第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1851-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.4, April, 2007

一类非线性系统高阶奇点焦点量的递推计算*

陈松林† 年亚东

(安徽工业大学数理学院,马鞍山 243002)

(2006 年 8 月 23 日收到;2006 年 11 月 13 日收到修改稿)

讨论了一类具高阶奇点的高次非线性系统,得到了计算焦点量的递推方程,其中的待求量满足线性方程,且线性地依赖已求得的各量,从而降低了计算难度和计算量.作为一个简单应用,讨论了一类五次多项式系统的中心与焦点判别问题并举例仿真.

关键词:中心与焦点,焦点量,递推方程,稳定性

PACC:0260,0290,0420J,1110J

1. 引 言

考虑如下的平面系统:

$$\dot{x}=-y(y^2-x^2F(x,y)),$$
$$\dot{y}=x(x^2+2y^2+y^2F(x,y)),$$

其中 $F(x,y)$ 在原点(0,0)的某邻域内解析,$\partial F\geqslant 1$,且满足 $F(0,0)=0$.该系统的奇点(0,0)或为焦点或为中心,这就构成了中心焦点判定问题,关系到系统的稳定性与渐近稳定性判定[1—9].这类问题与Hilbert 16 问题有着密切的联系,一直是常微分方程动力系统及稳定性理论的中心研究课题之一,其主要困难在于各阶焦点量的计算.基于 Poincaré 和 Lyapunov 的经典研究,常用的方法有后继函数法和形式级数判别法,随着焦点阶数的增加,焦点量的计算变得十分复杂.有很多学者[3—6]研究确定焦点阶数和求焦点量的简洁方法,例如:应用于广义 Lienárd 方程的 Cherkas 方法、应用于低阶奇点(如多项式 Poincaré 方程的中心焦点判别问题)的形式积分因子法、建立计算焦点量的递推公式法等,而对于具高阶奇点的高次非线性系统的讨论并不多见.本文运用文献[4,6]的思想,借助于方程的首次积分概念,得到了系统焦点量计算的递推方程,其中的待求量满足线性方程,且线性地依赖已求得的各量,从而降低了计算难度.作为应用,讨论了一类五次多项式系统的中心与焦点判别问题并举例仿真.

2. 主要结果

考虑如下类型的高次非线性系统:

$$\dot{x}=-y(y^2-x^2F(x,y)),$$
$$\dot{y}=x(x^2+2y^2+y^2F(x,y)). \tag{1}$$

做极坐标变换

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta,$$

则原系统的轨线方程成为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}\sin\theta[r+rF(r\cos\theta,r\sin\theta)]$$
$$\equiv R(\theta,r).$$

构造初值问题

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R(\theta,r)=\sum_{i=1}^{\infty}R_i(\theta)r^i,$$
$$r(0)=c. \tag{2}$$

记初值问题的解为

$$r(\theta,c)=\sum_{i=1}^{\infty}r_i(\theta)c^i. \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式得

$$\sum_{i=1}^{\infty}r_i'(\theta)c^i=\sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k(\theta)\left(\sum_{i=1}^{\infty}r_i(\theta)c^i\right)^k\right).$$

比较上式两边 c^i 的系数后可得

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta}=R_1(\theta)r_1(\theta),$$
$$r(0)=1; \tag{4}$$

* 安徽省教育厅科研基金(批准号:2003KJ054)资助的课题.

† E-mail:slchen@ahut.edu.cn

$$\frac{\mathrm{d}r_k}{\mathrm{d}\theta} = Q_k(R_1,R_2,\cdots,R_k,r_1,r_2,\cdots,r_{k-1}) + R_1(\theta)r_k, \tag{5}$$
$$r_k(0) = 0.$$

此为变系数线性常微分方程初值问题,进行逐次求解得 $r_1,r_2,\cdots$,于是便得线段 $0<c<c_0,\theta=0$ 上的 Poincaré 映射

$$r(2\pi,c) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(2\pi)c^i.$$

根据 Poincaré 和 Lyapunov 的经典理论,第一个非零的 $r_k(2\pi)(k>1)$ 的下标必为奇数.若对一切的 k,$r_{2k+1}(2\pi)=0$,则 O 为中心;若对首个 k,$r_{2k+1}(2\pi)\neq 0$,则 O 为 k 阶细焦点,同时 $r_{2k+1}(2\pi)$ 为 k 阶细焦点的焦点量.

