

无反馈作用下混沌系统的振幅死亡^{*}

何文平^{1,2,5)} 封国林^{2,3)} 高新全³⁾ 李建平⁴⁾

1) 扬州大学物理科学与技术学院, 扬州 225002)

2) 中国科学院大气物理研究所东亚区域气候-环境重点实验室, 北京 100029)

3) 国家气候中心, 中国气象局气候研究开放实验室, 北京 100081)

4) 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

5) 兰州大学大气科学学院, 兰州 730000)

(2006 年 3 月 20 日收到, 2006 年 4 月 21 日收到修改稿)

考虑了一种无反馈的作用机理, 通过分析定常强迫作用下 Rössler 系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱, 发现定常强迫能够导致混沌系统产生振幅死亡. 这种现象的产生类似于耦合的极限环系统和耦合的 Rössler 系统, 弱定常强迫作用下的 Rössler 系统经由一个周期运动被驱动到系统自身的一个平衡点上. 进一步对受迫系统时间序列的研究表明, 当定常强迫强度超过一个临界值时, 系统的状态不断在小振幅周期运动与静止之间交替出现.

关键词: 振幅死亡, 定常强迫, Rössler 系统

PACC: 9260X

1. 引言

近年来, 振幅死亡已经成为一个研究的热点, 它在物理学、化学、生物学等不同的学科领域中得到了广泛的研究和应用^[1-16]. 振幅死亡经常出现在耦合的动力学系统中, 当耦合强度较小时, 这类系统可能会出现各自独立的演化、同步、锁相等现象^[17-21]. 随着耦合强度的增大, 系统就有可能出现振幅死亡. 振幅死亡是指系统间通过相互作用演化到一个平衡态, 并在耦合的作用下停止振荡, 即系统被稳定到一个零振幅状态^[12, 22].

振幅死亡已经先后在耦合的极限环振荡子和耦合的混沌系统中发现, 并相继在各种实验中观察到了这种现象. Matthews 等^[2]通过对一类由极限环振荡子组成的动力学系统的集体行为的研究, 描述了频率锁相、幅度死亡和共存, 揭示了此类系统能产生一些新的现象, 如周期和准周期运动、混沌等, 并解析地给出了这几种状态之间的相边界. 鉴于延迟耦合对产生振幅死亡的重要性, 而目前在这一领域的研究仅仅局限于将延迟时间取为离散的或常数, Atay^[6]考虑了满足一定分布的延迟耦合, 研究结果

表明这类延迟耦合能够扩大振幅死亡出现的参数空间, 并且能将出现振幅死亡的参数空间连接起来. 随后, Konishi^[7]研究了两个完全相同的极限环系统耦合时的动力学性质, 发现了振幅死亡, 并从理论上推导出振幅死亡出现的必要条件. Ozden 等^[9]报道了一例振幅死亡现象, 它是由一个非线性电子电路模型与一个生物模型在强耦合作用下的产物, 通过调整耦合的强度, 他们在耦合系统中观察到了同步、各自独立的变化及振幅死亡. Prasad^[10]描述了耦合的混沌系统的一般形式, 并采用 Lorenz 系统和 Rössler 系统构造了三个有代表性的耦合系统, 发现这三个系统均能产生振幅死亡. Reddy 等研究了经过时间延迟耦合的两个极限环系统, 发现即使两个系统具有完全相同的频率, 时间延迟耦合仍然能够导致振幅死亡的产生. 随后他们在耦合的非线性电路实验中观察到这一现象^[4, 23]. 几乎在同一时期, Herrero 等^[24]在两个线性耦合的光热振子实验中发现了幅度死亡. Zhai 等^[25]在两个没有时间延迟耦合的周期性电化学电路实验中观察到了这一现象, 并与数值模拟的结果一致. 此外, 在离散的耦合动力系统已经观察到这种现象^[16, 26].

最近的研究表明有三种不同的路线可以导致振

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40325015), 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: 2006CB400503)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: feng_gl@sina.com

幅死亡.在第一种路线中,系统经过一个鞍点-节点分叉出现振幅死亡现象^[14].另一类振幅死亡经由一个 Hopf 分叉可以得到.当耦合的振荡子彼此靠近各自的分叉点时,如果耦合系统中的单个振子之间有足够的差异或者耦合是时间延迟的,在耦合强度适中的一定范围内,系统的不稳定点将会通过一个 Hopf 分叉而被稳定下来^[25].第三类振幅死亡是由于耦合极限环系统的固有频率不一致所造成的.在这种情况下,耦合使得系统慢慢地被调整到某一个点上,其频率渐渐地趋于零^[27].

