

多能级原子与多模光场的相互作用机理研究^{*}

张 明^{1)†} 戴宏毅²⁾ 欧保全²⁾ 谢红卫¹⁾ 胡德文¹⁾

1) 国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

2) 国防科学技术大学理学院, 长沙 410073)

(2007 年 3 月 10 日收到, 2007 年 6 月 28 日收到修改稿)

研究了多能级原子与多模光场的相互作用. 探讨了旋波近似下 N 能级原子与 $(N-1)$ 模光场相互作用演化规律, 给出了相互作用绘景中其相应的 Schrödinger 方程的解析通式, 分析了三能级原子、四能级原子分别与双模、三模光场相互作用的演化规律. 研究结果表明: 当原子初始时刻处于基态时, 三能级原子与四能级原子的基态概率幅具有相同的变化规律.

关键词: 多能级原子, 多模光场, 旋波近似

PACC: 4250

1. 引言

近 10 多年来, 二能级、三能级和四能级原子分别与光场相互作用已得到广泛的研究^[1-19]. 随着量子信息与量子计算的发展^[20], 利用不同能级原子与光场相互作用进行量子信息处理受到了广泛的关注和研究^[21-22]. 但大多数研究主要针对二能级、三能级原子与单模、双模光场相互作用的情况, 并没有考虑能否可以获得多能级原子与多模光场相互作用的一个通式. 对于三能级原子与双模光场系统, 文献^[23]的作者是使用自旋为 -1 的算子表示 J_x, J_y, J_z , 把系统的总哈密顿量改写成三个相互对易的算子和形式, 从而获得三能级原子与双模光场系统演化的解析表达式, 但是这种方法是否适用于多能级原子与多模光场相互作用的情形, 则没有加以研究.

最近, 作者在研究中发现, 多能级原子与多模光场相互作用机理具有如下共同的特性: 在相互作用绘景中, 通过引入慢变量可以将时变系数的 Schrödinger 方程求解问题巧妙地转化为线性时不变系统的求解问题, 该线性时不变系统所对应的系统矩阵仅有两个非零特征值, 而其余的特征值均为零. 因此, 利用谱定理^[23], 我们可以方便地给出多能级原子与多模光场相互作用演化的一般解析公式, 并

且还发现: 当原子初始时刻处于基态时, 三能级与四能级原子的基态概率幅具有相同的表达式, 均可用系统矩阵的两个非零特征值表示.

2. N 能级原子与 $(N-1)$ 模光场的相互作用及其演化

考虑 N 能级原子与 $(N-1)$ 模光场相互作用如图 1 所示, 其中 $|g\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_{N-1}\rangle$ 表示原子的 N 个能级, 能级 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_{N-1}\rangle$ 两两之间的单光子跃迁是电偶极禁戒的, $\omega_j (j = 1, 2, \dots, N-1)$ 表示 $(N-1)$ 模光场的 $(N-1)$ 频率, Δ 表示原子与场的失谐量. 在旋波近似下, 在 Schrödinger 绘景中描述此系统的哈密顿量为 (取 $\hbar = 1$)

$$H = H_0 + V,$$

$$H_0 = \sum_{k=g, e_1, e_2, \dots, e_{N-1}} E_k |k\rangle\langle k| + \sum_{j=1}^{N-1} \omega_j a_j^\dagger a_j, \quad (1)$$

$$V = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j (a_j^\dagger |g\rangle\langle e_j| + a_j |e_j\rangle\langle g|),$$

其中 E_k 是 N 能级原子在相应能级的能量, $a_j^\dagger$ 和 a_j 分别表示 $(N-1)$ 模光场的产生算符和湮没算符, H_0 是原子与场的自由哈密顿量, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ 为 N 能级原子与场模的耦合常数.

在相互作用绘景中, 相互作用哈密顿量为

^{*} 国家自然科学基金 (批准号 60674040) 资助的课题.