注意到初值问题(5)式的非齐次项 $Q_k(R_1,R_2,\cdots,R_k,r_1,r_2,\cdots,r_{k-1})$ 非线性地依赖于已求得的 $r_1,r_2,\cdots,r_{k-1}$,且随着 k 的增加 Q_k 中的项数增加较快,如

$$\begin{aligned} &Q_2(R_1,R_2,r_1)\\ &= r_1^2R_2,\\ &Q_3(R_1,R_2,R_3,r_1,r_2)\\ &= 2r_1r_2R_2 + r_1^3R_3,\\ &Q_4(R_1,R_2,R_3,R_4,r_1,r_2,r_3)\\ &= (2r_1r_3 + r_2^2)R_2 + 3r_1^2r_2R_3 + r_1^4R_4. \end{aligned}$$

下面将运用文献[4,6]的思想构造一种快速算法,使非齐次项 $Q_k(R_1,R_2,\cdots,R_k,r_1,r_2,\cdots,r_{k-1})$ 线性地依赖于已求得的 $r_1,r_2,\cdots,r_{k-1}$.

对于(3)式,设

$$c = \varphi(\theta,r) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(\theta)r^i, \tag{6}$$

则有 $\varphi_1(0)=1,\varphi_k(0)=0(k\geqslant 2)$,且有以下定理.

定理 关于(6)式中的 $\varphi_n(\theta)$,有下列递推方程:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\theta) &= R_1(\theta)\varphi_1(\theta),\\ \varphi_n'(\theta) &= -\sum_{k=1}^{n-1}kR_{n-k+1}\varphi_k(\theta)\\ &\quad + nR_1(\theta)\varphi_n(\theta) \qquad (n\geqslant 2), \end{aligned} \tag{7}$$

且 $\varphi_m(2\pi)$ 可作为焦点量的等价刻画.

证明 记

$$(r_1c + r_2c^2 + \cdots)^k = \sum_{n=k}^{\infty}P_n^{(k)}(r_1,\cdots,r_{n-k+1})c^n,$$

则显然有

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(r_1,r_2,\cdots,r_n) &= r_n,\\ P_n^{(n)}(r_1) &= r_1^n,\\ P_n^{(k)}(r_1,0,\cdots,0) &= 0 \qquad (k\geqslant n+1). \end{aligned} \tag{8}$$

将(3)式代入(6)式得

$$\begin{aligned} c &= \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\theta)\left(\sum_{m=1}^{\infty}r_mc^m\right)^k\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}P_m^k(r_1,r_2,\cdots,r_{m-k+1})\varphi_k(\theta)\right)c^m. \end{aligned}$$

比较上式两边 c^i 的系数可得

$$r_1(\theta)\varphi_1(\theta) = 1,$$
$$\sum_{k=1}^{m}P_m^k(r_1,r_2,\cdots,r_{m-k+1})\varphi_k(\theta) = 0 \quad (m>1).$$

所以有

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\theta)r_m(\theta) + \varphi_m(\theta)r_1^m(\theta)\\ &+ \sum_{k=2}^{m-1}P_m^k(r_1,r_2,\cdots,r_{m-k+1})\varphi_k(\theta) = 0 \qquad (m\geqslant 2). \end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned} \varphi_1(2\pi)r_2(2\pi) + \varphi_2(2\pi)r_1^2(2\pi) &= 0,\\ r_2(2\pi) &= 0, \end{aligned}$$

便得到

$$\varphi_2(2\pi) = 0.$$

同理,由(8)式可以得到下列等价关系:

$$\begin{aligned} r_2(2\pi) = r_3(2\pi) = \cdots = r_n(2\pi) = 0 &\Leftrightarrow \varphi_2(2\pi)\\ = \varphi_3(2\pi) = \cdots = \varphi_n(2\pi) &= 0. \end{aligned}$$

此外,由

$$r_2(2\pi) = \cdots = r_m(2\pi) = 0,$$

可以得出

$$\begin{aligned} r_{m+1}(2\pi) &= -\frac{r_1^m(2\pi)}{\varphi_1(2\pi)}\varphi_{m+1}(2\pi)\\ &= -r_1^{m+1}(2\pi)\varphi_{m+1}(2\pi). \end{aligned} \tag{9}$$

这说明 $\varphi_n(2\pi)$ 可作为焦点量的等价刻画.

