

含有带正负电离子的等离子体中的非线性波研究^{*}

何广军 田多祥 林麦麦 段文山[†]

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2007 年 5 月 23 日收到 2007 年 11 月 22 日收到修改稿)

研究了含有带正负电的冷离子和热电子的磁化等离子体系统. 运用约化摄动法从该系统的运动方程中推导出 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程、改进的 ZK 方程和耦合 ZK 方程. 给出了这些方程的一种孤立波解, 得到了孤立波的振幅、宽度、传播速度与负离子和正离子的质量比、负离子数密度、磁场强度的关系以及正离子和负离子在运动过程中的位移图像.

关键词: Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程, 改进的 ZK 方程, 耦合 ZK 方程, 约化摄动法

PACC: 5235, 0340K, 5235M

1. 引言

1895 年, 荷兰著名数学家 Korteweg 和 de Vries 在长波近似和小振幅假设下, 建立了单向运动的浅水波方程, 即 KdV 方程, 它有稳定的孤立波解和稳定的周期波解^[1,2]. 在普遍的弱非线性分析中, 对弱非线性介质中一维小振幅长波近似的非线性波可由 KdV 方程描述, 对于多维问题, 可以将 KdV 方程进行多种推广^[3], 其中 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程和 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程是最典型的方程^[4].

Kadomtsev 和 Petviashvili^[5] 从未被磁化的等离子体所产生的小振幅弱非线性二维尘埃声波中推导出了 KP 方程, 它也可以从浅水波的模型中推导出来^[6-10]. KP 方程孤立波解的稳定性和周期波解的稳定性已被进行了大量的研究^[3,11]. 当等离子体中的离子或电子不满足玻尔兹曼分布时, Okeir 和 Parkes 在 1997 年从中推导出了改进的 KP 方程 (mKP 方程)^[12].

1974 年, Zakharov 和 Kuznetsov^[13] 从含有冷离子和热等温电子的磁化等离子体中推导出 ZK 方程, 后来 ZK 方程的平面周期波解和孤立行波解的稳定性也被很多的物理学家进行了研究^[14,15]. 当等离子体中的离子或电子不满足玻尔兹曼分布时, Munro 和 Parkes^[16] 推导出了改进的 ZK 方程 (mZK 方程),

接着, 他们又研究了 mZK 方程在二维长波摄动下的平面周期波解和孤立行波解的稳定性^[16,17].

本文研究了含有带正负电的冷离子和热电子的等离子体流体系统, 忽略该系统的朗道阻尼和电子惯性的影响, 运用约化摄动法, 从该系统的运动方程中推导出 ZK 方程、mZK 方程和耦合 ZK 方程. 通过行波变换得到了 ZK 方程、mZK 方程和耦合 ZK 方程的一种孤立波解, 并得到了孤立波的振幅、宽度、传播速度与负离子和正离子的质量比、负离子数密度、磁场强度的关系, 也得到了正离子和负离子在运动过程中的位移图像.

2. ZK 方程、mZK 方程和耦合 ZK 方程的推导

考虑一个被磁化的等离子体系统, 含有带正负电的冷离子和热电子^[18,19], 忽略朗道阻尼和电子惯性的影响, 则无量纲化磁流体力学方程为

$$(n_p)_t + \nabla \cdot (n_p v_p) = 0, \quad (1)$$

$$(n_n)_t + \nabla \cdot (n_n v_n) = 0, \quad (2)$$

$$(v_p)_t + (v_p \cdot \nabla) v_p = -\nabla \phi + v_p \times \Omega, \quad (3)$$

$$(v_n)_t + (v_n \cdot \nabla) v_n = \frac{1}{Q}(\nabla \phi - v_n \times \Omega), \quad (4)$$

$$\nabla^2 \phi = e^\phi - n_p + n_n, \quad (5)$$

式中 $n_e, n_p, n_n, v_p, v_n, \phi$ 和 Ω 分别是无量纲化的电子数密度、正离子数密度、负离子数密度、正离子速

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 50575082)、甘肃省自然科学基金(批准号: 3ZS061-A25-013)和西北师范大学科技创新工程(批准号: NWNKJCGC-03-17)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: duanws@nwnu.edu.cn