[†] E-mail: zhangming@nudt.edu.cn

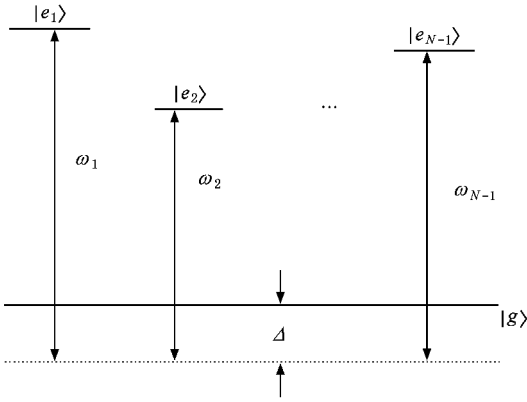


图 1 多能级原子与多模光场相互作用

$$V(t) = \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t), \quad (2)$$

利用关系式

$$\begin{aligned} \exp(\chi a^\dagger a) a \exp(-\chi a^\dagger a) &= a \exp(-\chi), \\ \exp(\chi a^\dagger a) a^\dagger \exp(-\chi a^\dagger a) &= a^\dagger \exp(-\chi), \end{aligned} \quad (3)$$

可以得

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j (a_j^\dagger |g\rangle \langle e_j| \exp(i\Delta t) \\ &\quad + a_j |e_j\rangle \langle g| \exp(-i\Delta t)), \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\Delta = \omega_j - E_{e_j} + E_g \quad (j = 1, 2, \dots, N-1)$$

为原子与场的失谐量.

在相互作用绘景中,任意 t 时刻原子-光场耦合系统的态矢的一般表达式可写为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{N-1}} (A_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) \\ &\quad \times |g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle \\ &\quad + A_{e_1, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) |e_1, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle \\ &\quad + A_{e_2, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) |e_2, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle \\ &\quad + \dots + A_{e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) \\ &\quad \times |e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle). \end{aligned} \quad (5)$$

把(4)(5)式代入相互作用绘景中的 Schrödinger 方程,可以得到

$$\begin{aligned} i\dot{A}_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(i\Delta t) A_{e_1, n_1-1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) \\ &\quad + \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(i\Delta t) A_{e_2, n_1, n_2-1, \dots, n_{N-1}}(t) + \dots \\ &\quad + \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} \exp(i\Delta t) A_{e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}-1}(t), \\ i\dot{A}_{e_1, n_1-1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t), \\ i\dot{A}_{e_2, n_1, n_2-1, \dots, n_{N-1}}(t) &= \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t), \\ &\dots \\ i\dot{A}_{e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}-1}(t) &= \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

若把 $A_{g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}}$, $A_{e_1, n_1-1, n_2, \dots, n_{N-1}}$, $A_{e_2, n_1, n_2-1, \dots, n_{N-1}}$, $\dots$, $A_{e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}-1}$ 分别简记为 A_0 , A_1 , $A_2, \dots, A_{N-1}$, 则任意 t 时刻原子-光场耦合系统的态矢可表示为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{N-1}} (A_0(t) |g, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle \\ &\quad + A_1(t) |e_1, n_1-1, n_2, \dots, n_{N-1}\rangle \\ &\quad + A_2(t) |e_2, n_1, n_2-1, \dots, n_{N-1}\rangle + \dots \\ &\quad + A_{N-1}(t) |e_{N-1}, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}-1\rangle). \end{aligned}$$

引入慢变量

$$\tilde{A}_0(t) = A_0(t) \exp(-i\Delta t),$$

则(6)式可化为

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{A}}_0(t) &= \Delta \tilde{A}_0(t) + \lambda_1 \sqrt{n_1} A_1(t) \\ &\quad + \lambda_2 \sqrt{n_2} A_2(t) + \dots \\ &\quad + \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} A_{N-1}(t), \\ i\dot{\tilde{A}}_1(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \tilde{A}_0(t), \\ i\dot{\tilde{A}}_2(t) &= \lambda_2 \sqrt{n_2} \tilde{A}_0(t), \\ &\dots \\ i\dot{\tilde{A}}_{N-1}(t) &= \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} \tilde{A}_0(t). \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} X(t) &= (A_0(t), A_1(t), A_2(t), \dots, A_{N-1}(t))^T, \\ \tilde{X}(t) &= (\tilde{A}_0(t), A_1(t), A_2(t), \dots, A_{N-1}(t))^T, \end{aligned}$$

