

离轴位相奇点的动态传输^{*}

刘普生 程 科 吕百达[†]

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)
(2007 年 4 月 11 日收到, 2007 年 6 月 12 日收到修改稿)

推导出高斯背景的离轴位相奇点光束的半屏衍射解析公式, 详细研究了离轴位相奇点的动态传输. 结果表明, 半屏衍射, 偏移量和传输距离都会影响位相奇点的传输行为和衍射场位相奇点的分布. 改变偏移量和传输距离, 衍射场伴随有位相奇点的产生、移动和湮没.

关键词: 奇点光学, 离轴位相奇点光束, 半屏衍射, 光涡旋

PACC: 4225, 4290

1. 引 言

含有复杂拓扑结构的位相奇点(光涡旋)普遍存在于光波场中^[1,2]. 由于位相奇点具有的特殊性质——轨道角动量和拓扑电荷, 在光通信、光电子学、遥感、原子俘获和量子信息处理等方面得到广泛应用^[2,3]. 对于奇点光束的传输, 特别是位相奇点的分布和光涡旋间的相互作用也引起许多研究者的兴趣^[4-12]. Indebetouw 对一系列涡旋寄居于高斯背景光的传输作了研究, 发现有相反拓扑电荷的光束在传输中位相奇点会发生碰撞以至湮没, 而含有相同拓扑电荷的光束在传输中位相奇点保持不变^[4]. 文献^[5-7]分析了奇点光束在线性和非线性介质中的传输, 考虑了位相梯度和振幅梯度对光涡旋的影响. Rozas 等考察了两个含相同拓扑电荷涡旋的相互作用, 发现在传输中两个涡旋点有平移和转动^[8]. 对受光阑限制的奇点光束, Masajada 分析了光涡旋的稳定性和动态特性, 并指出在改进测量精度中的应用^[11]. Vasnetsov 等人的理论和实验研究表明, 当涡旋核被光阑阻挡时, 在远场会出现位相奇点的自重建, 认为可用光束传输截面上轨道角动量的再分布来解释^[12]. 本文针对半屏衍射离轴光涡旋的特性进行深入研究, 分析离轴位相奇点的动态传输规律.

一般而言, 在 $z = 0$ 处含有位相奇点的光场可表示为^[10]

$$E(x, y) = c(x, y) \exp(im\varphi), \quad (1)$$
$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

其中, $c(x, y)$ 为涡旋场振幅, m 为拓扑电荷, \pm 表示位相奇点的拓扑电荷符号, 位相因子 $\varphi = \arctan[(y - b)/(x - a)]$, a, b 分别为位相奇点在 x, y 方向的位置坐标. $c(x, y)$ 可具有以下三种形式^[8,10]:

$$c(x, y) = 1, \quad \text{点涡旋}, \quad (2a)$$

$$c(x, y) = \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{w_r} \right)^{|m|}, \quad r \text{ 涡旋}, \quad (2b)$$

$$c(x, y) = \tanh^{|m|} \left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{w_v} \right), \quad \tanh \text{ 涡旋}, \quad (2c)$$

其中, w_r 为标度因子, 但并不影响 r 涡旋核的大小; 而 w_v 表征 \tanh 涡旋核的大小. 点涡旋和 r 涡旋分别对应于 \tanh 涡旋的两个极限情况. 本文以有高斯背景的 r 涡旋半屏衍射为例, 分析离轴位相奇点的传输规律.

2. 离轴位相奇点光束的半屏衍射

设在源平面 $z = 0$ 处有一高斯背景光的离轴位相奇点光束

$$E^0(x_0, y_0, 0) = E_0 \left[(x_0 - a) + i \operatorname{sgn}(m) (y_0 - b) \right]^{|m|}$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60678055)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: baidalu0@tom.com

$$\times \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right), \quad (3)$$

其中, E_0 为振幅常量, w_0 为高斯背景光的束腰宽度. 如图 1 所示, 在 $z=0$ 平面沿 x 轴置一半屏光阑 Σ , 透过率函数为

$$T(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & y_0 \geq 0, \\ 0, & y_0 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

