

# 光束分数傅里叶变换几何特性的相空间束矩阵分析方法<sup>\*</sup>

陈宝信<sup>1)</sup> 李 明<sup>1)</sup> 张爱菊<sup>2)</sup>

1) 浙江科技学院应用物理系, 杭州 310023)

2) 浙江科技学院图书馆, 杭州 310023)

(2006 年 12 月 25 日收到; 2007 年 2 月 1 日收到修改稿)

提出一种分析傍轴光束分数傅里叶变换几何特性的相空间束矩阵变换的简单方法。以分析椭圆高斯光束分数傅里叶变换几何特性为例, 研究表明 利用本方法讨论傍轴束分数傅里叶变换的几何特性简单可靠、从几何图像理解傍轴束分数傅里叶变换清晰直观。为研究光束传输变换的特性提供了一种简单方便的新途径。

关键词: 相空间束矩阵, 分数傅里叶变换, 椭圆高斯光束

PACC: 4210, 4230K

## 1. 引 言

近年来, 由于分数傅里叶变换<sup>[1]</sup>及有尺度因子分数傅里叶变换<sup>[2]</sup>在信息处理<sup>[3-4]</sup>、光束整形<sup>[5]</sup>和分析<sup>[6]</sup>等方面的优势, 对分数傅里叶变换的性质、光学实现和应用进行了广泛的研究, 分数傅里叶变换已成为光学、信息处理领域的一个研究热点。

对傍轴光束分数傅里叶变换的研究, 一般采用张量光学、衍射积分<sup>[7-10]</sup>和 Wigner 分布函数法<sup>[11,12]</sup>, 但作者还未见用相空间束矩阵变换方法分析光束分数傅里叶变换的研究报道。本文基于频率域和空间域组成的相空间域, 利用哈密顿相空间表象理论构建了光束传输变换的相空间束矩阵变换理论, 研究傍轴光束经过分数阶傅里叶变换光学系统传输变换的几何特性。以傍轴椭圆高斯光束为例, 讨论了椭圆高斯光束分数傅里叶变换的几何特性。与上述几种方法相比, 本文方法物理图像清晰、数学运算简单、结果可靠有效, 可应用于一般傍轴光束分数傅里叶变换几何特性的研究。

## 2. 光束传输变换的相空间表象

光束具有波动性和统计性。从波动性看, 对于

Gaussian 光束, 若它在起始截面上的振幅及波面已知, 则从理论上每条衍射光线的轨迹及其远场的指向就确定了。而对于任意傍轴光束, 给定起始截面上的振幅和波面分布, 得到它的每条衍射光线的轨迹显然不容易。同时由于任何实验结果均是统计结果, 在这种情况下了解光束的统计传输行为比了解单一衍射光线的传输行为具有更为重要的意义。光束的传输和变换属于经典物理范畴, 不涉及光的量子性质, 因此每条衍射光线类似于经典统计中的粒子运动, 其轨迹可由正则坐标和正则动量确定的相空间分量给出。每条衍射光线在相空间都有唯一的相点与之对应, 衍射光束则对应于相空间相点所围的相体积。因此, 从统计性看, 光束的传输变换实际上体现为相空间体积大小和取向的变化。本文将利用哈密顿光学相空间表象, 讨论傍轴光束的相空间统计传输行为, 并分析光束的分数傅里叶变换几何特性。以下讨论均假定光束是线偏振、单色并在无失调元件的一阶光学系统中传输的傍轴光束, 同时为了分析简便, 仅讨论标量傍轴光束, 以光束传输轴作为  $z$  轴。

### 2.1. 光束相空间

相空间是指用广义坐标所表示的空间。由哈密

\* 浙江省教育厅科研基金(批准号 20061470) 和浙江省自然科学基金(批准号 Y605359) 资助的课题。

† E-mail: chen\_bao\_xin@yahoo.com.cn

顿光学理论可知,广义坐标是由光线的位置坐标  $x$  和动量  $x'$ ( 表示光线运动方向或称为发散角 ) 组成的. 因此, 在相空间中只要知道光线所在的位置  $x$  和它的动量  $x'$ , 这条光线的坐标和指向就确定了. 如果光线的运动有  $s$  个自由度, 描述这条光线运动状态的坐标有  $2s$  个, 由此组成的相空间是  $2s$  维空间. 对我们感兴趣的光线的横向运动, 即与光轴垂直方向的运动, 采用四维相空间( $x, y, x', y'$ )就够了. 如果光线在两个横向平面内的运动是独立的, 只需二维相空间( $x, x'$  和  $y, y'$ ) 来描述.