不同于上述所研究的耦合动力学系统,本文考虑了一种无反馈的作用机理,通过分析定常强迫作用下 Rössler 系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱,发现当定常强迫强度增大到一个临界值时,Rössler 系统能产生振幅死亡.但这种现象的产生是间接的,即系统的行为先由混沌转变为周期运动,而后随着强迫强度的不断变大最终被驱动至固定点.这种现象普遍存在于受定常强迫作用的混沌系统中.气候系统是一个典型的非线性强迫耗散系统^[28],具有各种复杂的层次结构,它不断的经受着各种外界强迫的作用,本工作对短期气候预测的理论研究具有一定的借鉴意义.

2. 定常强迫下的 Rössler 系统

根据相空间的简化与折叠的思想,1976 年 Rössler 在 Lorenz 系统^[29—35]的基础上设计了一个新的混沌方程组——Rössler 系统^[36],它是一个研究化学动力学的简单数学模型.考虑一个如下受定常强迫作用的 Rössler 系统:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(z + y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + \alpha(x - c) + A,\end{aligned}\tag{1}$$

在本文的研究中,参数 $a = b = 0.2$, c 为混沌参数,取为 5.0. A 作为对系统的一个驱动变量,为定常强迫的强度.

Rössler 系统的分岔图由图 1(a)给出,定常强迫强度 A 作为分岔参数.由分岔图可以发现,当定常强迫的强度增大到一个临界值后,在很大的参数范围内能观察到振幅死亡.图 1(a)表明,在 $A \in [0, 4.54]$ 的参数区域内, x 变量保持着剧烈的振荡,其振幅随着定常强迫强度的逐渐增大慢慢变小.当定常强迫的强度约增大到 4.54 后, x 变量随着定常强

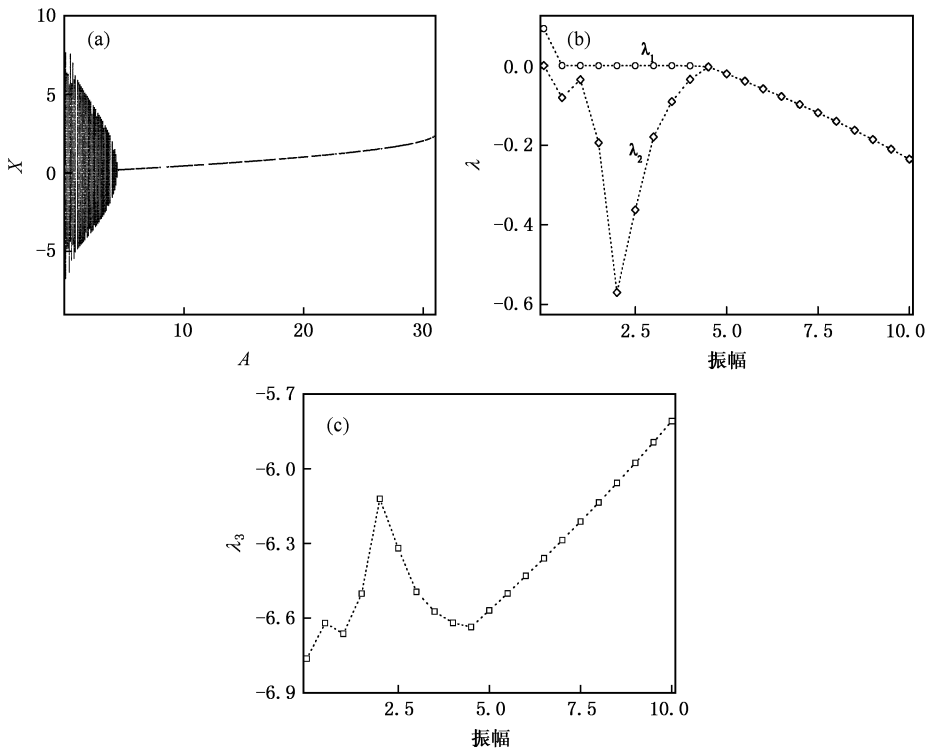


图 1 (a)定常强迫下 Rössler 系统的分岔图 (b)(c)系统的 Lyapunov 谱(圆环为 λ_1 ,菱形为 λ_2)

迫强度的变大转而缓慢的增加,但在此种情况下对于某个确定的定常强迫强度而言,系统在经历一个暂态后,将被稳定到一个固定点上,即受迫系统产生了振幅死亡现象. y, z 变量的分岔图类似于 x , 不同之处在于当定常强迫强度约超过 4.54 时, y 变量随着强迫强度 A 的增大而线性减小, z 变量的变化恰好与 y 变量相反,且二者关于 x 轴对称(图略).数值计算表明,当 A 大于 4.54 时,定常强迫下的 Rössler 系统将被稳定于其自身的一个平衡点 $E_1 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 + 4a(b+A)}}{2}, -\frac{c - \sqrt{c^2 + 4a(b+A)}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 + 4a(b+A)}}{2a} \right)$.

