不过间隔区域逐渐缩小.

随着 k 值的增加,各种周期体现得比较明显,

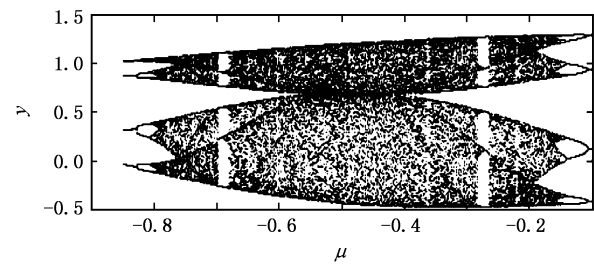


图4 $y=k(1-x^2)\exp(-0.5(x+\mu)^2)$ 的 (μ,y) 分岔图细节($k=1.3$)

例如当 $k=9$ 时(1)式的分岔图在-2到-1之间明显出现了一段很长的3周期(图5).

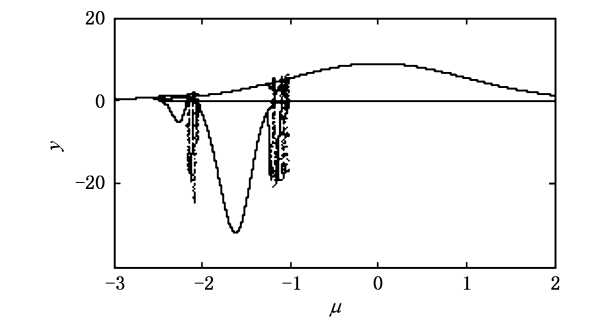


图5 出现3周期示意图

事实上,实验用的小波函数虽然是单峰的,但映射区间的端点 y 值不相等,所以有关单峰函数的定理在这里不适用.

图6是当 $k=1.3$, $\mu=-0.5$ 时 $y=k(1-x^2)\times\exp(-0.5(x+\mu)^2)$ 的映射轨迹, x 的初值为0.1, x 从0.1出发,到对应的 y 值绘制出一条线段,然后水平连接到 $y=x$ 直线上,向下作垂线与曲线相交,

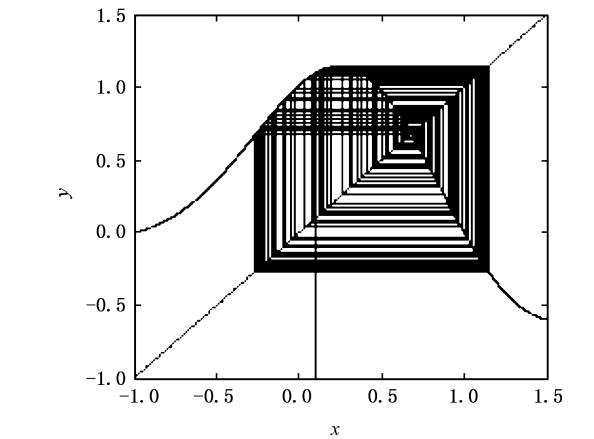


图6 $y=k(1-x^2)\exp(-0.5(x+\mu)^2)$ 映射轨迹 $k=1.3$, $\mu=-0.5$

再从这个交点作水平线回到直线 $y = x$, 如此继续下去. 从图 6 可以看出, 这个映射迭代既不发散也不收敛, 出现了混沌.

