

# 双组分混合流体中 Eckhaus 不稳定 调谐的行波对流<sup>\*</sup>

李国栋<sup>1)</sup> 黄永念<sup>2)</sup>

1) 西安理工大学水利水电学院, 西安 710048)

2) 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871)

(2007 年 2 月 6 日收到 2007 年 3 月 21 日收到修改稿)

在双组分混合流体的 Rayleigh-Bénard 对流系统中, 数值模拟获得了周期性时空位错缺陷调谐的扩展行进波对流状态。研究了该状态的时空演化特性。结果表明, Eckhaus 不稳定触发的对流涡卷对的产生是调谐的起源, 对流涡卷在边界处生成与淹没频率的不同, 又使系统返回不稳定区域, 系统在稳定与不稳定的波数之间振荡。还探讨了一个周期内传热与混合特性的改变及其控制参数的变化规律。

关键词: 双组分混合流体, 行波对流, 时空位错缺陷, Eckhaus 不稳定调谐

PACC: 4754, 4720, 4725Q, 4735

## 1. 引言

各种非平衡非线性系统中的时空演化现象, 是近年来科学的研究热点问题之一<sup>[1-4]</sup>。其中双组分混合流体(如水和乙醇或<sup>3</sup>He 和<sup>4</sup>He)的 Rayleigh-Bénard 对流是充分验证并普遍接受的研究稳定性、分岔、复杂时空形态和湍流的非平衡非线性系统。这主要是因为该系统试验简单易于控制, 另一方面描述系统的精确方程是已知的, 便于理论分析。实验揭示该系统蕴含非常丰富的时空斑图动力学行为。最有趣的现象是发生在初始临界不稳定点附近的复杂时空依存的行进波对流状态, 比如传播方向随时间改变的摆动(undulation)行进波<sup>[5]</sup>、对流振幅随时变化的闪动(blinking)行进波<sup>[6,7]</sup>、对流的传播甚至可能处于混沌的状态<sup>[8]</sup>。行进波对流状态可能是充满整个对流空腔的<sup>[9]</sup>, 也可能只发生在对流空腔的局部范围内<sup>[10,11]</sup>, 而其余区域仍然维持无对流的热传导状态。前者称为扩展行波对流(extended traveling-wave convection), 后者称为局部化行波对流(localized traveling-wave convection)。就研究方法而言, 早期主要以实验研究和理论分析为主, 近年来,

数值模拟已成为重要的研究手段。借助数值模拟得到详尽的流场信息, 已成功地解释了局部化对流稳定的成因<sup>[12,13]</sup>, 阐明了闪动行进波的起源<sup>[14]</sup>, 初步明确了浓度场在对流成长动力学中的作用<sup>[15]</sup>。也发现了一些新的对流形态, 如对流孤子(convectons)<sup>[16]</sup>, 这是一种新的局部化对流现象, 对流区域与非对流区域稳定共存, 不过对流区域内的对流涡卷是不传播的, 该现象还有待于试验的证实。本文数值模拟得到了一种空间扩展的对流状态, 伴随着时空位错缺陷事件的发生, 这种状态呈周期性变化。研究了该状态的时空特性, 探讨了不稳定的起源。

## 2. 系统与数学模型

一层双组分的混合流体封闭在完全传热且不可穿透的两块相距为  $d$  的水平板之间, 形成对流空腔且置于垂直均匀重力场  $g$  中。上下平板分别保持恒定的温度  $T_{\text{top}}$  和  $T_{\text{bot}}$ , 温差  $\Delta T = T_{\text{bot}} - T_{\text{top}}$ , 平均温度  $\bar{T} = (T_{\text{top}} + T_{\text{bot}})/2$ 。等温状态下, 双组分均匀混合, 平均浓度是  $\bar{C}$ 。有温差存在时, 垂直方向的温度梯度会诱导出一个垂直方向的浓度梯度, 称之为 Soert