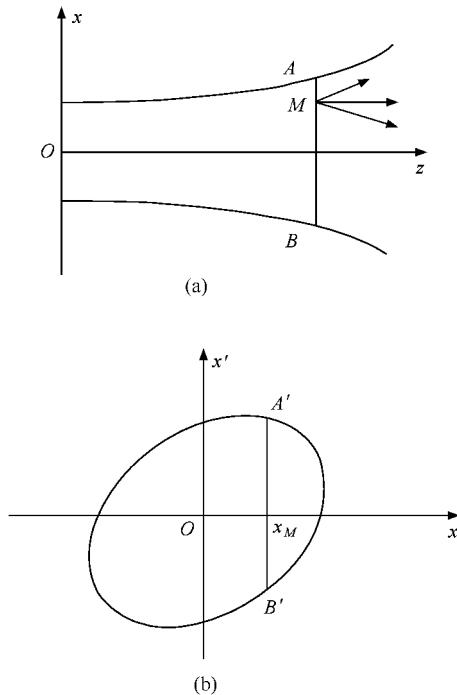


图 1 光束传输的描述 (a) 实空间, (b) 相空间

不失一般性, 我们用一维光束来说明实空间( $x, z$ ) 和相空间( $x, x'$ ) 的不同. 图 1 表示传输中的光束, 其中(a)为实空间, (b)为相空间. 在图 1(a) 中, 如果在任意  $z$  处光束截面上取一点  $M$ , 就有许多光线的轨迹在此相交. 显然, 在实空间中确定所有过点  $M$  的光线的坐标和指向是不可能的, 但在相空间中很容易确定过  $M$  点的所有光线的坐标和指向. 在图 1(b) 中, 取  $x = x_M$ , 并过此点作与轴线  $x'$  的平行线, 则点  $A'$  就表示发散角最大的光线, 点  $B'$  表示发散角最小的光线. 这样, 过点  $M$  的所有光线就落在点  $A'$  和  $B'$  之间了. 任意  $z$  处光束截面上的所有光线就对应于相空间一个区域, 该相域的大小和取向, 就完全给出了光束在该截面上( 实空间 ) 的几何统计行为.

## 2.2. 光束传输变换的相空间表象理论

对于一维傍轴光束, 在二维相空间( $x, x'$ )表象中, 每条光线坐标和指向由相空间坐标  $x, x' = dx/dz$  表征, 相域是椭圆, 边界方程为<sup>[13, 14]</sup>

$$X\sigma^{-1}X^T = 1, \quad (1)$$

式中  $X = [x \ x']$  为相平面光束矢量,  $T$  为转置符号,  $\sigma$  为相平面光束矩阵.

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xx'} \\ \sigma_{xx'} & \sigma_{x'x'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_x^2 & \frac{\omega_x^2}{R_x} \\ \frac{\omega_x^2}{R_x} & \left(\frac{\lambda}{\pi\omega_x}\right)^2 + \frac{\omega_x^2}{R_x} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

且有

$$\det\sigma = \sigma_{xx}\sigma_{x'x'} - \sigma_{xx'}^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2. \quad (3)$$

(2)(3) 式同时也给出了相空间束矩阵元素与光束参数的对应关系, 其中  $\lambda$  为光束波长,  $\omega_x$  为束宽,  $R_x$  为波面曲率半径.