度、负离子速度、静电势和磁场强度, $Q = m_n/m_p$, 其中 m_p 和 m_n 分别是正离子和负离子的质量, 磁场方向沿 x 轴. 这里我们引入下列无量纲化交换式:

$$\begin{aligned} x &= x^*/L, \\ y &= y^*/L, \\ z &= z^*/L, \\ t &= \omega_0 t^*, \\ E^* &= kT_e E(eL), \\ n_p &= n_p^*/n_0, \\ n_n &= n_n^*/n_0, \\ n_e &= n_e^*/(Zn_0), \\ v &= v^*/(\omega_0 L), \\ \Omega &= \Omega^* Ze/(\omega_0 m_p), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L &= (kT_e/(4\pi n_0 Ze^2))^{1/2}, \\ \omega_0 &= (4\pi n_0 Z^2 e^2/m_p)^{1/2}. \end{aligned}$$

2.1. ZK 方程的推导

运用约化摄动法, 可作如下展开:

$$\begin{aligned} X &= \epsilon^{1/2}(x - Vt), \\ Y &= \epsilon^{1/2}y, \\ Z &= \epsilon^{1/2}z, \\ T &= \epsilon^{3/2}t, \end{aligned} \tag{6}$$

$$n_p = n_{p0} + \epsilon n_p^{(1)} + \epsilon^2 n_p^{(2)} + \cdots, \tag{7}$$

$$n_n = n_{n0} + \epsilon n_n^{(1)} + \epsilon^2 n_n^{(2)} + \cdots, \tag{8}$$

$$\phi = \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \cdots, \tag{9}$$

$$v_{px} = \epsilon v_{px}^{(1)} + \epsilon^2 v_{px}^{(2)} + \cdots, \tag{10}$$

$$v_{py} = \epsilon^{3/2} v_{py}^{(1)} + \epsilon^2 v_{py}^{(2)} + \cdots, \tag{11}$$

$$v_{pz} = \epsilon^{3/2} v_{pz}^{(1)} + \epsilon^2 v_{pz}^{(2)} + \cdots, \tag{12}$$

$$v_{nx} = \epsilon v_{nx}^{(1)} + \epsilon^2 v_{nx}^{(2)} + \cdots, \tag{13}$$

$$v_{ny} = \epsilon^{3/2} v_{ny}^{(1)} + \epsilon^2 v_{ny}^{(2)} + \cdots, \tag{14}$$

$$v_{nz} = \epsilon^{3/2} v_{nz}^{(1)} + \epsilon^2 v_{nz}^{(2)} + \cdots, \tag{15}$$

式中 ϵ 为一小量, V 待定, n_{p0} 和 n_{n0} 是未微扰状态时正离子数密度和负离子数密度. 将方程 (6)–(15) 代入方程 (1)–(5) 中, 并使 ϵ 同次幂的系数相等, 且取积分常数为零, 再用 x 代替 X 、用 y 代替 Y 、用 z 代替 Z , 我们可以得到

$$n_{p0} - n_{n0} = 1, \tag{16}$$

$$\phi^{(1)} = n_p^{(1)} - n_n^{(1)}, \tag{17}$$

$$V^2 = n_{p0} + \frac{n_{n0}}{Q}, \tag{18}$$

$$n_p^{(1)} = \frac{n_{p0}}{V^2} \phi^{(1)}, \tag{19}$$

$$n_n^{(1)} = -\frac{n_{n0}}{QV^2} \phi^{(1)},$$

$$v_{px}^{(1)} = \frac{1}{V} \phi^{(1)},$$

$$v_{nx}^{(1)} = -\frac{1}{QV} \phi^{(1)},$$

$$v_{py}^{(1)} = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}, \tag{20}$$

$$v_{ny}^{(1)} = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z},$$

$$v_{pz}^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y},$$

$$v_{nz}^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y}.$$

最后, 可得到 ZK 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + AB\phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{A}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial x^3} \\ + \frac{AD}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