图 1(b) 和 (c) 提供了定常强迫作用下 Rössler 系统的 Lyapunov 指数谱.从图中可以清楚地看出,随着定常强迫强度的增加, Rössler 系统的最大非零 Lyapunov 指数 λ_1 很快由正值变负(A 约取为 0.3 时).这表明微弱的定常强迫作用使得 Rössler 系统迅速地由混沌状态转变为确定性运动.在不同的定常强迫强度下,系统的其他两个 Lyapunov 指数 λ_1 与 λ_2 一直小于零,而且在定常强迫强度 A 约增大到临界值 4.54 时,最大 Lyapunov 指数谱与次最大 Lyapunov 指数谱的曲线几乎完全重合,即 $\lambda_1 \approx \lambda_2$.这与 Prasad^[10]得到的结果一致.由系统分岔图的分析可知,此时系统产生了振幅死亡.由于在这种情况下系统的最大非零 Lyapunov 指数小于零,因此这种状态是稳定的.

为了获得对图 1 中所描述行为更详细的了解,我们给出了不同定常强迫强度下 Rössler 系统的相图及其相应变量的时间序列.图 2(a) 和 (b) 表明在一个微弱的定常强迫作用下,混沌系统被压缩成一个极限环,在经历一个暂态后最终由混沌状态转变为稳定的周期性运动.进一步增大定常强迫强度到另一个临界值 $A = 4.54$ 时,由图 2(c) 和 (d) 可知,系统的瞬时轨线盘旋地收缩到一个固定点 E_1 上,即定常强迫导致了振幅死亡的出现.

一个值得注意的现象是,当定常强迫强度大于临界值 $A = 4.54$ 时,在不同的强度作用下,虽然从系统变量的时间演化来看,系统已经逐步停止振荡,被压缩到一个固定点,但对其进一步研究表明,此时

系统的演化并没有完全停止,而是随着强迫强度的不同在周期运动与静止状态中交替出现.如图 2(d) 表明系统的变量渐渐稳定到固定点上,但图中放大的小图却说明此时系统仍然在固定点附近小振幅振荡;又如在 $A = 11.04372$ 时,图 2(e) 显示 Rössler 系统的 x, y, z 三个变量均静止不变,但当定常强迫强度稍微增大到 $A = 11.04374$ 时,系统又呈现出小振幅的周期运动,且其运动的中心在固定点 E_1 .由于这些运动过程中系统的最大非零 Lyapunov 指数为负,因此,系统的这种运动状态是稳定的,固定点 E_1 是一个稳定的不动点.

由此可见,在定常强迫的作用下 Rössler 系统能够产生振幅死亡.但当定常强迫施加在方程 (1) 的其他两个变量中的任何一个,无论定常强迫的强度多大,都不能够产生振幅死亡,其原因有待深入研究.

3. 结 论

本文考虑了一种无反馈的作用机理,通过分析定常强迫作用下 Rössler 系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱,发现定常强迫能够导致混沌系统产生振幅死亡.这表明在耦合的动力学系统中出现的现象也能够定常强迫的混沌系统中产生.很容易证明,振幅死亡在定常强迫的混沌系统中是一种十分普遍的现象.这种现象的产生类似于耦合的极限环系统^[4]和耦合的 Rössler 系统^[10],是一个间接的转变,即混沌系统在定常强迫的作用下先转变为周期运动,而后随着强迫强度的不断变大最终被稳定于受迫混沌系统自身的平衡点.

我们的研究表明,当定常强迫作用下的混沌系统产生振幅死亡时,系统的最大 Lyapunov 指数谱与次最大 Lyapunov 指数谱几乎完全重合,这与 Prasad^[10]在研究耦合的混沌系统时所得到的结果一致.进一步对受迫系统时间序列的研究表明,当定常强迫的强度超过一个临界值后,随着定常强迫强度的不同,系统的状态不断的在小振幅周期运动与静止之间交替出现.这种现象的机理不详,有待于深入研究.气候系统是一个复杂的非线性系统,它不断受到各种外界强迫的影响,本文的结果可能对短期气候预测的理论研究具有参考价值,值得进一步的探讨.