在相空间表象中,  $\sqrt{\sigma_{xx}}$  和  $\sqrt{\sigma_{x'x'}}$  分别为光束的宽度  $\omega_x$  和远场发散角  $\theta_x$ ,  $\sigma_{xx'}/\sigma_{xx}$  为光束波面曲率半径  $R_x$ . 当  $\sigma_{xx'} > 0$  ( 即  $R_x > 0$  ) 时, 光束在实空间是发散的; 当  $\sigma_{xx'} < 0$  ( 即  $R_x < 0$  ) 时, 光束在实空间是会聚的, 相椭圆均为斜椭圆. 当  $\sigma_{xx'} = 0$  ( 即  $R_x \rightarrow \infty$  ) 时, 光束宽度最大或最小( 波前为平面 ), 即束腰, 相椭圆为正椭圆. 相空间( $x, x'$ ) 中的相椭圆的大小和取向给出了光束的几何统计信息( 束宽、远场发散角是相椭圆分别在  $x$  轴和  $x'$  轴的投影 ) 和敛散特性. 因此, 若求出光束相空间束矩阵, 光束在实空间的几何统计信息也就确定了.

一般而言, 对于二维傍轴光束在四维相空间( $x, y, x', y'$ )表象中, 每条光线坐标和指向由相空间坐标  $x, y, x', y' = dx/dz, dy/dz$  表征. 相域是四维超椭球, 其边界方程为

$$[X \ X']\sigma^{-1}[X \ X']^T = 1, \quad (4)$$

式中  $[X \ X'] = [x \ y \ x' \ y']$  为相空间光束矢量,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

且

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx'} & \sigma_{xy'} \\ \sigma_{yx'} & \sigma_{yy'} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\sigma}_3 &= \begin{bmatrix} \sigma_{x'x} & \sigma_{x'y} \\ \sigma_{y'x} & \sigma_{y'y} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\sigma}_4 &= \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \quad (6)\end{aligned}$$

为相空间光束矩阵,满足  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_2^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_4 = \boldsymbol{\sigma}_4^T$ ,其中  $\boldsymbol{\sigma}_1$  是束宽矩阵,  $\boldsymbol{\sigma}_4$  是远场发散角矩阵,  $\boldsymbol{\sigma}_2$  是耦合矩阵。对于准直简单像散、轴对称或旋转对称光束,  $\sqrt{\sigma_{xx}}$  和  $\sqrt{\sigma_{yy}}$  分别为光束在两个横向的宽度  $\omega_x$  和  $\omega_y$ , 对应相空间( $x, y, x', y'$ )中相超椭球在  $x$  和  $y$  轴上的投影;  $\sqrt{\sigma_{x'x'}}$  和  $\sqrt{\sigma_{y'y'}}$  分别为光束在两个横向的远场发散角  $\theta_x$  和  $\theta_y$ , 对应相空间( $x, y, x', y'$ )中相超椭球在  $x'$  和  $y'$  轴上的投影。

光束在无失调元件的一阶系统中传输时,描述光束统计行为的相空间束矩阵满足

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = S\boldsymbol{\sigma}_1 S^T, \quad (7)$$

式中  $\boldsymbol{\sigma}_1$  和  $\boldsymbol{\sigma}_2$  分别为光束在入射面和出射面的  $4 \times 4$  相空间束矩阵,  $S$  为一阶光学系统的  $4 \times 4$  光线传输矩阵。(7)式的物理意义如下:光束通过传输系统  $S$  的几何统计行为,在相空间( $x, y, x', y'$ )表象中表现为由相超椭球  $\boldsymbol{\sigma}_1$  转变为相超椭球  $\boldsymbol{\sigma}_2$ 。显然,相超椭球体积守恒(满足经典 Liouville 定理)。对于给定的傍轴光束,若已知光学系统的光线传输矩阵,出射束的束参数(束宽、远场发散角等)就确定了。因此(7)式给出了光束经一阶光学系统传输时的几何统计行为。