它们之间的关系为

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X(t). \quad (8)$$

这时还可把(7)式改写为

$$i\dot{\tilde{X}}(t) = M \tilde{X}(t), \quad (9)$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & \lambda_1 \sqrt{n_1} & \lambda_2 \sqrt{n_2} & \dots & \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} \\ \lambda_1 \sqrt{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 \sqrt{n_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \lambda_{N-1} \sqrt{n_{N-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(10)

经过计算可知, M 有 $N-2$ 个零特征值和两个非零特征值, 两个非零特征值分别为

$$s_1 = \frac{\Delta}{2} + V,$$

$$s_2 = \frac{\Delta}{2} - V.$$

这里

$$V = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \Omega^2},$$

$$\Omega = \sqrt{n_1 \lambda_1^2 + n_2 \lambda_2^2 + \dots + n_{N-1} \lambda_{N-1}^2}.$$

为了解方程(9), 特给出引理.

引理^[23](谱定理) 给定函数 $f(\lambda)$ 和 $n \times n$ 的矩阵 A , 设 A 的特征多项式为

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i},$$

其中

$$n = \sum_{i=1}^m n_i.$$

定义具有 n 个待定系数的多项式

$h(\lambda) := c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$,
若这 n 个待定系数可由如下 n 个方程确定:

$$h^{(l)}(\lambda_i) := f^{(l)}(\lambda_i)$$

$$(l = 0, 1, \dots, n_i - 1; i = 1, 2, \dots, m), \quad (11)$$

则称 $f(\lambda)$ 和 $h(\lambda)$ 在 A 的谱上一致, 并且有

$$f(A) = h(A).$$

这里

$$h^{(l)}(\lambda_i) := \left. \frac{d^l h(\lambda)}{d\lambda^l} \right|_{\lambda = \lambda_i},$$

$$f^{(l)}(\lambda_i) := \left. \frac{d^l f(\lambda)}{d\lambda^l} \right|_{\lambda = \lambda_i}.$$

根据上述引理可计算下式:

$$\exp(-iMt) = c_0 I_N + c_1 M$$

$$+ c_2 M^2 + \dots + c_{N-1} M^{N-1}, \quad (12)$$

其中

$$c_k = (-it)^k / k! \quad (k = 0, 1, \dots, N-3), \quad (13)$$

而系数 c_{N-2} 和 c_{N-1} 可由下式给出:

$$\begin{pmatrix} c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^{N-2} & s_1^{N-1} \\ s_2^{N-2} & s_2^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \exp(-is_1 t) - \sum_{k=0}^{N-3} (-is_1 t)^k / k! \\ \exp(-is_2 t) - \sum_{k=0}^{N-3} (-is_2 t)^k / k! \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2V} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\Delta}{2} - V}{\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)^{N-2}} & -\frac{\frac{\Delta}{2} + V}{\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)^{N-2}} \\ -\frac{1}{\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)^{N-2}} & \frac{1}{\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)^{N-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) \exp(it) - \sum_{k=0}^{N-3} \left[-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right]^k / k! \\ \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) - \sum_{k=0}^{N-3} \left[-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right]^k / k! \end{pmatrix}. \quad (14)$$

当初始条件为

$$X(0) = (A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0) \ \dots \ A_{N-1}(0))^T$$

时, 就有

$$\tilde{X}(0) = (\exp(-i\Delta t) A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0) \ \dots \ A_{N-1}(0))^T.$$

(15)

于是根据(8)式和

$$\tilde{X}(t) = \exp(-iMt)\tilde{X}(0), \quad (16) \quad \text{可得下列表达式:}$$

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \exp(-iMt) \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X(0). \end{aligned} \quad (17)$$

至此 (12)–(17) 式就给出了 N 能级原子与 $N-1$ 模光场相互作用演化的解析表达式.