\* 教育部留学回国人员科研启动基金(批准号 2004527)和国家重点基础研究专项基金(批准号 G20000773)资助的课题。

† E-mail: gdli2002@pkuaa.edu.cn

效应。对于水和乙醇混合物，该浓度梯度与温度梯度反向，上层的浓度大于下层的浓度，浓度梯度有稳定流层的作用，系统从热传导状态向对流状态的分岔转变是亚临界型的。

该系统涉及的流体参数有流体密度  $\rho$ 、热膨胀系数  $\alpha$ 、体积膨胀系数  $\beta$ 、运动黏性系数  $\nu$ 、热扩散系数  $\kappa$  和溶质扩散系数  $D$ 。在 Boussinesq 假设下，除了在浮力项中考虑密度随温度和浓度的线性变化外，流体力学方程的其他项中视密度为常数。如果长度用空腔的高度  $d$ ，时间用垂直热扩散时间  $t_v = d^2/k$ ，速度场用  $k/d$ ，压力用  $\rho k^2/d^2$  进行约化，则描述系统质量守恒、动量守恒、能量守恒和组分守恒的无量纲流体力学方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + R\alpha[\delta T + \delta C] \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta T = \nabla^2 \delta T, \quad (3)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \eta = L \nabla (\delta C - \phi \delta T). \quad (4)$$

这里

$$\mathbf{u} = (u, w)$$

是  $(x, z)$  坐标系下的速度场；

$$\delta T = (T - \bar{T})/\Delta T$$

是被空腔上下板间温差  $\Delta T$  所约化的温度  $T$  与平均温度  $\bar{T}$  的偏移量；

$$\delta C = \frac{C - \bar{C}}{\alpha \kappa \beta \Delta T}$$

是被  $(\alpha \kappa \beta \Delta T)$  约化的浓度  $C$  与平均浓度  $\bar{C}$  的偏移量，无量纲流体参数是 Prandtl 数

$$\sigma = \nu/k;$$

Lewis 数

$$L = D/k;$$

分离比

$$\psi = -S_r \bar{C}(1 - \bar{C}) \beta / \alpha,$$

其中  $S_r$  是 Soret 系数，分离比是表征温度梯度与浓度梯度耦合 Soert 效应强度的参数；Rayleigh 数

$$R = \alpha g d^3 \Delta T / (\nu \kappa)$$

是系统的控制参数，度量作用在系统上的温度应力。对于单组分流体，Rayleigh-Bénard 对流系统初始不稳定的临界 Rayleigh 数是  $R_c^0 = 1708$ ，所以一般采用约化 Rayleigh 数

$$r = R/R_c^0$$

作为控制参数。

计算区域的长高比  $\Gamma = 14$ ，上下板和侧壁处应用速度无滑移，完全热传导和不可穿透边界条件，即在  $z = 0, 1$  处  $u = 0, \delta T = \pm 1/2, -L\partial_z(\delta C - \phi \delta T) = 0$ ；在  $x = 0, \Gamma$  处  $u = 0, \partial_x \delta T = 0, -L\partial_x(\delta C - \phi \delta T) = 0$ 。无量纲参数取  $\sigma = 10, L = 0.01, \phi = -0.25$ ，这相当于平均温度  $\bar{T} = 20$ ，乙醇质量浓度 4.4% 试验系统的参数<sup>[17]</sup>。

### 3. 含缺陷行进波的时空演化

对流发生的临界 Rayleigh 数  $r = 1.365$ 。在给定微小振幅初值下，首先观测到的是左传行进波与右传行进波叠加形成的驻波图谱。当对流振幅增加到一定值时，在非线性的作用下左传行进波退化，对流形成只有右传行进波的状态，且对流集中发生在对流空腔的左半区域，也就是局部化行波对流<sup>[13]</sup>。局部化行波对流只是在亚临界区域内稳定，所以在临界点附近和超临界区域内，对流最终向右扩展形成充满整个对流空腔的扩展对流状态。图 1 是  $r = 1.48$  时行波对流的时空演化图，曲线表示某一时刻对流空腔中心高度位置温度的空间分布，可见其成调谐状，与 Rayleigh-Bénard 对流的涡卷形态对应。图 1 中