### 3. 光束分数傅里叶变换的几何特性

基于傍轴光束传输变换的相空间表象,就可直接讨论光束的分数阶傅里叶变换。分数阶傅里叶变换等效于相空间的旋转<sup>[15]</sup>,即  $p$  阶分数傅里叶变换对应相空间旋转一角度  $\varphi$ ,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \times p. \quad (8)$$

由以上讨论容易得到光束分数傅里叶变换的几何特性。一般情况下,相超椭球的主轴坐标系与相空间坐标系不重合(在相空间是一偏心超椭球)。对于准直简单像散、轴对称或旋转对称的傍轴束,相超椭球的主轴坐标系与相空间坐标系是重合的,把相空间顺时针旋转角度  $\varphi$ ,就得到光束分数阶傅里叶变换

的图像。特殊地,当  $\varphi = \pi/2$ ,由(8)式可知,对应分数阶傅里叶变换阶数  $p = 1$  时为传统的傅里叶变换。进一步,由相超椭球的对称性,当  $\varphi = 0, \pi$ ,即对应分数阶傅里叶变换阶数  $p = 0, 2$  时,得到恒等的相超椭球。因此,光束束宽和远场发散角及敛散特性随分数阶傅里叶变换阶数周期性变化,其周期对应分数阶傅里叶变换阶数为 2。另外,在旋转过程中相超椭球体积不变,而光束传输因子  $M^2$  是光束相超椭球与对应理想束(高斯束)相超椭球的体积比<sup>[16]</sup>,所以光束传输因子  $M^2$  与分数阶傅里叶变换阶数  $p$  无关。光束分数阶傅里叶变换的这些基本特性<sup>[7-12]</sup>,是相空间束矩阵变换理论的直接推论。

### 4. 应用

为简单起见,以分析基模椭圆高斯光束分数阶傅里叶变换面上的变换特性来定量说明本方法的应用。实现相空间旋转角度  $\varphi$  的光学系统有如图 2 所示的两个光学系统,图 2 中  $f_1$  为常数,  $R = \tan \frac{\varphi}{2}$ ,  $Q = \sin \varphi$ ,  $P_1$  为输入面,  $P_2$  为输出面。

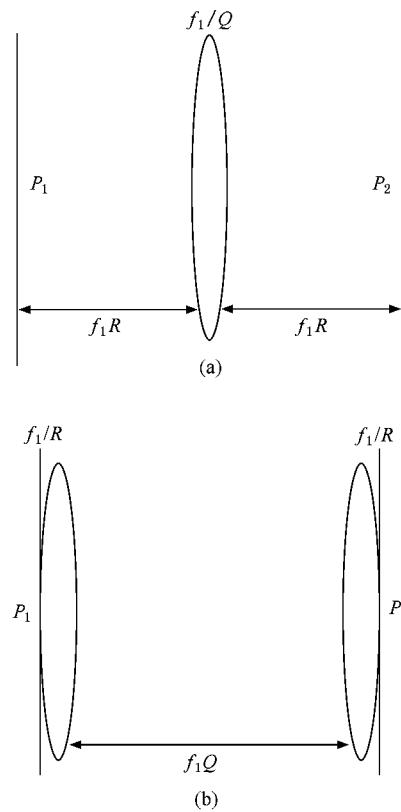


图 2 实现分数阶傅里叶变换的光学系统 (a)单透镜系统,(b)双透镜系统

对于二维傍轴椭圆高斯光束,  $x$  和  $y$  方向上的传输行为是互相独立的。首先考虑  $x$  方向的变换, 光束在输入面  $P_1$  处对应的相平面( $x, x'$ )束矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_{1xx} & \sigma_{1xx'} \\ \sigma_{1x'x} & \sigma_{1x'x'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_{1x}^2 & \frac{\omega_{1x}^2}{R_{1x}} \\ \frac{\omega_{1x}^2}{R_{1x}} & \theta_{1x}^2 \end{bmatrix}. \quad (9)\end{aligned}$$

经传输矩阵为

$$\begin{aligned}S &= \begin{bmatrix} 1 - RQ & 2f_1 R - f_1 R^2 Q \\ -f_1^{-1} Q & 1 - RQ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) & f_1 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ -f_1^{-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