5. 小波函数离散为近似多项式后的迭代分岔图

为了更好地分析观察, 把小波函数中的指数函数近似离散为多项式函数后, 观察 (μ, y) 分岔图, 可

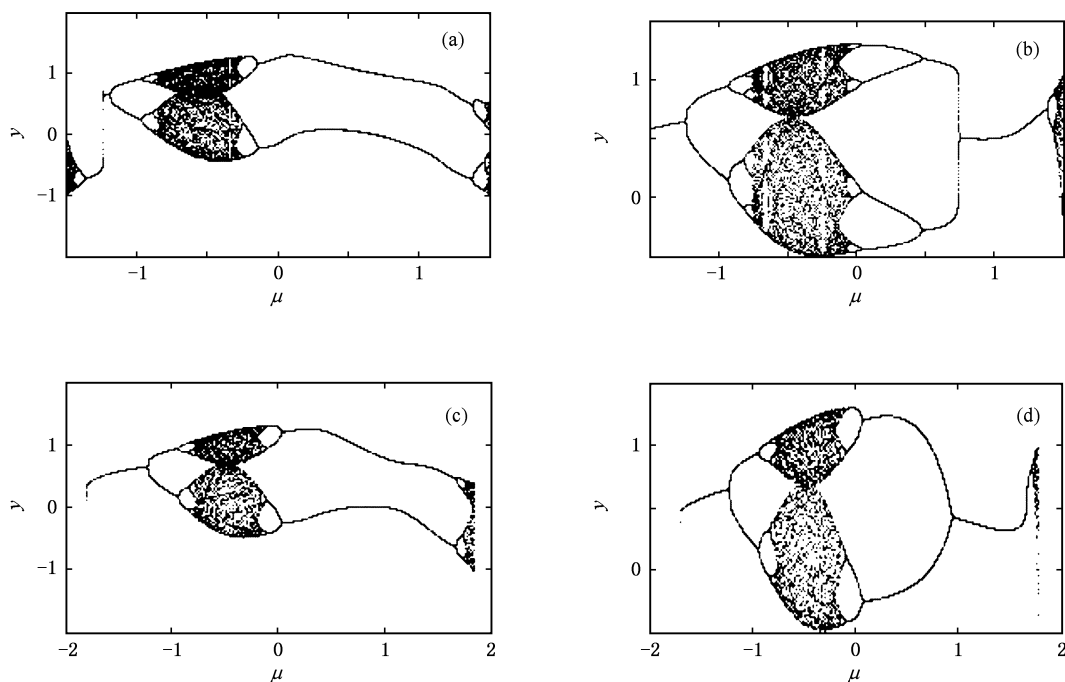


图 7 近似多项式 $y = k(1 - x^2) \sum_{n=0}^p \frac{(-0.5(x + \mu)^n)}{n!}$ 的 (μ, y) 分岔图 $k = 1.3$, 初值 $x_0 = 0.1$.

(a) $p = 1$ (b) $p = 2$ (c) $p = 3$ (d) $p = 4$

6. 结 论

小波函数有很多特点, 其指数参数分岔图也比较特别, 它从左到右先是一个周期分成 2 个、4 个... 然后逐渐进入混沌状态, 之后又随着指数参数 μ 的增加, 重新出现 2 的幂周期, 最后收敛到 4 个、2

以看到图 3(a) 的完整分岔图的一些中间演化过程, 也可以看出分岔图与多项式函数的一些关系.

在图 7 中迭代函数式分别是把指数函数进行泰勒展开后得到的近似多项式函数. 从图 7 可以看出, 随着项数的增加, 图像逐渐接近于图 3(a), 其中右端的开合很有特点, 这与奇数项、偶数项有关. 在分岔图的边缘处出现的类似费根鲍姆图的分岔, 随着近似多项式项数的增加而逐渐消失.

个、1 个周期点, 中间混沌部分结合得非常完整. 它的分岔形态也很特别, 是一种环形的分岔.

关于小波函数分岔研究还很多工作需要进行, 如对更多的小波函数进行实验寻找各种规律, 发现混沌产生与小波函数曲线形状的内在关系, 研究小于零的最大 Lyapunov 指数的分布与近似多项式函数的关系等.

- [1] Tan N, Xu J X, Yang H J *et al* 2003 *Acta Biophys. Sin.* **19** 395 (in Chinese) [谭 宁、徐健学、杨红军等 2003 生物物理学报 **19** 395]
- [2] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese) [戴 栋、马西奎、李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]
- [3] Lysetskiy M, Zurada J M 2004 *Neural Networks* **17** 225
- [4] Chen G R, Li C P 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 667
- [5] Ma S J, Xu W, Li W *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in

- Chinese) [马少娟、徐 伟、李 伟等 2005 物理学报 **54** 3508]
- [6] Chen G R, Fang J Q, Hong Y G *et al* 1999 *Acta Phys. Sin. (Overseas ed)* **8** 416
- [7] Sun Z C, Xu J X 2001 *Chin. Phys.* **10** 599
- [8] Li Y, Yang B J, Du L Z 2003 *Chin. Phys.* **12** 714
- [9] Ma W Q, Yang C H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1064 (in Chinese) [马文麒、杨承辉 2005 物理学报 **54** 1064]

The bifurcation diagram of a wavelet function^{*}

Yu Wan-Bo[†] Wei Xiao-Peng

(School of Mechanical Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Key Laboratory of Information Science and Engineering of Liaoning Province , Dalian University , Dalian 116622 , China)

(Received 23 November 2005 ; revised manuscript received 13 April 2006)

Abstract

The bifurcation diagram of a wavelet function is discussed in the paper. The chaotic property of the map is changed with the variations of the constant k . Its μ - γ diagram shows specially that there are bifurcations not only from period- 2^n to chaotic state but also from the chaotic state to period- 2^n when the parameter μ increases. The Lyapunov exponent diagram of the maps and one of the graphical iteration plot for the map are drawn. The wavelet function is also expanded with polynomial approximation in order to analyze the chaotic process.

Keywords : chaos , bifurcation , wavelet

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70572069 , 50275019).

[†] E-mail :yu_wb@126.com