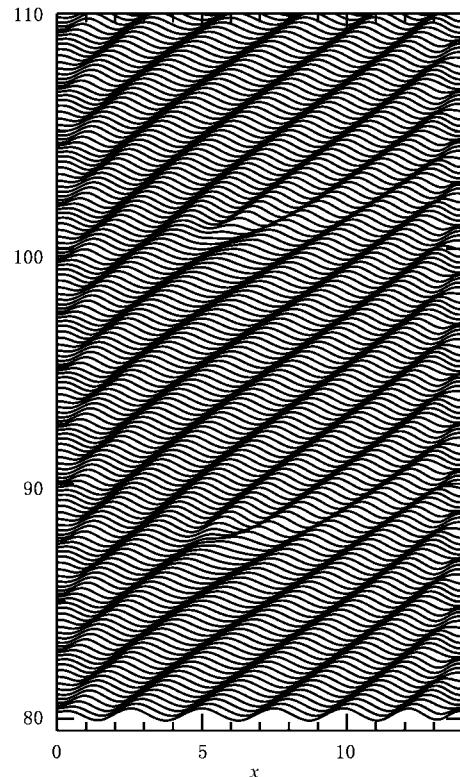


图 1 对流行波周期性的时空演化  $r = 1.48$

的纵轴为时间  $t$ ,两条曲线间的时间间隔为 0.2 个时间单位. 我们获得的扩展示行波对流状态不是时空完全均匀的,而是呈周期性改变. 对于  $r = 1.48$ , 该周期  $P = 13$ , 每一个周期内对应于一次时空位错缺陷事件的发生.

图 2 是对流流场结构在时空位错事件前后的变化规律, 封闭曲线表示对流涡卷内的流线. 由图 2 清晰可见: 对流涡卷在左侧壁处不断生成, 传播到左侧壁后消失. 其中一个对流涡卷在行进的过程中波长逐渐增大, 最后一分为二, 并在其间生成新的对流涡卷, 整个过程对应于一对涡卷的产生.

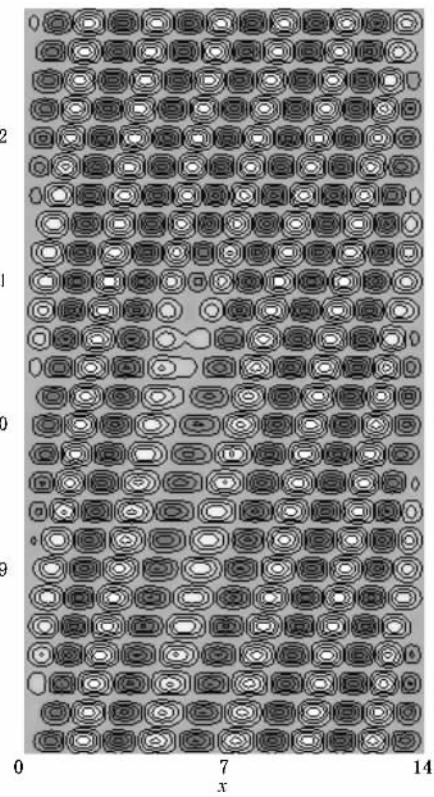


图 2 不同时刻的对流结构 每块均表示相应时刻的空间流线谱, 向上时间间隔  $\Delta t = 0.2$

一个周期内缺陷发生位置处波长的变化规律如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 时空位错事件前波数达到最小值  $k = 1.904$ , 对应于最大的波长  $\lambda = 3.3$ . 缺陷处波数发生跳跃增至最大值  $k = 4.488$ , 对应于波长  $\lambda = 1.4$ , 随后波数又不断减小. 图 4 给出了若干典型时刻波数的空间分布. 从图 4 可见: 远离缺陷发生的时刻, 波数呈两端大中间小的分布形态. 左端行波第一个完整对流涡卷的波数是  $k = \pi$ , 波长  $\lambda = 2$ , 向右波数逐渐减小, 在缺陷发生位置附

近达到最小, 随后波数增大, 在右端处再次达到  $k = \pi$ . 时空位错事件后的一定时段内, 则是中间波数最大.