式中

$$A = V, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{3n_{p0}}{V^4} - \frac{3n_{n0}}{Q^2 V^4} - 1 \right), \tag{23}$$

$$D = 1 + \frac{1}{\Omega^2} (n_{p0} + n_{n0} Q). \tag{24}$$

2.2. mZK 方程的推导

在负离子临界密度处, 当

$$n_{n0} = \frac{Q - 3 + \sqrt{3} \sqrt{3Q^2 - 2Q + 3}}{2(Q + 1)}$$

时, 非线性项系数 $B = 0$, 此时需要考虑高阶非线性项. 为此, 我们假设有如下展开:

$$n_p = n_{p0} + \epsilon^{1/2} n_p^{(1)} + \epsilon n_p^{(2)} + \cdots, \tag{25}$$

$$n_n = n_{n0} + \epsilon^{1/2} n_n^{(1)} + \epsilon n_n^{(2)} + \cdots, \tag{26}$$

$$\phi = \epsilon^{1/2} \phi^{(1)} + \epsilon \phi^{(2)} + \cdots, \tag{27}$$

$$v_{px} = \epsilon^{1/2} v_{px}^{(1)} + \epsilon v_{px}^{(2)} + \cdots, \tag{28}$$

$$v_{nx} = \epsilon^{1/2} v_{nx}^{(1)} + \epsilon v_{nx}^{(2)} + \cdots, \tag{29}$$

$$v_{py} = \epsilon v_{py}^{(1)} + \epsilon^{3/2} v_{py}^{(2)} + \cdots, \tag{30}$$

$$v_{ny} = \epsilon v_{ny}^{(1)} + \epsilon^{3/2} v_{ny}^{(2)} + \cdots, \tag{31}$$

$$v_{pz} = \epsilon v_{pz}^{(1)} + \epsilon^{3/2} v_{pz}^{(2)} + \cdots, \tag{32}$$

$$v_{nz} = \epsilon v_{nz}^{(1)} + \epsilon^{3/2} v_{nz}^{(2)} + \cdots, \tag{33}$$

X, Y, Z, T 的展开和以上一样. 将方程(6)和(25) — (33)代入方程(1) — (5), 使 ϵ 的同次幂系数相等, 再用 x 代替 X 、用 y 代替 Y 、用 z 代替 Z , 我们可以得到方程(16) — (20).

最后, 经化简得到 mZK 方程

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + AC(\phi^{(1)})^2 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{A}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial x^3} + \frac{AD}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) = 0, \tag{34}$$

式中

$$C = \frac{1}{4} \left(\frac{15n_{i0}}{V^6} + \frac{15n_{i0}}{Q^3 V^6} - 1 \right).$$

2.3. 耦合 ZK 方程的推导

在 $B = 0$ 附近, 我们假设 B 与 $\epsilon^{1/2}$ 是同量级, 利用方程(6)和(25) — (33)的展开, 可得方程(16) — (20).

最后, 经化简得到耦合 ZK 方程

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + AC[\phi^{(1)}]^2 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + AB\phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{A}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial x^3} + \frac{AD}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) = 0. \tag{35}$$

耦合 ZK 方程中一次非线性项和二次非线性项系数与 ZK 方程、mZK 方程对应的非线性项系数相等, 但

该方程仅适合于负离子临界数密度附近. 当 $B = 0$ 时, 一次非线性项消失, 耦合 ZK 方程(35)变为 mZK 方程(34); 当 $C = 0$, 二次非线性项消失, 耦合 ZK 方程(35)变为 ZK 方程(21).

3. ZK 方程、mZK 方程和耦合 ZK 方程的解

3.1. ZK 方程的解

先假设 ZK 方程有如下的行波解:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z, t) &= \phi^{(1)}(\xi), \\ \xi &= px + ly + mz - \mu t, \end{aligned} \tag{36}$$

式中 p, l, m 分别为 x, y, z 方向上的波数, μ 为一正常数. 将方程(36)代入 ZK 方程(21)中, 化简后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} &= - \frac{1}{Ap^3 + ADpl^2 + ADpm^2} \\ &\times (ABp\phi^{(1)2} - 2\mu\phi^{(1)}). \end{aligned} \tag{37}$$

我们取无量纲化负离子数密度 $n_{i0} \approx 1$ 代入 B 的表达式, 在负离子和正离子的质量比 Q 的变化范围内, 有 $B < 0$, 因此方程(37)有一个孤立波解

$$\phi^{(1)} = \phi_m \operatorname{sech}^2 \left[\frac{px + ly + mz - \mu t}{\omega} \right], \tag{38}$$

式中 ϕ_m 为孤立波的振幅, ω 为孤立波的宽度.