的图 2 所示的光学系统后, 光束在输出面  $P_2$  处对应的相平面( $x, x'$ )束矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_{2xx} & \sigma_{2xx'} \\ \sigma_{2x'x} & \sigma_{2x'x'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_{2x}^2 & \frac{\omega_{2x}^2}{R_{2x}} \\ \frac{\omega_{2x}^2}{R_{2x}} & \theta_{2x}^2 \end{bmatrix}. \quad (10)\end{aligned}$$

利用(7)式, 在输出面  $P_2$  处对应的光束相平面束矩阵元素, 即光束束宽、远场发散角和波面曲率半径分别为

$$\begin{aligned}\sigma_{2xx} &= \omega_{2x}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{1xx} + f_1^2 \sigma_{1x'x'}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sigma_{1xx} - f_1^2 \sigma_{1x'x'}) \cos p\pi \\ &\quad + f_1 \sigma_{1xx} \sin p\pi, \quad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2x'x'} &= \theta_{2x}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{1x'x'} + f_1^{-2} \sigma_{1xx}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sigma_{1x'x'} - f_1^{-2} \sigma_{1xx}) \cos p\pi \\ &\quad - f_1^{-1} \sigma_{1xx} \sin p\pi, \quad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2xx'} &= \frac{\omega_{2x}^2}{R_{2x}} \\ &= \frac{1}{2} (f_1 \sigma_{1x'x'} - f_1^{-1} \sigma_{1xx}) \sin p\pi \\ &\quad + \sigma_{1xx} \cos p\pi. \quad (13)\end{aligned}$$

从(11)–(13)式可以看出, 在分数傅里叶变换面  $P_2$  上光束束宽、远场发散角和波面曲率半径随分数傅里叶变换阶数周期性变化, 它们的周期对应分数傅里叶变换阶数  $p = 2$ 。

如果输入面  $P_1$  是光束束腰位置, 即  $\sigma_{1xx'} = 0$ , 由(3)式得

$$\sigma_{1x'x'} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 \sigma_{1xx}}.$$

(11)–(13)式可简化为

$$\begin{aligned}\sigma_{2xx} &= \omega_{2x}^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{f_1^2}{z_{1x}^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{f_1^2}{z_{1x}^2} \right) \cos p\pi \right] \\ &\quad \times \sigma_{1xx}, \quad (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2x'x'} &= \theta_{2x}^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_{1x}^2} + \frac{1}{f_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_{1x}^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \cos p\pi \right] \\ &\quad \times \sigma_{1xx}, \quad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2xx'} &= \frac{\omega_{2x}^2}{R_{2x}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{f_1}{z_{1x}^2} - \frac{1}{f_1} \right) \sigma_{1xx} \sin p\pi, \quad (16)\end{aligned}$$

式中  $z_{1x} = \pi \sigma_{1xx} / \lambda$  为椭圆高斯光束在输入面  $P_1$  上  $x$  方向的瑞利长度。

由(14)式可知, 在  $z_{1x} > f_1$  的条件下, 当  $p = 2k + 1$  ( $k$  为整数) 时, 输出面  $P_2$  上光束束宽达到最小值  $\sigma_{2xx} = f_1^2 \sigma_{1xx} / z_{1x}^2$ 。当  $p = 2k$  时, 输出面  $P_2$  上光束束宽达到最大值  $\sigma_{2xx} = \sigma_{1xx}$ 。在  $z_{1x} < f_1$  的条件下, 当  $p = 2k$  时, 输出面  $P_2$  上光束束宽达到最小值  $\sigma_{2xx} = \sigma_{1xx}$ 。当  $p = 2k + 1$  时, 输出面  $P_2$  上光束束宽达到最大值  $\sigma_{2xx} = f_1^2 \sigma_{1xx} / z_{1x}^2$ 。考虑到(16)式, 当光束束宽为最大值或最小值时, 在输出面  $P_2$  上光束波前都是平面(对应的相椭圆都是正椭圆), 即在输出面  $P_2$  光束是束腰。