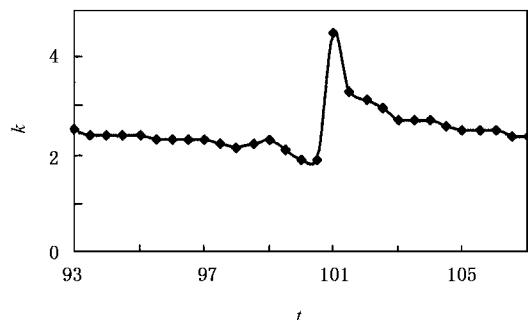


图 3 缺陷发生位置处波数随时间的演化  $r = 1.48$

#### 4. 不稳定的起源

Eckhaus 最早在研究超临界系统的分岔时发现, 对于长波调谐, 空间结构稳定波数的带宽要比线性稳定性分析得到的带宽窄许多<sup>[18]</sup>. 对于无限系统, 不稳定增长率在波数  $k = 0$  时最大, 对于有限长度  $\Gamma$  的系统, 最低波数  $k = 2\pi/\Gamma$  是最不稳定的. 就这样 Eckhaus 不稳定触发一个结构波长的产生或消失, 从而使系统回到稳定的波数带宽内. 在亚临界的混合流体行波对流系统中, 试验也观测到了 Eckhaus 不稳定<sup>[19]</sup>. 从图 2 可以看出, 涡卷最少时只有  $n_{\min} = 5.5$  对, 对应于平均波数  $\bar{k}_{\min} = 2\pi n_{\min}/\Gamma = 2.468$ , 远小于稳定波数带的中心值  $k_E \approx \pi$ . 所以系统处于波数-Rayleigh 数空间( $k, r$ )上的不稳定区域, 新涡卷对产生后,  $n_{\max} = 6.5$  对,  $\bar{k}_{\max} = 2\pi n_{\max}/\Gamma = 2.917$ , 驱使系统回到了稳定区域. 文献[19]的实验是长高比  $\Gamma = 85$  的环状系统, 系统经过几次振荡之后, 最终在稳定波带内形成波数空间均匀分布的状态. 本文研究系统的长高比  $\Gamma$  只有 14, 且存在两个端壁. 从图 2 也可以看出, 时空位错事件后左侧边界处一个完整对流涡卷生成需要的时间为  $1.2t_v$ , 而在右侧边界处一个完整对流涡卷湮没需要的时间为  $0.9t_v$ , 由于涡卷生成的频率低于涡卷湮没的频率, 所以系统不久又回到  $n_{\min} = 5.5$  对的状态, 于是新的 Eckhaus 不稳定调谐再次发生. 系统就这样在稳定波数和不稳定波数间来回振荡, 形成周期性的时空演化.