离轴奇点光束通过半屏光阑的场可表示为

$$\begin{aligned} E'(x_0, y_0, 0) &= T(x_0, y_0) E_0 [(x_0 - a) \pm (y_0 - b)]^m \\ &\times \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

由菲涅耳衍射积分公式, 在 $z > 0$ 半空间中的场分布为

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{E_0 k}{4\sqrt{\pi}gz} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{k^2}{8gz^2}(2x^2 + y^2)\right] \\ &\times \left\{ g^{-1/2} D_{-2}\left(\frac{iky}{z\sqrt{2g}}\right) + \left[\sqrt{2}(ia - b) - \frac{kx}{\sqrt{2}gz}\right] D_{-1}\left(\frac{iky}{z\sqrt{2g}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $D_\nu(\cdot)$ 为抛物柱函数 (parabolic cylinder function), $g = 1/w_0^2 - ik(2z)$. (8) 式为高斯背景的离轴位相奇点 ($m = +1$) 光束通过半屏衍射的解析公式, 对近场和远场都适用. 显然, 衍射场位相奇点的位置与源平面涡旋的偏移参数 a, b 和传输距离 z 有关, 而且可能有多个位相奇点.

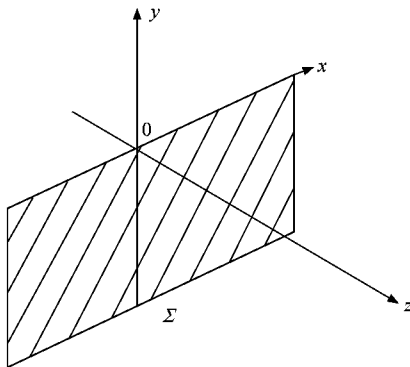


图 1 半屏光阑示意图

下面对两个重要特例作分析.

1) 中心位相奇点光束的半屏衍射

(3) 式中令 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$, 对应于涡旋点在原点处, 即为中心位相奇点光束的半屏衍射, 则 (8) 式变为

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= -\frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E'(x_0, y_0, 0) \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长. 下面考虑拓扑电荷为 $m = +1$ 的位相奇点光束, 为此将 (5) 式代入 (6) 式, 利用积分公式

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} s^{v-1} \exp(-ps^2 - qs) ds \\ &= (2p)^{-v/2} \Gamma(v) \exp\left(\frac{q^2}{8p}\right) D_{-v}\left(\frac{q}{\sqrt{2p}}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$\text{Re}(p) > 0, \text{Re}(v) > 0,$

经积分计算, 得

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{E_0 k}{4\sqrt{\pi}g^{3/2}z} \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{k^2}{8gz^2}(2x^2 + y^2)\right] \\ &\times \left[D_{-2}\left(\frac{iky}{z\sqrt{2g}}\right) - \frac{kx}{z\sqrt{2g}} D_{-1}\left(\frac{iky}{z\sqrt{2g}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

由 (9) 可知, 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, 该处场振幅不为零, 即衍射场的位相奇点发生偏移, 已不在轴上, 且偏移量与传输距离 z 有关.

2) 离轴位相奇点光束的自由空间传输

当无半屏时, 直接积分 (6) 式得到

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{E_0 k}{4zg^2} \exp\left[\frac{k}{2z}(x^2 + y^2) \left(i - \frac{k}{2zg}\right)\right] \\ &\times \left[2g(ia - b) - \frac{k(x + iy)}{z} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 式可确定位相奇点位置为

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{bz}{z_R}, \\ y &= b + \frac{az}{z_R}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $z_0 = kw_0^2/2$ 为瑞利长度. (11) 式表明, 离轴位相奇点光束在自由空间传输时有、且只有一个位相奇点, 其位置由偏移参数 a, b 和传输距离 z 共同决

定.对于 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$ 的中心位相奇点光束,位相奇点始终位于轴上.