由(15)式可知, 在  $z_{1x} > f_1$  的条件下, 当  $p = 2k + 1$  ( $k$  为整数) 时, 输出面  $P_2$  上光束远场发散角达到最大值  $\sigma_{2x'x'} = \sigma_{1xx} / f_1^2$ 。当  $p = 2k$  时, 输出面  $P_2$  上光束远场发散角达到最小值  $\sigma_{2x'x'} = \sigma_{1xx} / z_{1x}^2$ 。在  $z_{1x} < f_1$  的条件下, 当  $p = 2k$  时, 输出面  $P_2$  上光束远场发散角达到最大值  $\sigma_{2x'x'} = \sigma_{1xx} / z_{1x}^2$ 。当  $p = 2k + 1$  时, 输出面  $P_2$  上光束远场发散角达到最小值  $\sigma_{2x'x'} = \sigma_{1xx} / f_1^2$ 。显然, 当光束远场发散角为最大值或最小值时, 在输出面  $P_2$  上光束波前也是平面。

同理,光束在输出面  $P_2$  上  $y$  方向对应的相平面( $x, x'$ )束矩阵元素,即光束束宽、远场发散角和波面曲率半径分别为

$$\begin{aligned}\sigma_{2yy} &= \omega_{2y}^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{f_1^2}{z_{1y}^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{f_1^2}{z_{1y}^2} \right) \cos p\pi \right] \\ &\quad \times \sigma_{1yy},\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2yy'} &= \theta_{2y}^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_{1y}^2} + \frac{1}{f_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_{1y}^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \cos p\pi \right] \\ &\quad \times \sigma_{1yy},\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2yy'} &= \frac{\omega_{2y}^2}{R_{2y}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{f_1}{z_{1y}^2} - \frac{1}{f_1} \right) \sigma_{1yy} \sin p\pi,\end{aligned}\quad (19)$$

式中  $z_{1y} = \pi\sigma_{1yy}/\lambda$  为椭圆高斯光束在输入面  $P_1$  上  $y$  方向的瑞利长度。输出面  $P_2$  上  $y$  方向光束束宽、远场发散角和波面曲率半径随分数阶傅里叶变换阶数  $p$ 、常数  $f_1$  和瑞利长度  $z_{1y}$  的变化规律可由(17)–(19)式得出。

由以上分析可知,椭圆高斯光束在分数阶傅里叶变换面  $P_2$  上光束束宽、远场发散角和波面曲率半径不仅与分数傅里叶变换阶数有关,而且还与光束的瑞利长度和常数  $f_1$  有关。由(14)和(17)式、(15)和(18)式得到分数傅里叶变换面上束宽、远场发散角相等处  $p$  的表达式分别为

$$p = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{f_1^2 - z_{1x}z_{1y}}{f_1^2 + z_{1x}z_{1y}} \right), \quad (20)$$

$$p = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{z_{1x}z_{1y} - f_1^2}{f_1^2 + z_{1x}z_{1y}} \right). \quad (21)$$

由(14)–(17)式可得到输出面  $P_2$  上椭圆高斯光束束宽对不同阶数  $p$  的变化曲线如图3所示。图3中的光束参数为  $\omega_{1x} = \sqrt{\sigma_{1xx}} = 1.0 \text{ mm}$ ,  $\omega_{1y} = \sqrt{\sigma_{1yy}} = 1.5 \text{ mm}$ ,  $\lambda f_1 = 1$ , 此时, 瑞利长度分别为  $z_{1x} = \pi\sigma_{1xx}/\lambda = 3.14f_1 > f_1$ ,  $z_{1y} = \pi\sigma_{1yy}/\lambda = 7.07f_1 > f_1$ 。从图3可以看出,光束在  $x$  方向和  $y$  方向的束宽随分数傅里叶变换阶数  $p$  周期性变化,周期为2。当  $p = 0$  或  $p = 2$  时,光束束宽最大,其值分别为  $\omega_{2x} = \sqrt{\sigma_{2xx}} = 1.0 \text{ mm}$ ,  $\omega_{2y} = \sqrt{\sigma_{2yy}} = 1.5 \text{ mm}$ ;当  $p = 1$  时,光束束宽最小,其值分别为  $\omega_{2x} = \sqrt{\sigma_{2xx}} = 0.32 \text{ mm}$ ,  $\omega_{2y} = \sqrt{\sigma_{2yy}} = 0.21 \text{ mm}$ ;当  $p = 0.87$  时,光束束宽相