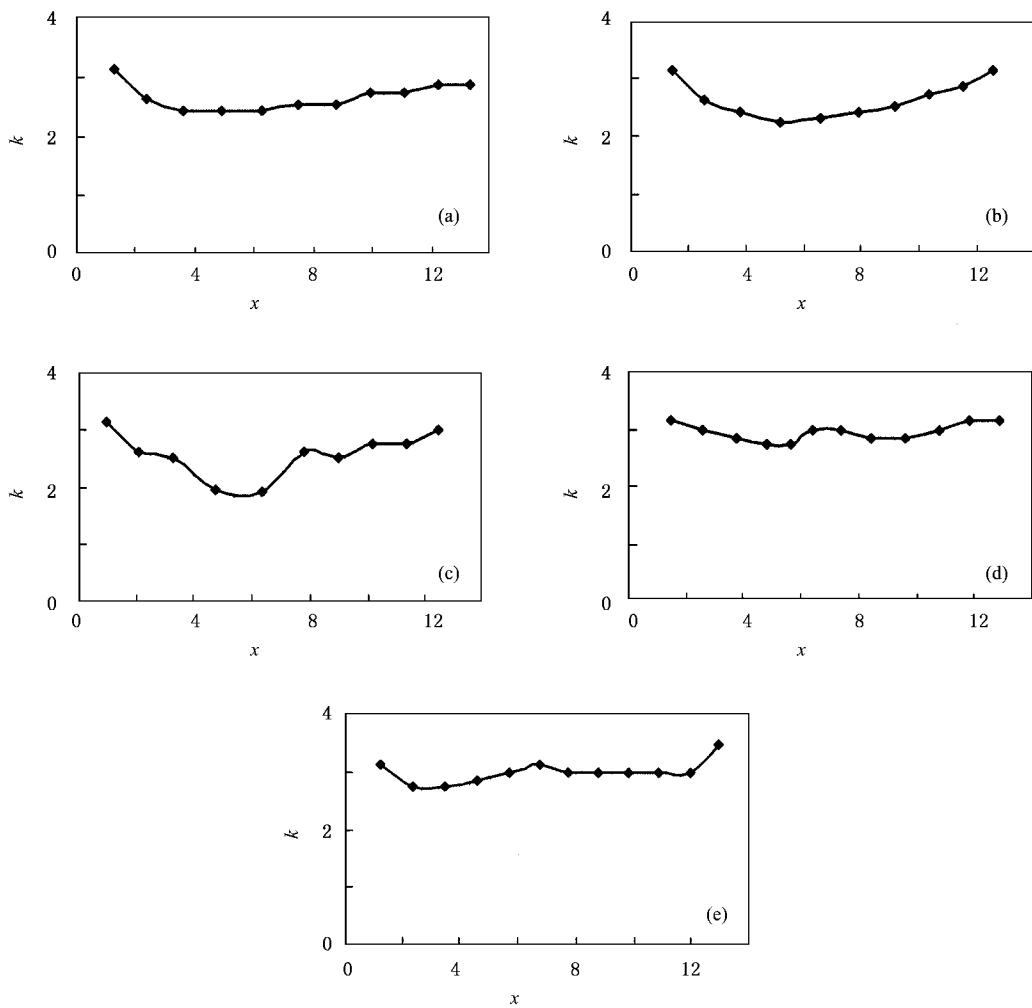


图4 典型时刻波数的空间分布  $r = 1.48$ . (a)  $t = 95$  (b)  $t = 97.5$  (c)  $t = 100.5$  (d)  $t = 101$  (e)  $t = 102$

## 5. 传热与混合特性

为了度量系统的传热特性,定义规度的无量纲参数 Nusselt 数

$$Nu = \frac{\int_0^{\Gamma} \partial_z \delta T dx}{\Gamma \partial_z \delta T_{\text{cond}}}, \quad (5)$$

式中  $\partial_z \delta T_{\text{cond}}$  为常数,是热传导状态下的温度梯度。(5)式表示垂直通过系统的热通量与热传导状态下通过系统的热通量之比。在热传导状态下 Nusselt 数  $Nu = 1$ ,所以  $Nu - 1$  反映了对流对热通量传输的贡献。

从图5可见,垂直通过水平流层的热通量也是呈周期性变化的,一个周期内,其强度经历一个由强变弱,再突然增强的过程。在时空位错缺陷状态前,

对流单元中心对流涡卷的波长最大,波数最小, $Nu - 1$  的值最小约为 0.287,表明此时对流传热处于最弱的阶段。其后由于时空位错缺陷处新的对流涡卷的产生,单元中心对流涡卷的波长突然变得最小,波数最大。与此相应,对流传热得到急剧加强, $Nu - 1$  迅速增加到最大值约为 0.395,增幅达 38%。接下来随着波长和波数的调整,对流传热逐渐减弱,基本上随时间呈线性衰减。附加在其上的小幅振荡显然对应于对流涡卷在边界处的产生与湮没事件。

对于双组分混合流体,引入混合参数  $M$  用于反映对流对组分的混掺程度,

$$M = \frac{\int \delta C^2 dx dz}{\int \delta C_{\text{cond}}^2 dx dz}. \quad (6)$$

在一个完全混合的流场中,浓度对平均值的偏离为零,于是  $M = 0$ ,在热传导状态下,浓度分布符合

Soret 效果引起的浓度线性梯度分布,  $M = 1$ . 其他对流状态  $M$  介于 0 与 1 之间.

由图 6 可见,  $M$  的变化也是周期性的. 一个周期内 对流对组分的混合程度也经历一个由强变弱, 再突然增强的过程. 最弱混合状态对应的最大  $M$  值为 0.427, 发生于时空位错事件前, 此时单元中心对流涡卷的波长最大波数最小. 其后伴随着时空位错的发生, 新对流涡卷的出现, 混合被加强,  $M$  快速减小到极小值 ( $M = 0.395$ ). 不过  $M$  的变化要比  $Nu - 1$  的变化慢.  $M$  从最大值变到最小值所用的时间约为 3.04 个垂直扩散时间, 而  $Nu - 1$  从最小值达到最大值仅用了约 0.66 个垂直扩散时间. 这是由于组分扩散速度小于热扩散速度所致.