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{6\mu Q^{1/2} (n_{i0} Q + Q + n_{i0})^{3/2}}{p [3n_{i0} Q^2 + 3Q^2 - 3n_{i0} - (n_{i0} Q + Q + n_{i0})^2]}, \\ \omega &= \sqrt{\frac{2 \left(n_{i0} + 1 + \frac{n_{i0}}{Q} \right)^{1/2} p [p^2 \Omega^2 + (l^2 + m^2)(\Omega^2 + n_{i0} + 1 + n_{i0} Q)]}{\mu \Omega^2}} \end{aligned}$$

这是压缩型孤立波. 从图 1 可以看出, Q 越大, n_{i0} 越小, ϕ_m 越大. 图 2 反映了 ω 随 Q 的增大而减小, 随 n_{i0} 的增大而增大. 由数值计算可知, ω 随磁场强度 Q 的增大而减小, Ω 的变化对 ω 的影响甚小.

由方程(6)和(36), 有

$$\phi^{(1)}(\xi) = \phi^{(1)} \left[\epsilon^{1/2} k \left(\frac{p}{k} x + \frac{l}{k} y + \frac{m}{k} z - \frac{\mu \epsilon + pV}{k} t \right) \right],$$

其中 k 为波数,

$$k = \sqrt{p^2 + l^2 + m^2}.$$

因此, 在实验室坐标系下孤立波的速度

$$v = - \frac{\mu \epsilon + pV}{k}.$$

再将方程(18)代入 v 的表达式中, 可得

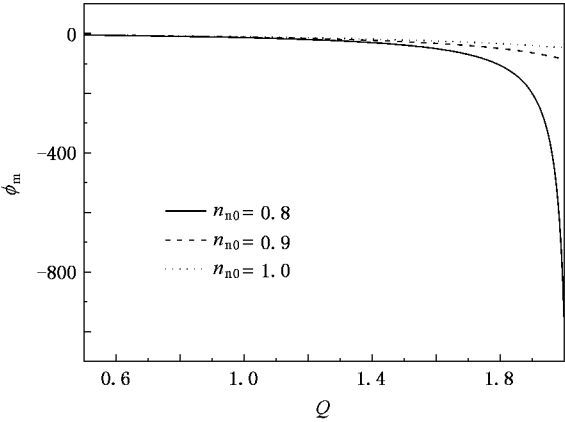


图 1 ZK 方程中 ϕ_m 随 Q 的变化 $p = 1, \mu = 2$

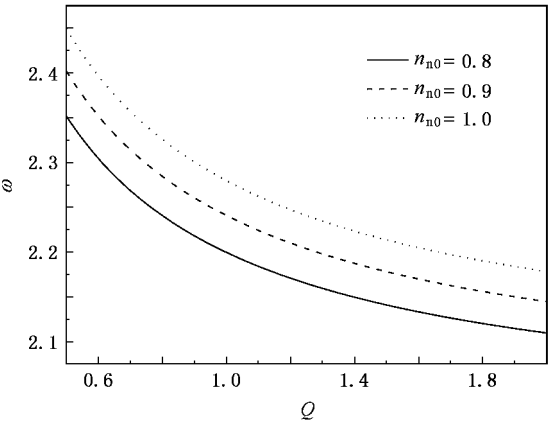


图2 ZK 方程中 ω 随 Q 的变化 $p = l = m = 1, \mu = 2, \Omega = 20000$

$$v = - \frac{p \sqrt{n_{i0} Q + Q + n_{i0}} + \mu \epsilon \sqrt{Q}}{k \sqrt{Q}}.$$

图3反映了 v 随 Q 的增大而减小,随 n_{i0} 的增大而增大.