等,即  $\omega_{2x} = \sqrt{\sigma_{2xx}} = \omega_{2y} = \sqrt{\sigma_{2yy}} = 0.37 \text{ mm}$ 。

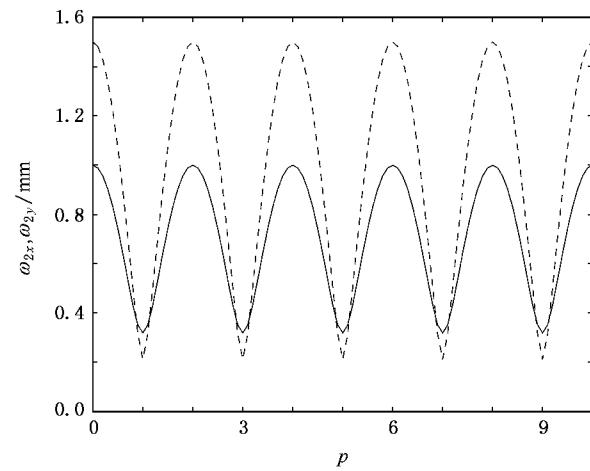


图3 束宽随阶数  $p$  变化曲线 实线为  $x$  方向的束宽  $\omega_{2x}$ , 短划线为  $y$  方向的束宽  $\omega_{2y}$

由(15)–(18)式可得到输出面  $P_2$  上椭圆高斯光束远场发散角对不同阶数  $p$  的变化曲线如图4所示。图4中的光束参数与图3相同。从图4可以看出,光束在  $x$  方向和  $y$  方向的远场发散角随分数傅里叶变换阶数  $p$  周期性变化,周期为2。当  $p = 1$  或  $p = 3$  时,光束远场发散角最大,其值分别为  $\theta_{2x} = \sqrt{\sigma_{2x'x'}} = 1.0 \text{ rad}$ ,  $\theta_{2y} = \sqrt{\sigma_{2y'y'}} = 1.5 \text{ rad}$ ;当  $p = 2$  时,光束远场发散角最小,其值分别为  $\theta_{2x} = \sqrt{\sigma_{2x'x'}} = 0.32 \text{ rad}$ ,  $\theta_{2y} = \sqrt{\sigma_{2y'y'}} = 0.21 \text{ rad}$ ;当  $p = 0.13$  时,光束远场发散角相等,即  $\theta_{2x} = \sqrt{\sigma_{2x'x'}} = \theta_{2y} = \sqrt{\sigma_{2y'y'}} = 0.37 \text{ rad}$ 。数值计算结果与理论分析一致。

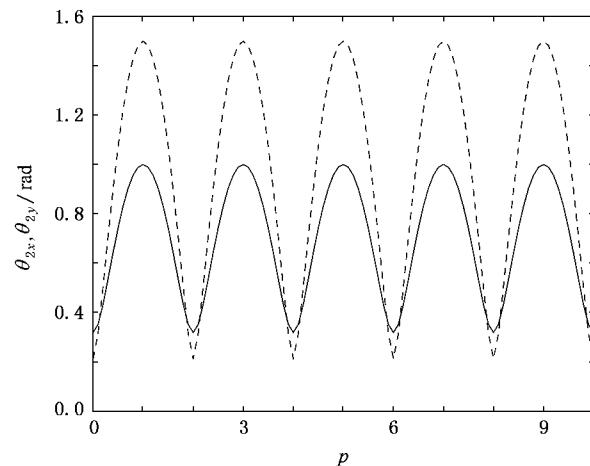


图4 远场发散角随阶数  $p$  变化曲线 实线为  $x$  方向的远场发散角  $\theta_{2x}$ , 短划线为  $y$  方向的远场发散角  $\theta_{2y}$