3. 数值计算和分析

为研究离轴位相奇点光束衍射场位相奇点的变化规律,以源平面的离轴位相奇点在 y 轴上($a = 0$)

为例,利用(8)(10)式做了大量数值计算.图2为离轴奇点光束($0, -0.5w_0$)在自由空间不同传输距离处的光强($I = |E|^2$)分布(a),(c),(e)和等位相线分布(b),(d),(f).由图2可知,在自由空间传输中始终存在一个位相奇点.随传输距离的增加,奇点位置发生变化,例如图2中奇点位置分别为(a)(b) $z = z_R(0.5w_0, -0.5w_0)$;(c),(d) $z = 2z_R(w_0,$

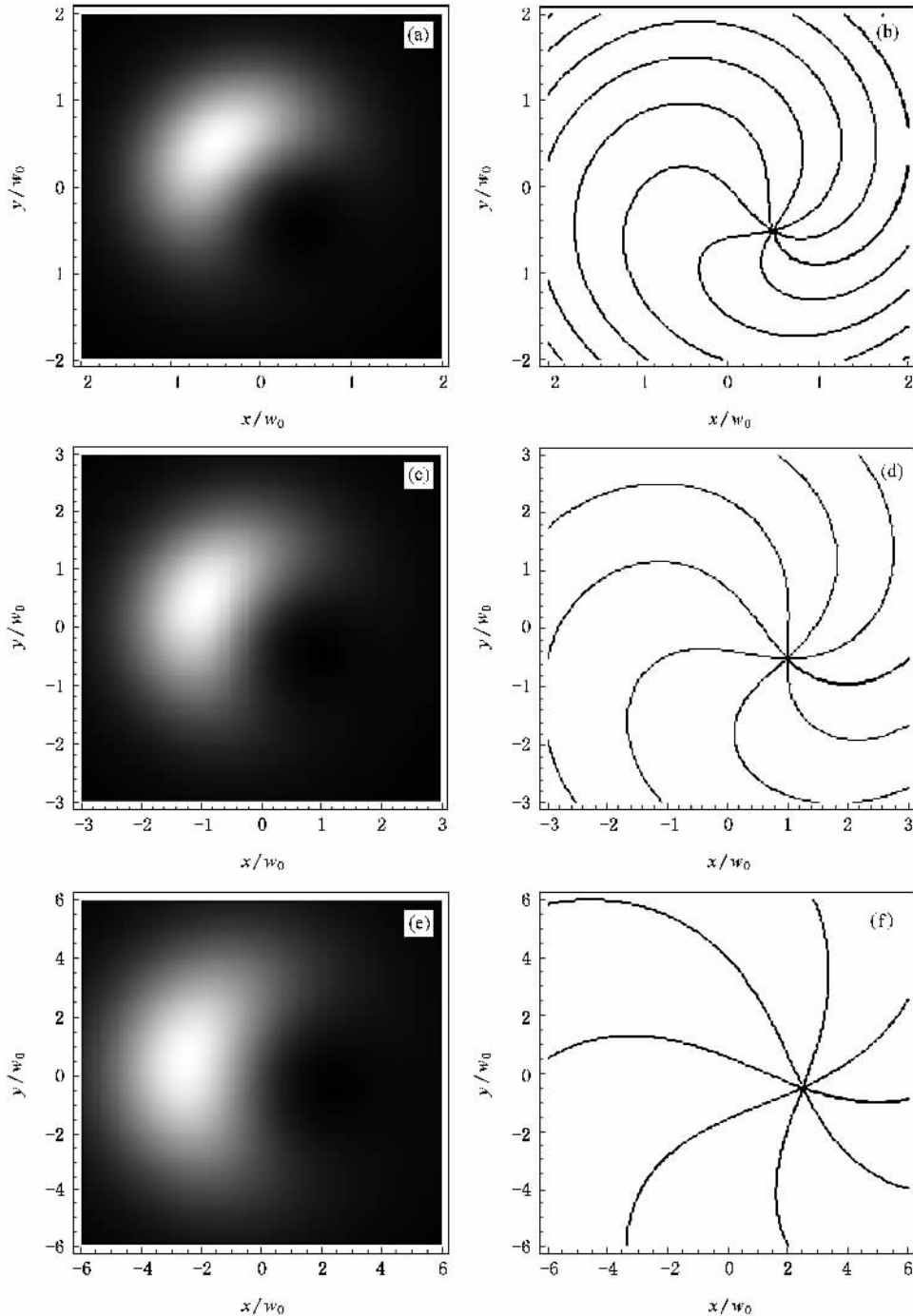


图2 离轴位相奇点光束($a = 0, b = -0.5w_0$)在自由空间传输的光强 I 分布 (a),(c),(e)和对应的等位相线分布(b),(d),(f).((a),(b) $z = z_R$;(c),(d) $z = 2z_R$;(e),(f) $z = 5z_R$)