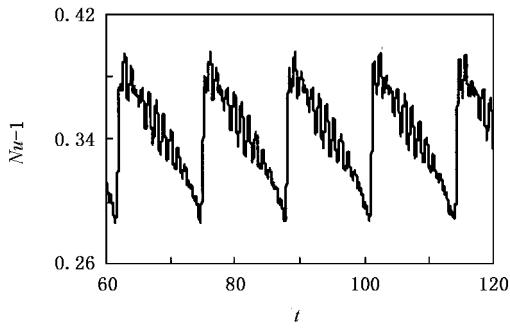


图 5 传热特性随时间的变化

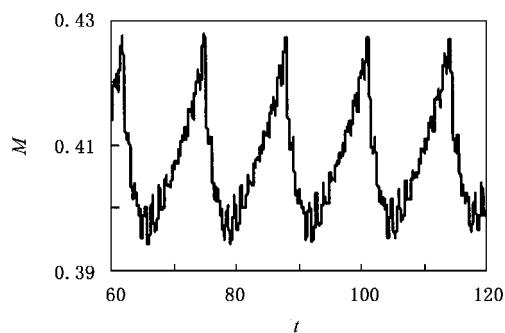


图 6 混合特性随时间的变化

## 6. $P$ , $Nu$ 和 $M$ 随控制参数 $r$ 的变化规律

图 7 所示为行波时空演化周期随 Rayleigh 数  $r$  的变化规律. 随着 Rayleigh 数  $r$  的增大, 驱使不稳定状态进入( $r, k$ )空间的稳定区域. 由图 7 可见, Rayleigh 数  $r$  较小时, 调谐发生的频率非常快, 随着 Rayleigh 数  $r$  的增大, 调谐发生的周期逐渐变长.  $r =$

1.6 以前, 周期的增加比较平缓.  $r = 1.6$  以后周期快速增加, 此时波数空间分布更均匀, 表明系统达到稳定区域的边界.  $r = 1.62$  时, 调谐周期  $P = 94$ ,  $r = 1.63$  时 200 个计算时间内没有调谐发生.

图 8 给出了周期内最大 Nusselt 数  $Nu_{\max}$  和最小 Nusselt 数  $Nu_{\min}$  随 Rayleigh 数  $r$  的变化规律. 由于对流的增强, 反映对流传热强度的参数  $Nu - 1$  随 Rayleigh 数  $r$  的增加而增大. 不过在研究的参数范围内, 时空位错事件前后最强对流传热与最弱对流传热的强度差值随 Rayleigh 数只有轻微增加. 与对流传热类似, 对流混合也随对流的增强而更趋于均匀. 如图 9 所示, 时空位错事件前后最不均匀混合与最均匀混合的差异程度随 Rayleigh 数  $r$  的改变并不显著.

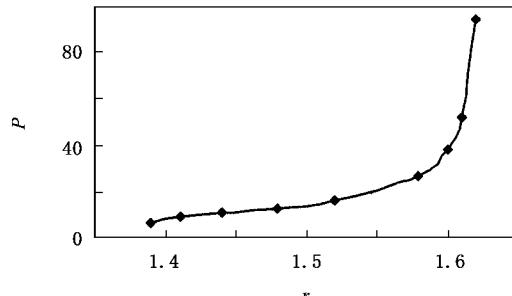


图 7 调谐周期随  $r$  的变化

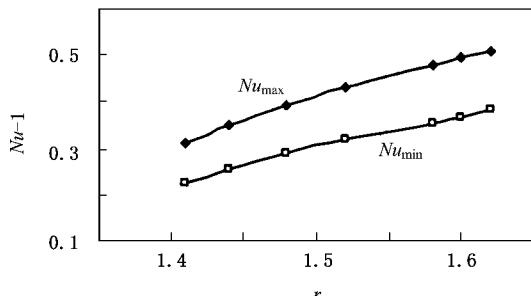


图 8 传热特性随  $r$  的变化

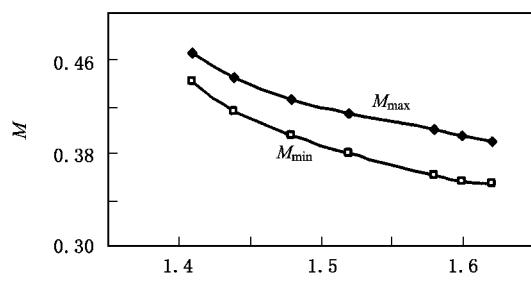


图 9 混合特性随  $r$  的变化

## 7. 结 论

本文通过数值模拟获得了一类具有时空位错调谐的空间扩展的行进波对流结构。随着波数的不断减小,系统越来越偏离稳定的区域,最后 Eckhaus 不稳定产生的一对对流涡卷使波数返回到稳定的带宽内。由于对流涡卷在右端湮没的频率要快于左端对流涡卷生成的频率,系统的波数不久又返回到不稳