另一方面,由于 $\varphi(\theta,r)$ 是(2)式中的首次积分,故有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + R(\theta,r)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0.$$

这样便有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_n(\theta)r^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty}n\varphi_n(\theta)r^{n-1}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}R_m(\theta)r^m\right) = 0.$$

比较上式两边 r^n 的系数,便得结论.

我们注意到定理中的递推方程是线性微分方程,其中的非齐次项线性地依赖于已求得的 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$,且项数关于 n 只呈线性增长.

3. 一类五次系统的奇点分析

作为定理的应用，我们考虑五次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(y^2 - x^2F(x,y)),\\ \dot{y} &= x(x^2 + 2y^2 + y^2F(x,y)).\end{aligned} \tag{10}$$

这里，不失一般性，可设

$$F(x,y) = a_1x + b_1y + a_2x^2 + b_2y^2.$$

此时在极坐标系

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta,\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

下，方程(10)变换为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3,$$

其中

$$R_1(\theta) = \frac{1}{2}\sin2\theta,$$

$$R_2(\theta) = \frac{1}{2}\sin2\theta(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta),$$

$$R_3(\theta) = \frac{1}{2}\sin2\theta(a_2^2\cos^2\theta + b_2^2\sin^2\theta).$$

根据递推公式(7)可得关于焦点量的等价量 φ_k 满足如下线性方程：

$$\begin{aligned}\varphi_1'(\theta) &= R_1\varphi_1,\\ \varphi_2'(\theta) &= 2R_1\varphi_2 - R_2\varphi_1,\\ \varphi_3'(\theta) &= 3R_1\varphi_3 - 2R_2\varphi_2 - R_3\varphi_1,\\ \varphi_4'(\theta) &= 4R_1\varphi_4 - 3R_2\varphi_3 - 2R_3\varphi_2,\\ \varphi_5'(\theta) &= 5R_1\varphi_5 - 4R_2\varphi_4 - 3R_3\varphi_3,\\ &\cdots\end{aligned} \tag{11}$$

结合初始条件

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= 1,\\ \varphi_k(0) &= 0 \qquad (k \geqslant 2),\end{aligned} \tag{12}$$

便可以通过计算得到前几个主焦点量.

我们取定 $F(x,y)$ 中的 $a_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = 3, b_2 = 4$ 进行仿真.按照上述方法，运用 Mathematica 软件对初值问题(11)，(12)式中的前五个变量进行数值求解，再画出 $\varphi_3(\theta)$ 和 $\varphi_5(\theta)$ 的图像分别如图 1 和图 2 所示.

依次计算 $\varphi_3(2\pi)$ 和 $\varphi_5(2\pi)$，得

$$\varphi_3(2\pi) = 0,$$

$$\varphi_5(2\pi) = 0.307187.$$

由于 $\varphi_3(2\pi) = 0, \varphi_5(2\pi) \neq 0$，于是根据文中的结论得知奇点为二阶细焦点，且其焦点量为 -0.307187.