$-0.5w_0$)(e)(f) $z = 5z_R(2.5w_0, -0.5w_0)$,与(11)式计算结果完全一致.分析发现,涡旋点沿着与 y 轴垂直且朝 x 轴正向移动,即相当于涡旋点绕 y 轴作逆时针旋转(逆着 z 轴方向).随着传输距离的增加,涡旋点旋转角度(位相奇点位置矢量与源平面涡旋点位置矢量之间夹角)也增大,当 $z \rightarrow +\infty$ 时,旋转角度 $\rightarrow \pi/2$ (即 Gouy 相移).对涡旋点在源平面其他位置的离轴奇点光束,位相奇点也具有类似的变化规律,即传输中位相奇点垂直于源平面涡旋的位置矢量旋转,旋转方向取决于位相奇点的拓扑电荷符号,旋转角度随 z 的增大而趋近 $\pi/2$.而中心奇点光束在传输中位相奇点始终在轴上.

图 3(a)–(f)为不同 b 值的离轴奇点光束半屏衍射在 $z = 2z_R$ 处的等位相线.设源平面涡旋点在 y 轴朝正向运动.由图知,当 $b \leq -0.48w_0$ 时(例如图 3(a) $b = -0.6w_0$),未发现有位相奇点. $0 > b > -0.48w_0$,出现一对位相奇点.见图 3(b) $b = -0.4w_0$,分别在 $(1.6w_0, -2.45w_0)$ 和 $(1.1w_0, -5.3w_0)$ 位置有位相奇点 A 和 B .随着 b 的增大, A 和 B 之间远离, A 的位置在 z 轴附近变化, B 沿 $-y$ 方向移动.如图 3(c) $b = -0.3w_0$, B 的位置已变为

$(0.7w_0, -7.1w_0)$.图 3(d) $b = 0$ 为中心奇点光束的半屏衍射,奇点 B 消失,位相奇点 A 位置为 $(1.1w_0, -0.8w_0)$. b 进一步增大,除了有位相奇点 A 外,在 $y > 0$ 半区间离 z 轴远处还出现位相奇点 C .随 b 的继续增加, A, C 之间相互靠近.图 3(e)给出 $b = 0.3w_0$ 的位相奇点分布, A, C 的位置为 $(0.6w_0, -0.4w_0)$ 和 $(-0.8w_0, 7w_0)$.当 $b > 1.25w_0$, A 和 C 发生湮没,如图 3(f) $b = 1.3w_0$,位相奇点消失.总之,衍射场位相奇点的分布与源平面涡旋的位置有关.涡旋点在 y 轴的奇点光束,在确定的观察面 $z = 2z_R$,当 $b \leq -0.48w_0$ 或 $b > 1.25w_0$ 时,衍射场未出现位相奇点.源平面上涡旋点位置的变化会伴有衍射场位相奇点的产生、移动和相互湮没等现象.

图 4 给出了奇点光束半屏衍射在不同传输距离处的等位相线.其中图 4(a)–(c) $b = -0.3w_0$ 为涡旋核被半屏阻挡的奇点光束,可见衍射场位相奇点分布随传输距离的增加而显著变化.如图 4(a) $z = 0.5z_R$, $y > 0$ 半区间有两个位相奇点 D 和 E .当 $z = z_R$ 时,图 4(b)中 D 和 E 相互靠近而湮没,衍射场已没有位相奇点.然而,进一步增加 z ,在 $y < 0$ 半区间会出现一对相连的位相奇点 A 和 B ,如图 3(c) $z =$