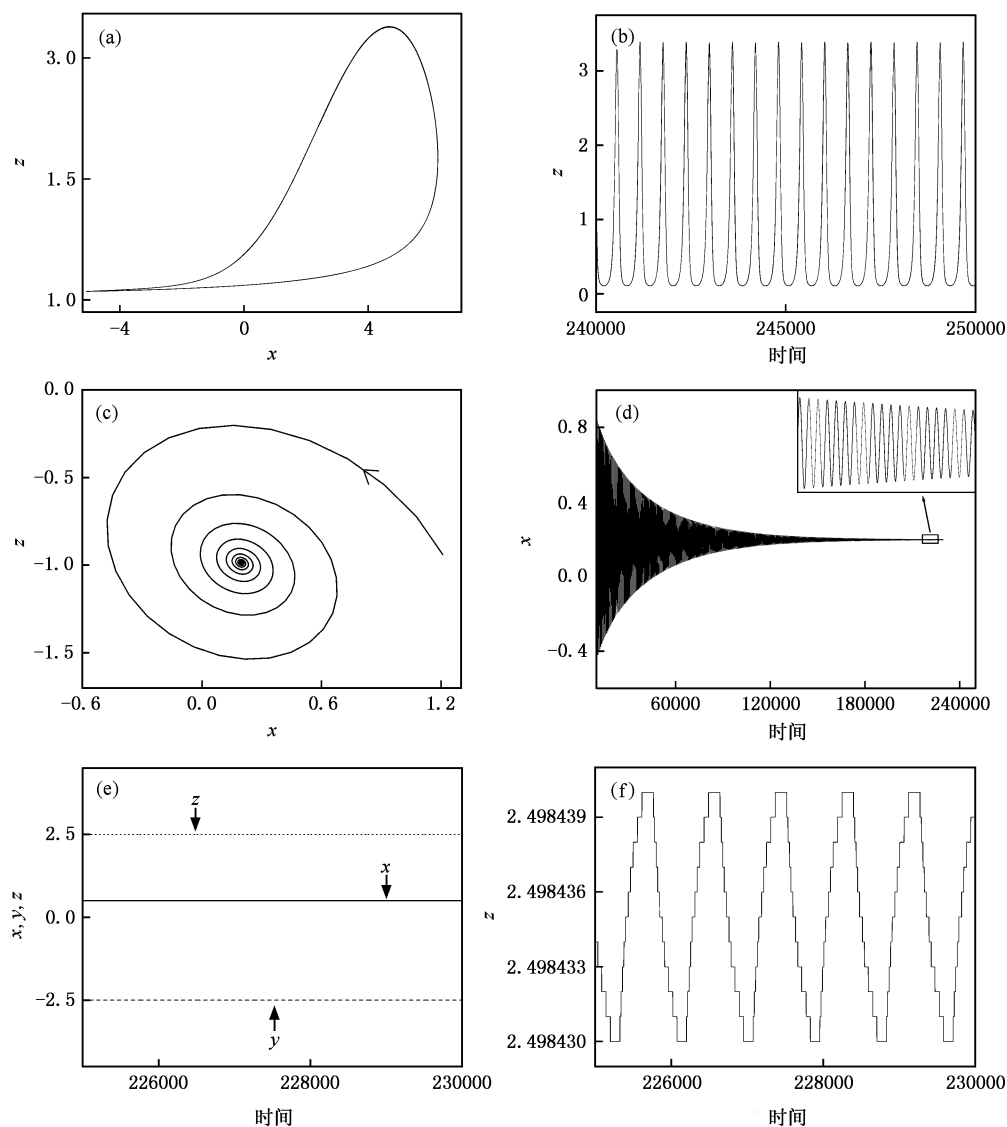


图2 (a)(b)分别为外强迫幅度 $A = 0.867$ 时, Rössler 系统的相图在 x - z 平面上的投影和 z 变量随时间的演化轨线 (c)(d)分别为 $A = 4.54$ 时, 系统的相图在 x - z 平面上的投影和 x 变量的时间序列 (e) $A = 11.04372$ 时, x , y , z 三个变量的演化轨线 (f) $A = 11.04374$ 时, z 变量随时间的演化