3. 三能级原子与双模光场的相互作用

作为特例, 考虑三能级原子与双模光场的相互作用. 此时 (6) 式简化为

$$\begin{aligned} & i\dot{A}_{g, m_1, m_2}(t) \\ &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(i\Delta t) A_{e_1, m_1-1, m_2}(t) \\ & \quad + \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(i\Delta t) A_{e_1, m_1, m_2-1}(t), \\ & i\dot{A}_{e_1, m_1-1, m_2}(t) \\ &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(-i\Delta t) A_{g, m_1, m_2}(t), \\ & i\dot{A}_{e_1, m_1, m_2-1}(t) \\ &= \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(-i\Delta t) A_{g, m_1, m_2}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

引入慢变量

$$\tilde{A}_0(t) = A_0(t) \exp(-i\Delta t),$$

则 (18) 式可化为

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{A}}_0(t) &= \Delta \tilde{A}_0(t) + \lambda_1 \sqrt{n_1} A_1(t) \\ & \quad + \lambda_2 \sqrt{n_2} A_2(t), \\ i\dot{A}_1(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \tilde{A}_0(t), \\ i\dot{A}_2(t) &= \lambda_2 \sqrt{n_2} \tilde{A}_0(t). \end{aligned} \quad (19)$$

令

$$X(t) = (A_0(t) \ A_1(t) \ A_2(t))^T,$$

$$\tilde{X}(t) = (\tilde{A}_0(t) \ A_1(t) \ A_2(t))^T,$$

它们之间的关系可表示为

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t). \quad (20)$$

进一步, 把 (19) 式改写为 (9) 式, 其中

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & \lambda_1 \sqrt{n_1} & \lambda_2 \sqrt{n_2} \\ \lambda_1 \sqrt{n_1} & 0 & 0 \\ \lambda_2 \sqrt{n_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

经过计算可知, M 有三个特征值, 一个为零, 另两个不为零的特征值为

$$s_1 = \frac{\Delta}{2} + V,$$

$$s_2 = \frac{\Delta}{2} - V.$$

这里

$$V = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \Omega^2},$$

$$\Omega = \sqrt{n_1 \lambda_1^2 + n_2 \lambda_2^2}.$$

对 (21) 式进行运算后可得

$$M^2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 + \Omega^2 & \lambda_1 \Delta \sqrt{n_1} & \lambda_2 \Delta \sqrt{n_2} \\ \lambda_1 \Delta \sqrt{n_1} & \lambda_1^2 n_1 & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} \\ \lambda_2 \Delta \sqrt{n_2} & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} & \lambda_2^2 n_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

这时 (12) 式可简化为

$$\exp(-iMt) = c_0 I_3 + c_1 M + c_2 M^2, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 \\
 c_1 &= -\frac{1}{2V} \left[\frac{\frac{\Delta}{2} - V}{\frac{\Delta}{2} + V} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) - 1 \right) - \frac{\frac{\Delta}{2} + V}{\frac{\Delta}{2} - V} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) - 1 \right) \right], \\
 c_2 &= \frac{1}{2V} \left[\frac{1}{\frac{\Delta}{2} + V} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) - 1 \right) - \frac{1}{\frac{\Delta}{2} - V} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) - 1 \right) \right].
 \end{aligned} \quad (24)$$

当初始条件为

$$X(0) = (A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0))^T$$

时,有

$$\tilde{X}(0) = (\exp(-i\Delta t) A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0))^T.$$

经过进一步计算可得

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \exp(-iMt) \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) \\
 &= \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\Delta}{2}t\right) \left(\cos Vt - \frac{\Delta}{2V}i\sin Vt\right) & -\frac{i}{V}\exp\left(i\frac{\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_1 \sqrt{n_1} & -\frac{i}{V}\exp\left(i\frac{\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_2 \sqrt{n_2} \\ -\frac{i}{V}\exp\left(-i\frac{3\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_1 \sqrt{n_1} & 1 + c_2 \lambda_1^2 n_1 & c_2 \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} \\ -\frac{i}{V}\exp\left(-i\frac{3\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_2 \sqrt{n_2} & c_2 \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} & 1 + c_2 \lambda_2^2 n_2 \end{pmatrix} X(0).
 \end{aligned} \quad (25)$$

(22)–(25)式给出了三能级原子与双模光场相互作用的演化解析表达式,并可用于计算原子与光场的演化规律.例如,当系统的初态为 $X(0) = (1 \ 0 \ 0)^T$,即系统的初态为 $|g, n_1, n_2\rangle$ (原子处于基态,而双模光场处于 $|n_1, n_2\rangle$),系统演化为如下叠加态:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= A_0(t)|g, n_1, n_2\rangle + A_1(t)|e_1, n_1 - 1, n_2\rangle \\
 &\quad + A_2(t)|e_2, n_1, n_2 - 1\rangle,
 \end{aligned} \quad (26)$$