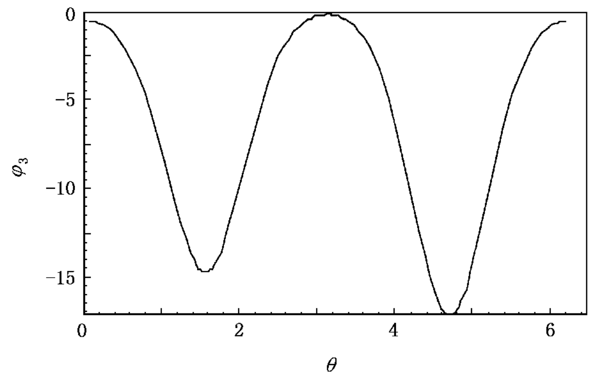

图 1　$\varphi_3(\theta)$ 的图像

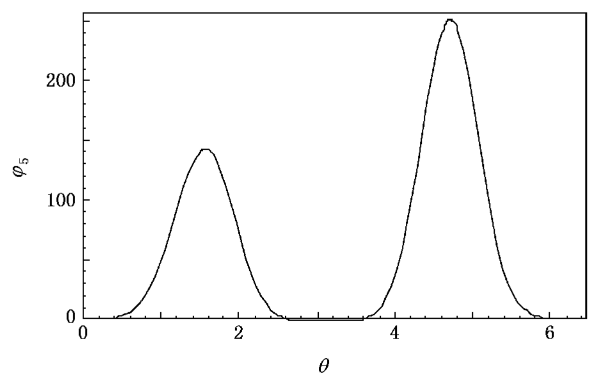

图 2　$\varphi_5(\theta)$ 的图像

另一方面，通过画出系统的相图(图 3)可以看出，奇点(0,0)确实是焦点，但焦点的阶数未知.因此，上述仿真例子验证了本文方法的正确性及有效性.

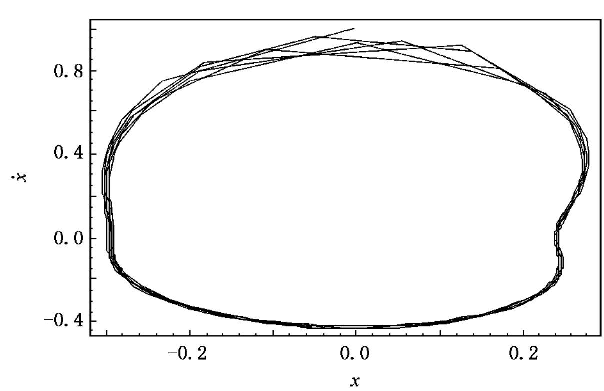

图 3　系统(10)的相图

4. 结　　论

本文针对一类高次非线性系统给出了计算焦点

量的递推公式,其中的待求量满足线性方程,且线性地依赖已求得的各量,从而降低了计算难度和计算量,推广了文献[4,6]的结果.由于本文中高次系统本身的复杂性,使所得的线性方程(11)是变系数的,更精细的结论有待于做进一步的分析.

[1] Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z *et al* 1985 *Quality Theory for Differential Equations* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [张芷芬、丁同仁、黄文灶等 1985 微分方程定性理论 (北京 科学出版社)]

[2] Luo D J, Zhang X, Dong M F 2001 *Quality and Bifurcation Theory for Dynamic Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗定军、张　祥、董梅芳 2001 动力系统的定性与分支理论(北京:科学出版社)]

[3] Liu Y R 2001 *Sci. China* A **31** 37 (in Chinese) [刘一戎 2001 中国科学 A **31** 37]

[4] Du N L, Zeng X W 1994 *Chin. Sci. Bullet.* **39** 1742 (in Chinese) [杜乃林、曾宪武 1994 科学通报 **39** 1742]

[5] Lloyd N G, Pearson J M 1992 *J. Compt. Appl. Math.* **40** 323

[6] Yue X S 2005 *Adv. Math.* **34** 101 (in Chinese) [岳喜顺 2005 数学进展 **34** 101]

[7] Chen S L, Zhu Z C 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 181

[8] Chen S L, Hou W G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1842 (in Chinese) [陈松林、侯为根 2001 物理学报 **50** 1842]

[9] Xie Y, Chen L Q, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese) [薛　纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029]

Recursive calculation of higher order focus values for a class of nonlinear systems *

Chen Song-Lin† Nian Ya-Dong

(*School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Maanshan* 243002, *China*)

(Received 23 August 2006; revised manuscript received 13 November 2006)

Abstract

A class of higher power nonlinear systems with higher order singular point are discussed in the paper. A series recursive equations for the calculation of focus value are obtained. An application on power-5 system are given and the concrete simulation verifies the theory.

Keywords: center and focus, focus value, recursive equations, stability

PACC: 0260, 0290, 0420J, 1110J

* Project supported by the Scientific Research Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. 2003KJ054).

† E-mail: slchen@ahut.edu.cn