另外,当输入面  $P_1$  是光束束腰位置时,由(16)(19)式可知除束宽取最大值或最小值的变换外,在分数阶傅里叶变换面  $P_2$  对应方向上光束不是束腰,光束相域是斜椭圆,但相椭圆面积相等,即椭圆高斯光束的传输因子  $M^2$  与分数傅里叶变换阶数  $p$  无关.

## 5. 结 论

本文研究结果与其他方法研究的结果完全一致.

显然,本文提出的相空间束矩阵分析方法不仅物理意义清楚、物理图像直观,而且数学运算简单、避免了冗长的积分运算,能讨论傍轴光束在分数阶傅里叶变换面上束宽、远场发散角和收敛性、传输因子  $M^2$  随分数傅里叶变换阶数的变换特性,结果可靠有效. 这为研究光束的传输变换特性提供了一种简单方便的新途径. 对傍轴光束有尺度因子的分数傅里叶变换的几何特性也可运用本方法分析,得到光束在输出面的束宽、远场发散角和收敛性随尺度因子和变换阶数的变化规律,这里不再赘述.

- 
- [1] Namias V 1973 *J. Inst. Math. Appl.* **25** 241
  - [2] Hua J, Liu L, Li G 1997 *Appl. Opt.* **36** 8490
  - [3] Pei S C, Yeh M H, Luo T L 1999 *IEEE Trans. Signal Proces.* **47** 2883
  - [4] Shinde S, Gadre V M 2001 *IEEE Trans. Signal Proces.* **49** 2545
  - [5] Zhang Y, Dong B, Gu B, Yang G 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 1114
  - [6] Xue X, Wei H Q, Kirk A G 2001 *Opt. Lett.* **26** 1746
  - [7] Cai Y J, Lin Q 2003 *Opt. Commun.* **217** 7
  - [8] Hiroyuki Y, Toshiaki I 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 3388
  - [9] Cai Y J, Lin Q 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1528
  - [10] Cai Y J, Lin Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1025
  - [11] Wu P, Lü B D, Chen T L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 658 [ in Chinese ] 吴平、吕百达、陈天禄 2005 物理学报 **54** 658 ]
  - [12] Wu P, Lü B D, Chen T L 2005 *Chin. Phys.* **14** 1130
  - [13] Fu S N 1989 *Chin. J. Nucl. Phys.* **11** 79
  - [14] Chen B X, Sun B H 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1254
  - [15] Lohmann A W 1993 *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 2181
  - [16] Chen B X 2006 *Chin. Opt. Lett.* **4** 255

# Phase space beam matrix method for evaluating geometrical aspect of fractional Fourier transform of light beams<sup>\*</sup>

Chen Bao-Xin<sup>1)†</sup> Li Ming<sup>1)</sup> Zhang Ai-Ju<sup>2)</sup>

1) Department of Applied Physics, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China

2) Library, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China

(Received 25 December 2006; revised manuscript received 1 February 2007)

## Abstract

In this paper, a simple technique to determine the geometrical properties of fractional Fourier transform of paraxial beams based on the phase space beam transformation matrix is presented. Taking the elliptic Gaussian beam as an example, we have compared our analysis technique with that of previous work and found that the present method is more reliable in predicting the geometrical properties of fractional Fourier transform of beams and has the advantage of clear intuitive physical insight into beam propagation and transformation process from a geometrical viewpoint. This technique provides a simple and convenient way to study propagation and transformation properties of light beams in a novel approach.

**Keywords** : phase space beam matrix, fractional Fourier transform, elliptic Gaussian beam

**PACC** : 4210, 4230K

\* Project supported by the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Zhejiang Province, China (Grant No. 20061470) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y605359).

† E-mail: chen\_bao\_xin@yahoo.com.cn