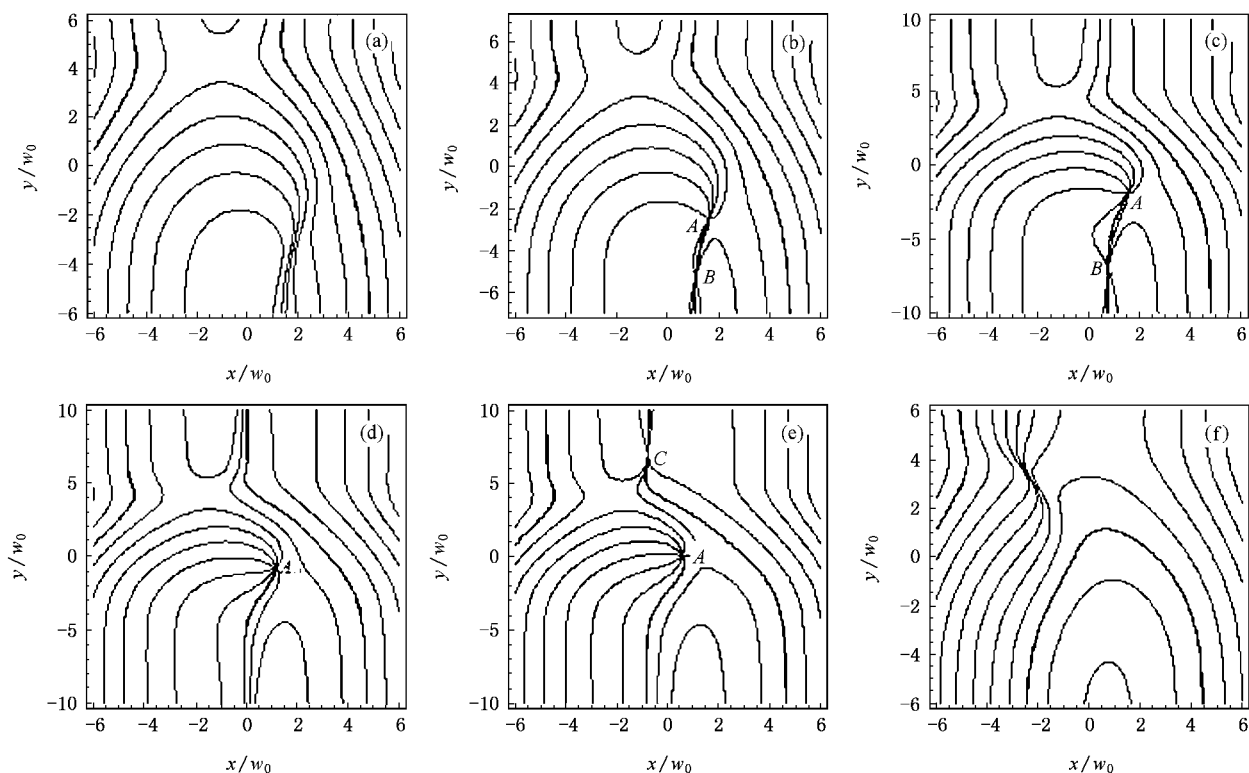


图 3 离轴位相奇点光束半屏衍射在 $z = 2z_R$ 处的等位相线, (a) $b = -0.6w_0$; (b) $b = -0.4w_0$; (c) $b = -0.3w_0$; (d) $b = 0$; (e) $b = 0.3w_0$; (f) $b = 1.3w_0$