其中系数满足

$$\begin{aligned}
 A_0(t) &= 1 + c_1 \Delta + c_2 (\Delta^2 + \Omega^2) \\
 &= \exp\left(-i\frac{\Delta}{2}t\right) \left(\cos Vt - \frac{\Delta}{2V}i\sin Vt\right), \\
 A_1(t) &= \exp(-i\Delta t) \lambda_1 \sqrt{n_1} (c_1 + c_2 \Delta) \\
 &= -\frac{i}{V} \exp\left(-i\frac{3\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_1 \sqrt{n_1}, \\
 A_2(t) &= \exp(-i\Delta t) \lambda_2 \sqrt{n_2} (c_1 + c_2 \Delta) \\
 &= -\frac{i}{V} \exp\left(-i\frac{3\Delta}{2}t\right) \sin Vt \cdot \lambda_2 \sqrt{n_2}.
 \end{aligned} \quad (27)$$

对于三能级原子与双模光场系统,我们也可以仿效文献[26]的做法,用自旋为 -1 的算子表示

J_X, J_Y, J_Z 把系统的总哈密顿量改写成三个相互对易的算子和形式,从而获得三能级原子与双模光场系统演化的解析表达式.实际上文献[15, 19]等都是利用这种方法来处理三能级原子与双模光场系统,从而找到量子态制备的新方法.

本文的处理思路与文献[2, 6, 15, 19]不同.我们在相互作用绘景下进行处理,发现多能级原子与多模光场系统在一定条件下具有共性特征,并可以求得多能级原子与多模光场系统演化的精确解.本文的这种处理思路与文献[24–27]的做法有相通之处,例如:取 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$,则文献[25]中的(10)式就与本文的(17)式具有相同的格式,进一步可用本文的方法进行处理;另外,本文的(17)式与文献[26]的(6)式完全相同,所不同的只是本文可以处理更一般的情形.

值得指出的是,我们由此可提出一个具有研究价值的问题:是否能把文献[2]中采用的方法推广到多能级原子与多模光场系统?进一步的研究将深化我们对多能级原子与多模光场系统演化机理的认识.

如果取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\Delta = 0$, $n_1 = n_2 = n$, 则(25) 式进一步退化为

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos Vt & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin Vt & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin Vt \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin Vt & \frac{1}{2}(1 + \cos Vt) & \frac{1}{2}(\cos Vt - 1) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin Vt & \frac{1}{2}(\cos Vt - 1) & \frac{1}{2}(1 + \cos Vt) \end{pmatrix} X(0), \quad (28)$$

其中 V 即为 Rabi 振荡频率. 因此, 按照本文的处理思路可以清晰地获得有物理意义的分析结果.

4. 四能级原子与三模光场的相互作用

作为另一个特例, 考虑四能级原子与三模光场的相互作用.(6)式可简化为

$$\begin{aligned} i\dot{A}_{g, n_1, n_2, n_3}(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(i\Delta t) A_{e_1, n_1-1, n_2, n_3}(t) \\ &+ \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(i\Delta t) A_{e_1, n_1, n_2-1, n_3}(t) \\ &+ \lambda_3 \sqrt{n_3} \exp(i\Delta t) A_{e_1, n_1, n_2, n_3-1}(t), \\ i\dot{A}_{e_1, n_1-1, n_2, n_3}(t) &= \lambda_1 \sqrt{n_1} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, n_3}(t), \\ i\dot{A}_{e_1, n_1, n_2-1, n_3}(t) &= \lambda_2 \sqrt{n_2} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, n_3}(t), \\ i\dot{A}_{e_1, n_1, n_2, n_3-1}(t) &= \lambda_3 \sqrt{n_3} \exp(-i\Delta t) A_{g, n_1, n_2, n_3}(t). \end{aligned} \quad (29)$$