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Matthews P C, Strogatz S H 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1701
 [3] Ramakrishna R 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7294
 [4] Ramana Reddy D V, Sen A, Johnson G L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5109
 [5] Vadivasova T E, Sosnovtseva O V, Balanov A G, Astakhov V V 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4618
 [6] Atay F M 2003 *Phys. Rev. E* **91** 94101
 [7] Konishi K 2003 *Phys. Rev. E* **68** 67202
 [8] Konishi K 2004 *Phys. Rev. E* **70** 66201
 [9] Ozden I, Venkataramani S, Long M A, Connors B W, Nurmikko A V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 158102

[10] Prasad A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 56204
 [11] Liu W, Xiao J, Yang J 2005 *Phys. Rev. E* **72** 57201
 [12] Bar-Eli K 1984 *J. Phys. Chem.* **88** 6174
 [13] Bar-Eli K 1985 *Physica (Amsterdam)* **14D** 242
 [14] Crowley M F, Epstein I R 1989 *J. Phys. Chem.* **93** 2496
 [15] Ghosh A K, Chance B, Pye E K 1971 *Arch. Biochem. Biophys.* **145** 319
 [16] Bahiana M, Massunaga M S O 1995 *Phys. Rev. E* **52** 321
 [17] Wang P, Dai X G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4961 (in Chinese) [汪萍、戴新刚 2005 物理学报 **54** 4961]
 [18] Shi N 2005 *Chin. Phys.* **14** 844

- [19] Yuan G Y , Yang S P , Wang G R , Chen S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1510 (in Chinese) [袁国勇、杨世平、王光瑞、陈式刚 2005 物理学报 **54** 1510]
- [20] Ning D , Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 (in Chinese) [宁娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [21] Liu Y Z , Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 (in Chinese) [刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035]
- [22] Yamaguchi Y , Shimizu H 1984 *Physica (Amsterdam)* **11D** 212
- [23] Ramana Reddy D V , Sen A , Johnson G L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3381
- [24] Herrero R , Figueras M , Rius J , Pi F , Orriols G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5312
- [25] Zhai Y , Kiss I Z , Hudson J L 2004 *Phys. Rev. E* **69** 26208
- [26] Konishi K 2003 *Phys. Rev. E* **67** 17201
- [27] Ermentrout G B , Kopell N 1990 *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math.* **50** 125
- [28] Zhang W , Gao X Q , Dong W J , Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2657 (in Chinese) [张 文、高新全、董文杰、李建平 2006 物理学报 **55** 2657]
- [29] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [30] Feng G L , Dai X G , Wang A H , Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [31] Feng G L , Dong W J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2347 (in Chinese) [封国林、董文杰 2003 物理学报 **52** 2347]
- [32] He W P , Feng G L , Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 969 (in Chinese) [何文平、封国林、李建平 2006 物理学报 **55** 969]
- [33] He W P , Feng G L , Gao X Q , Chou J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3175 (in Chinese) [何文平、封国林、高新全、丑纪范 2006 物理学报 **55** 3175]
- [34] Dai X G , Fu C B , Wang P 2005 *Chin. Phys.* **14** 850
- [35] Gao X Q , Zhang W 2005 *Chin. Phys.* **14** 2370
- [36] Rössler O 1976 *Phys. Lett.* **57** A 397

Amplitude death in non-feedback coupled chaotic system^{*}

He Wen-Ping^{1 2 3)} Feng Guo-Lin^{2 3)†} Gao Xin-Quan³⁾ Li Jian-Ping⁴⁾

¹ *Department of Physics , Yangzhou University , Yangzhou 225002 , China)*

² *Key Laboratory of Regional Climate-Environment for Temperate East Asia , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China)*

³ *Laboratory for Climate Studies , National Climate Center , China Meteorological Administration , Beijing 100081 , China)*

⁴ *State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics (LASG) , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China)*

⁵ *Department of Atmospheric Sciences , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China)*

(Received 20 March 2006 ; revised manuscript received 21 April 2006)

Abstract

Considering a non-feedback mechanism of action , the present paper shows that the steady forcing induces amplitude death in chaotic system by investigating the bifurcation figures and the spectrum of Lyapunov exponents of the Rössler oscillator. The manner , which is very similar to that in coupled limit cycles or coupled Rössler system , is from periodic to an equilibrium point of the forced system. Furthermore , we investigate the time series of the forced system , and find that when the strength of the forcing is beyond a critical constant , the states of the system present the periodic dynamics with a small amplitude or rest alternately.

Keywords : amplitude death , steady forcing , Rössler system

PACC : 9260X

^{*} Project supported by the National Natural Sciences Foundation of China (Grant No. 40325015) , and the National Key Program Development for Basic Research (Grant No. 2006CB400503).

[†] E-mail : feng_gl@sina.com