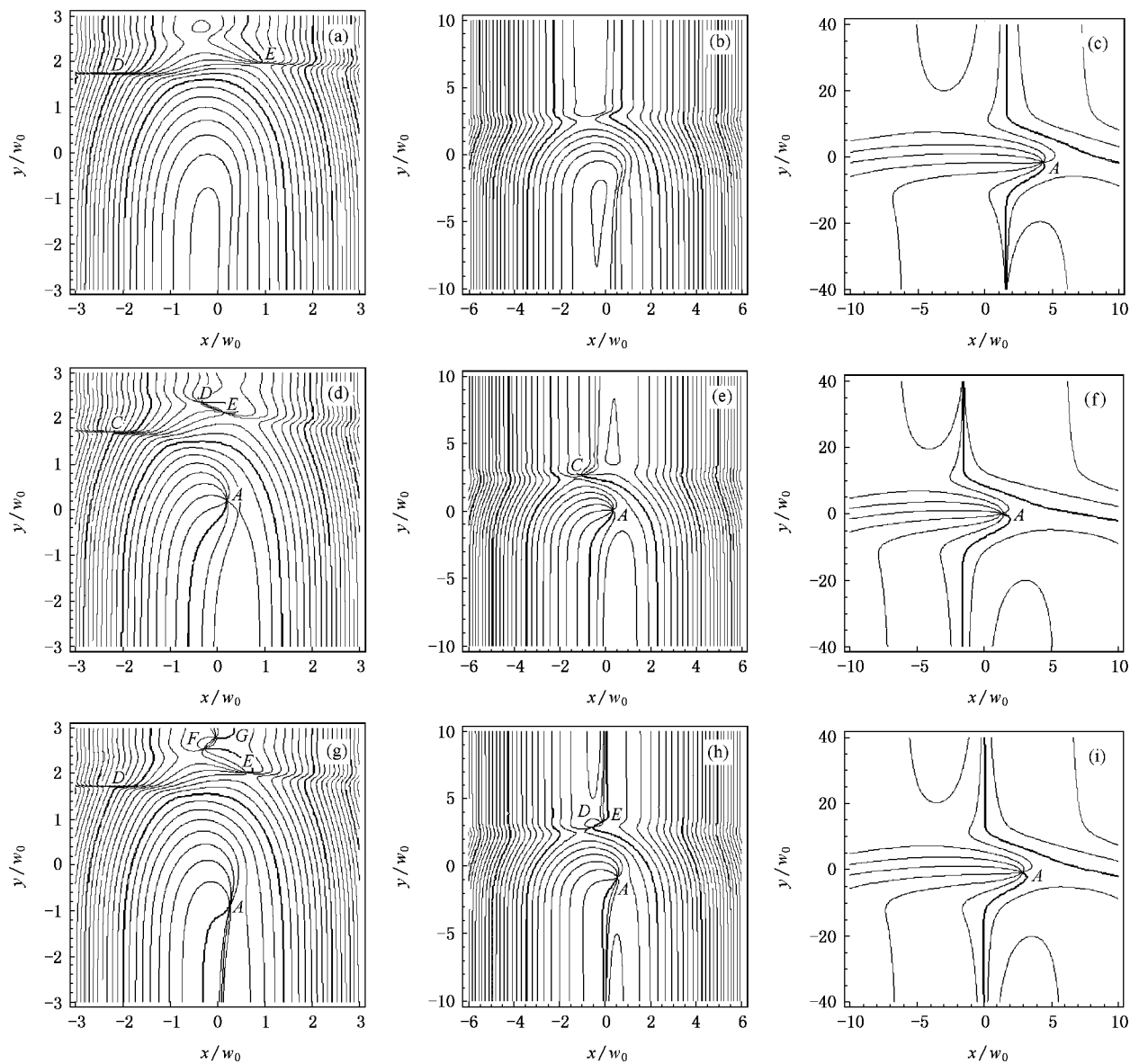


图4 离轴位相奇点光束 ($a=0$, (a)–(c): $b = -0.3w_0$; (d)–(f): $b = 0.3w_0$; (g)–(i): $b = 0$) 半衍射在不同位置 z 处的等位相线 ((a), (d), (g): $z = 0.5z_R$; (b), (e), (h): $z = z_R$; (c), (f), (i): $z = 5z_R$)

$2z_R$ 所示, 即位相奇点的自重建^[12]. 其中, B 随 z 的增加沿 $-y$ 方向运动, 当 $z = 5z_R$ 时, 图 4(c) 中 B 已在离 z 轴远处而未画出. 对于涡旋核未被半屏阻挡的奇点光束, 由图 4(d)–(f) $b = 0.3w_0$ 可知, 随传输距离的增加, 有位相奇点的移动, 并伴随有位相奇点的湮没. 如图 4(d) $z = 0.5z_R$, 衍射场有四个位相奇点 A, C, D 和 E . 随 z 的增加, A 的位置在靠近 z 轴附近变化, C 沿 $+y$ 方向移动, 而 D 和 E 发生湮没, 奇点的变化规律可见图 4(e) $z = z_R$, 图 4(f) $z = 2z_R$ 和图 4(g)–(i) 为中心奇点光束 ($a=0, b=0$) 半衍射的等位相分布. 由图 4(g)–