引入慢变量

$$\tilde{A}_0(t) = A_0(t) \exp(-i\Delta t),$$

则(29)式可化为

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{A}}_0(t) &= \Delta \tilde{A}_0(t) + \lambda_1 \sqrt{n_1} A_1(t) \\ &+ \lambda_2 \sqrt{n_2} A_2(t) \\ &+ \lambda_3 \sqrt{n_3} A_3(t), \end{aligned} \quad (30)$$

$$i\dot{A}_1(t) = \lambda_1 \sqrt{n_1} \tilde{A}_0(t),$$

$$i\dot{A}_2(t) = \lambda_2 \sqrt{n_2} \tilde{A}_0(t),$$

$$i\dot{A}_3(t) = \lambda_3 \sqrt{n_3} \tilde{A}_0(t).$$

令

$$X(t) = (A_0(t) \ A_1(t) \ A_2(t) \ A_3(t))^T,$$

$$\tilde{X}(t) = (\tilde{A}_0(t) \ A_1(t) \ A_2(t) \ A_3(t))^T,$$

就有关系式

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t). \quad (31)$$

还可把(30)式改写为(9)式, 其中系统矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & \lambda_1 \sqrt{n_1} & \lambda_2 \sqrt{n_2} & \lambda_3 \sqrt{n_3} \\ \lambda_1 \sqrt{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 \sqrt{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 \sqrt{n_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

经计算可知, M 有两个零特征值和两个非零特征值, 两个非零特征值分别为

$$s_1 = \frac{\Delta}{2} + V,$$

$$s_2 = \frac{\Delta}{2} - V.$$

其中

$$V = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \Omega^2},$$

$$\Omega = \sqrt{n_1 \lambda_1^2 + n_2 \lambda_2^2 + n_3 \lambda_3^2}.$$

计算(32)式还可得

$$M^2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 + \Omega^2 & \lambda_1 \Delta \sqrt{n_1} & \lambda_2 \Delta \sqrt{n_2} & \lambda_3 \Delta \sqrt{n_3} \\ \lambda_1 \Delta \sqrt{n_1} & \lambda_1^2 n_1 & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} & \lambda_1 \lambda_3 \sqrt{n_1 n_3} \\ \lambda_2 \Delta \sqrt{n_2} & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} & \lambda_2^2 n_2 & \lambda_2 \lambda_3 \sqrt{n_2 n_3} \\ \lambda_3 \Delta \sqrt{n_3} & \lambda_1 \lambda_3 \sqrt{n_1 n_3} & \lambda_2 \lambda_3 \sqrt{n_2 n_3} & \lambda_3^2 n_3 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} \Delta(\Delta^2 + 2\Omega^2) & \lambda_1 \sqrt{n_1}(\Delta^2 + \Omega^2) & \lambda_2 \sqrt{n_2}(\Delta^2 + \Omega^2) & \lambda_3 \sqrt{n_3}(\Delta^2 + \Omega^2) \\ \lambda_1 \sqrt{n_1}(\Delta^2 + \Omega^2) & \lambda_1^2 n_1 \Delta & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} \Delta & \lambda_1 \lambda_3 \sqrt{n_1 n_3} \Delta \\ \lambda_2 \sqrt{n_2}(\Delta^2 + \Omega^2) & \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} \Delta & \lambda_2^2 n_2 \Delta & \lambda_2 \lambda_3 \sqrt{n_2 n_3} \Delta \\ \lambda_3 \sqrt{n_3}(\Delta^2 + \Omega^2) & \lambda_1 \lambda_3 \sqrt{n_1 n_3} \Delta & \lambda_2 \lambda_3 \sqrt{n_2 n_3} \Delta & \lambda_3^2 n_3 \Delta \end{pmatrix}. \quad (34)$$

这时 (12) 式可简化为

$$\exp(-iMt) = c_0 I_4 + c_1 M + c_2 M^2 + c_3 M^3, \quad (35)$$

其中待求系数满足

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= -it, \\ c_2 &= -\frac{1}{2V} \left[\frac{\frac{\Delta}{2} - V}{\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)^2} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) - 1 + i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{\Delta}{2} + V}{\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)^2} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) - 1 + i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t \right) \right], \\ c_3 &= \frac{1}{2V} \left[\frac{1}{\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)^2} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) - 1 + i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)^2} \left(\exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) - 1 + i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t \right) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