定的区域,系统就这样在稳定与不稳定的状态之间振荡。调谐的周期随 Rayleigh 数的增加而增大,并在  $(r, k)$  稳定区域内停止。随着波数的改变,对流的传热特性和流体的混合特性随之发生改变。在短波长状态时,对流传热与混合显著加强,而长波状态时,对流传热与混合明显减弱。对流传热和对流混合随 Rayleigh 数的增加而增强,不过一个周期内最强传热混合与最弱传热混合之差并无显著的改变。

- 
- [ 1 ] Cross M C , Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
  - [ 2 ] Ma J , Pu Z S , Feng W J , Li W X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 (in Chinese) [ 马军、浦忠胜、冯旺军、李维学 2005 物理学报 **54** 4602 ]
  - [ 3 ] Chen X G , Song J B 2006 *Chin. Phys.* **15** 756
  - [ 4 ] Duan L , Kang Q , Hu W R 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 642 (in Chinese) [ 段俐、康琦、胡文瑞 2004 力学学报 **36** 642 ]
  - [ 5 ] Sullivan T S , Ahlers G 1988 *Phys. Rev. A* **38** 3143
  - [ 6 ] Koloder P , Surko C M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 842
  - [ 7 ] Steinberg V , Fineberg J , Moses E , Rehberg I 1989 *Physica* (Amsterdam) D **37** 359
  - [ 8 ] Koloder P , Glazier J A , Williams H L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1579
  - [ 9 ] Koloder P 1993 *Phys. Rev. E* **47** 1038
  - [ 10 ] Moses E , Fineberg J , Steinberg V 1987 *Phys. Rev. A* **35** 2757
  - [ 11 ] Heinrichs R , Ahlers G , Cannell D S 1987 *Phys. Rev. A* **35** 2761
  - [ 12 ] Barten W , Lücke M , Kamps M 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5662
  - [ 13 ] Li G D , Huang Y N 2006 *Chin. Phys.* **15** 2984
  - [ 14 ] Batiste O , Net M , Mercader I , Knobloch E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2309
  - [ 15 ] Fütterer C , Lücke M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036315
  - [ 16 ] Batiste O , Knobloch E 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 244501
  - [ 17 ] Hurle D T J , Jakeman E 1971 *J. Fluid Mech.* **47** 667
  - [ 18 ] Eckhaus W 1965 *Studies in Nonlinear Stability Theory* ( Berlin : Springer )
  - [ 19 ] Koloder P 1992 *Phys. Rev. A* **46** R1739

# Traveling-wave convection with Eckhaus instability modulation in a binary fluid mixture<sup>\*</sup>

Li Guo-Dong<sup>1)†</sup> Huang Yong-Nian<sup>2)</sup>

1) Institute of Water Resources and Hydro-electric Engineering , Xi'an University of Technology , Xi'an 710048 , China )

2) State Key Laboratory for Studies of Turbulence and Complex Systems , Peking University , Beijing 100871 , China )

( Received 6 February 2007 ; revised manuscript received 21 March 2007 )

## Abstract

For Rayleigh-Bénard convection in a binary fluid mixture , we obtained a traveling-wave state with periodic modulation of spatiotemporal dislocation defects in a rectangular cell by the numerical simulation of full hydrodynamic equations. The investigations show that the creation of pairs of convective rolls triggered by Eckhaus instability leading to this modulation. Because the generating frequencies of rolls at the left wall smaller than the annihilating frequencies of rolls at the right wall , the system soon move out of the stable region , in this way the system oscillates back and forth between the stable and unstable Eckhaus wave number band. The properties of heat transfer and fluid mixing also studied too.

**Keywords** : binary fluid mixture , traveling-wave convection , spatiotemporal dislocation defects , Eckhaus instability modulation

**PACC** : 4754 , 4720 , 4725Q , 4735

\* Project supported by the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education , China( Grant No. 2004527 ) and the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China( Grant No. G20000773 ).

† E-mail : gdli2002@pkuaa.edu.cn