(i) 可知, 由于半衍射, 随传输距离的变化, 也会出现位相奇点的移动和湮没现象. 如图 4(g) $z = 0.5z_R$ 中除了 $y < 0$ 半区间有位相奇点 A 外, 在 $y > 0$ 半区间还有 D, E 和 F, G 共 4 个位相奇点. 随 z 的增加, 先是 F, G 相互靠近而湮没, 然后 D, E 也相互湮没. 如图 4(h) $z = z_R$, F, G 已消失. 图 4(d) $z = 2z_R$ 和图 4(i) $z = 5z_R$, D, E 也消失, 只剩下位相奇点 A .

4. 结 论

虽然文献 [11, 12] 也讨论了含有位相奇点的高斯光束的半衍射, 但相比较而言, 本文详细研究了

的离轴位相奇点的动态传输行为,考虑了源平面处位相奇点的离轴参数、传输距离和光阑衍射对位相奇点传输的影响. 研究表明,对(3)式所示有高斯背景拓扑电荷为+1的奇点光束,在自由空间始终有、而且也只有有一个位相奇点. 位相奇点垂直于源平面涡旋的位置矢量旋转,旋转方向取决于位相奇点的拓扑电荷符号,旋转角度随 z 的增大而增大, $z \rightarrow +\infty$,旋转角度 $\rightarrow \pi/2$,而中心位相奇点具有传输不

变性. 当有半屏衍射时,衍射场位相奇点分布与源平面位相奇点的位置有关,涡旋点在某些区域的离轴位相奇点光束,衍射场没有位相奇点. 改变偏移量和传输距离,衍射场还会伴有位相奇点的产生、移动和湮没现象. 最后应说明的是,本文以拓扑电荷为+1的奇点光束为例进行了研究,对于拓扑电荷为其他值的奇点光束,同样可用本文方法分析,只是(3)式展开后较为复杂而已.

- [1] Nye J F, Berry M V 1974 *Proc. R. Soc. Lond. A* **336** 165
- [2] Soskin M S, Vasnetsov M V 2001 *Progress in Optics* Wolf E, ed. (Elsevier Amsterdam) **42** p219
- [3] Gibson G, Courtial J, Padgett M, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett S, Franke-Arnold S 2004 *Opt. Express* **12** 5448
- [4] Indebetouw G 1993 *Opt. Commun.* **40** 73
- [5] Kivshar Y S, Nepomnyashchy A 2000 *Opt. Lett.* **25** 123
- [6] Petrov D V 2002 *Opt. Quantum Electron* **34** 759
- [7] Pyragaitė V 2001 *Opt. Commun.* **188** 307
- [8] Rozas D, Law C T, Swartzlander Jr G A 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 3054
- [9] Dong L W, Ye F W, Wang J D, Li Y P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3353 (in Chinese) [董亮伟、叶芳伟、王建东、李永平 2004 物理学报 **53** 3353]
- [10] Flossmann F, Schwarz U T, Maier M 2005 *Opt. Commun.* **250** 218
- [11] Masajada J 2000 *Opt. Commun.* **175** 289
- [12] Vasnetsov M V, Marienko I G, Soskin M S 2000 *JETP Lett.* **71** 130

Propagation dynamics of off-axis phase singularities^{*}

Liu Pu-Sheng Cheng Ke Lü Bai-Da[†]

(*Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 11 April 2007; revised manuscript received 12 June 2007)

Abstract

An analytical expression for the half-plane diffraction of off-axis phase singularity beams based on Gaussian intensity profile is derived, which enables us to study the propagation dynamics of off-axis phase singularities in detail. It is shown that the half-plane screen diffraction, off-axis displacement and propagation distance affect the propagation behavior and spatial distribution of phase singularities. By varying the off-axis displacement and propagation distance, the creation, shift and annihilation of phase singularities in the diffraction field may appear.

Keywords: singular optics, off-axis phase singularity beam, diffraction at a half-plane screen, optical vortex

PACC: 4225, 4290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60678055).

[†] Corresponding author. E-mail: baidalu0@tom.com