当初始条件为

$$X(0) = (A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0) \ A_3(0))^T$$

时,

$$\tilde{X}(0) = (\exp(-i\Delta t) A_0(0) \ A_1(0) \ A_2(0) \ A_3(0))^T.$$

经过进一步计算可得

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i\Delta t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \exp(-iMt) \begin{pmatrix} \exp(-i\Delta t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(0). \end{aligned} \quad (37)$$

(35)–(37)式就给出了四能级原子与三模光场相互作用演化的解析表达式,并可用于研究原子与光场的演化规律.例如,当系统的初态为 $X(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$,即系统的初态为 $|g, n_1, n_2, n_3\rangle$ (原子处于基态,而三模光场处于 $|n_1, n_2, n_3\rangle$),系统演化为如下叠加态:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & A_0(t)|g, n_1, n_2, n_3\rangle \\ & + A_1(t)|e_1, n_1 - 1, n_2, n_3\rangle \\ & + A_2(t)|e_2, n_1, n_2 - 1, n_3\rangle \\ & + A_3(t)|e_2, n_1, n_2, n_3 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

(38)式中的系数满足

$$\begin{aligned} A_0(t) = & 1 - i\Delta t + c_3\Delta\Omega^2 \\ & + (c_2 + c_3\Delta)(\Delta^2 + \Omega^2), \\ A_1(t) = & -i\lambda_1\sqrt{n_1}t\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_1\sqrt{n_1}\Delta(c_2 + c_3\Delta)\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_1\sqrt{n_1}\Omega^2\exp(-i\Delta t), \\ A_2(t) = & -i\lambda_2\sqrt{n_2}t\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_2\sqrt{n_2}\Delta(c_2 + c_3\Delta)\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_2\sqrt{n_2}\Omega^2\exp(-i\Delta t), \\ A_3(t) = & -i\lambda_3\sqrt{n_3}t\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_3\sqrt{n_3}\Delta(c_2 + c_3\Delta)\exp(-i\Delta t) \\ & + \lambda_3\sqrt{n_3}\Omega^2\exp(-i\Delta t), \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} c_2 + c_3\Delta = & -\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{2V\Omega^2} \\ & \times \left[\left(\frac{\Delta}{2} - V \right) \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\Delta}{2} + V \right) \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) \right]. \end{aligned}$$

因此,可把 $A_0(t)$ 化简为

$$\begin{aligned} A_0(t) = & \frac{1}{2V} \left[\left(\frac{\Delta}{2} + V \right) \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} + V\right)t\right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\Delta}{2} - V \right) \exp\left(-i\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)t\right) \right] \\ = & \exp\left(-i\frac{\Delta}{2}t\right) \left(\cos Vt - \frac{\Delta}{2V}i\sin Vt \right). \end{aligned} \quad (40)$$

比较(40)与(27)式,不难发现三能级原子与四能级原子处于基态的概率幅 $A_0(t)$ 具有相同的表达式.

5. 结 论

本文研究了多能级原子与多模光场相互作用机理,统一处理了一类多能级原子与多模光场系统的演化问题,并得出其精确解.与文献[2,6,15,19]中所采用的思路相比,本文的研究思路有很大的不同.前者是用自旋为-1的算子表示 J_x, J_y, J_z ,把系统的总哈密顿量改写成三个相互对易的算子和形式,从而获得三能级原子与双模光场系统演化的解析表达式,但目前仅适用于处理三能级原子与双模光场系统,能否推广到多能级原子与多模光场相互作用尚待研究.而本文是在旋转波近似下,得到了多能级原子与多模光场相互作用演化的一般解析表达式,并且本文的研究结果很自然地包含了作者之一前期研究的有关结论^[26].在推导过程中,既不需要大失谐条件,也不需要简并耦合条件($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1}$).故依据本文的研究思路,既可以用于检验大失谐条件的合理性,也可以用于推导非简并耦合条件下的有效哈密顿量^[27].因此,本文将为进一步研究多能级原子与多模光场的相互作用提供了良好的分析基础,同时也将对相互作用绘景下处理多能级原子与多模光场系统的演化具有一定的参考价值.

- [1] Knight P L 1986 *Phys. Scripta*, T **12** 51
- [2] Obada S, Abdel-Hafez A M 1987 *J. Mod. Opt.* **34** 665
- [3] Liu Z D 1989 *Acta Phys. Sin.* **38** 98 (in Chinese) [刘正东 1989 物理学报 **38** 98]
- [4] Phoenix J D, Knight P L 1990 *J. Opt. Soc. Am.* B **7** 116
- [5] Schoedorf L, Risken H 1990 *Phys. Rev. A* **41** 5147
- [6] Mahran M H 1990 *Phys. Rev. A* **42** 4199
- [7] Cirac J I, Sanchez-Soto L L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 3317
- [8] Peng J S, Li G X 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1590 (in Chinese) [彭

- 金生、李高翔 1992 物理学报 **41** 1590]
- [9] Brune M, Haroche S, Raimond J M, Davidovich L, Zaquy N 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5193
- [10] Xu L, Zhang Z M 1994 *Z. Phys.* B **95** 507
- [11] Lu H, Peng J S, Li G X 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 708 (in Chinese) [路洪、彭金生、李高翔 1995 物理学报 **44** 708]
- [12] Gerry C C 1996 *Phys. Rev. A* **53** 3818
- [13] Guo G C, Zheng S B 1996 *Phys. Lett. A* **223** 332
- [14] Zheng S B, Guo G C 1997 *Opt. Commun.* **138** 317

- [15] Zheng S B 1998 *Physica A* **260** 439
- [16] Song K H ,Guo G C 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1477 (in Chinese)
[宋克慧、郭光灿 1998 物理学报 **47** 1477]
- [17] Han L B ,Tian Y H ,Li G X ,Peng J S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 696
(in Chinese)[韩立波、田永红、李高翔、彭金生 2000 物理学报 **49** 696]
- [18] Liu X ,Fang M F ,Liu A L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1707 (in Chinese)
[刘 翔、方卯发、刘安玲 2000 物理学报 **49** 1707]
- [19] Zheng S B 2003 *Chin. Phys.* **12** 977
- [20] Nielsen M A ,Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (London :Cambridge University Press)
- [21] Song K H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4730 (in Chinese) [宋克慧 2005 物理学报 **54** 4730]
- [22] Chen M L ,Wang S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4638 (in Chinese)
[陈明伦、王顺金 2006 物理学报 **55** 4638]
- [23] Chen C Z 1999 *Linear System Theory and Design* (New York :Oxford University Press)
- [24] Chu S Y ,Su D C 1982 *Phys. Rev. A* **25** 3169
- [25] Li X S ,Lin D L ,Gong C D 1987 *Phys. Rev. A* **36** 5209
- [26] Dai H Y ,Li C Z ,Chen P X ,Liang L M 2002 *Acta Sin. Quantum Opt.* **8** 36 (in Chinese) [戴宏毅、李承祖、陈平形、梁林梅 2002 量子光学学报 **8** 36]
- [27] Zhang Z M 1996 *Acta Sin. Quantum Opt.* **2** 32 (in Chinese) [张智明 1996 量子光学学报 **2** 32]

Evolution laws of multi-level atoms interacting with multi-mode cavity fields^{*}

Zhang Ming^{1†} Dai Hong-Yi²⁾ Ou Bao-Quan²⁾ Xie Hong-Wei¹⁾ Hu De-Wen¹⁾

¹ *College of Mechatronics Engineering and Automation ,National University of Defense Technology ,Changsha 410073 ,China)*

² *College of Science ,National University of Defense Technology ,Changsha 410073 ,China)*

(Received 10 March 2007 ,revised manuscript received 28 June 2007)

Abstract

Interaction of multi-level atoms with multi-mode fields is studied. Under rotation wave approximation , one can reveal the evolution laws of an N -level atom interacting with $(N - 1)$ mode cavity fields , and obtain the analytic solution of the corresponding Schrödinger equation in the interaction picture. Furthermore ,the evolution expression of a three-level atom interacting with two mode fields and a four-level atom interacting with three mode fields , respectively , are given in detail. When the initial states of atoms are ground states , the probability amplitude of ground states will have the same evolution expression for both three-level atoms and four-level atoms .

Keywords : multi-level atom , multi-mode cavity fields , rotation wave approximation

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60674040).

[†] E-mail :zhangming@nudt.edu.cn