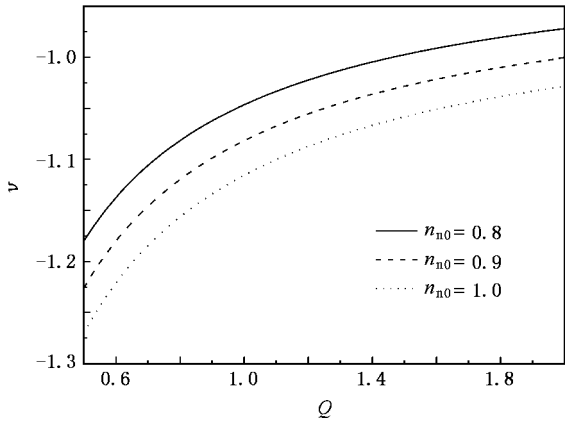


图3 ZK 方程中 v 随 Q 的变化 $p = 1, \mu = 2, k = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

利用方程(6),(10)–(15),(20)和(38),我们分别得到正离子的位移图像(图4)和负离子的位移图像(图5).从图4和图5可知,当 $px + ly + mz - (pV + \epsilon\mu)t \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} r_{px} &\rightarrow -\frac{\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{V(pV + \epsilon\mu)}, \\ r_{nx} &\rightarrow \frac{\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{QV(pV + \epsilon\mu)}, \\ r_{py} &\rightarrow 0, \\ r_{ny} &\rightarrow 0, \\ r_{pz} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$r_{nz} \rightarrow 0;$$

当 $px + ly + mz - (pV + \epsilon\mu)t \rightarrow -\infty$ 时,

$$\begin{aligned} r_{px} &\rightarrow \frac{\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{V(pV + \epsilon\mu)}, \\ r_{nx} &\rightarrow -\frac{\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{QV(pV + \epsilon\mu)}, \\ r_{py} &\rightarrow 0, \\ r_{ny} &\rightarrow 0, \\ r_{pz} &\rightarrow 0, \\ r_{nz} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此,等离子体中正离子的总位移

$$r_p \rightarrow \frac{2\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{V(pV + \epsilon\mu)}.$$

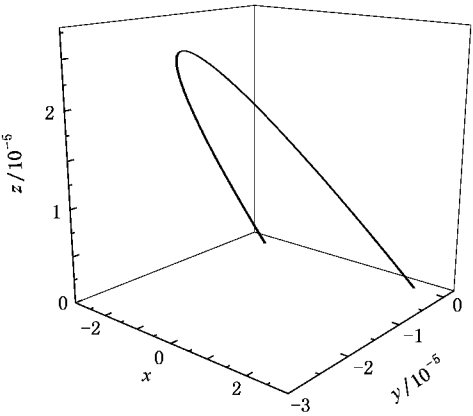


图4 ZK 方程中正离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 1, \Omega = 20000$

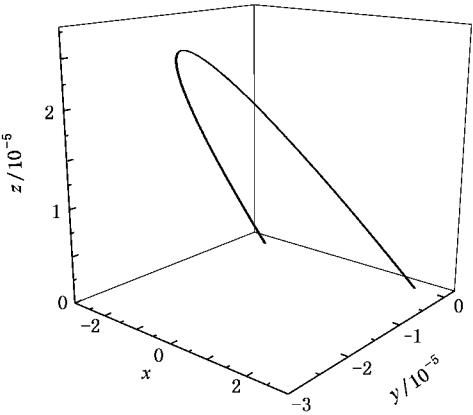


图5 ZK 方程中负离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 1, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 1, \Omega = 20000$

负离子的总位移

$$r_n \rightarrow -\frac{2\sqrt{\epsilon}\phi_m\omega}{QV(pV + \epsilon\mu)}.$$

3.2. mZK 方程的解

将方程(36)代入 mZK 方程(34),化简后得

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{3Ap^3 + 3ADpl^2 + 3ADpm^2}$$

$$\phi_m = \sqrt{\frac{24\mu(n_{i0} + n_{i0}Q + Q)^{5/2}Q^{1/2}}{p[15n_{i0}Q^3 + 15Q^3 + 15n_{i0} - (n_{i0} + n_{i0}Q + Q)^3]}},$$
$$\omega = \sqrt{\frac{\left(n_{i0} + 1 + \frac{n_{i0}}{Q}\right)^{1/2}p[p^2\Omega^2 + (l^2 + m^2)(\Omega^2 + n_{i0} + 1 + n_{i0}Q)]}{2\mu\Omega^2}}.$$

若方程(40)等号右端取正号,得到压缩型孤立波.图 6 给出 ϕ_m 随 Q 的增大而先增大后减小,随 n_{i0} 的增大而增大.通过数值计算得到 ω 随 Q 的增大而减小,随 n_{i0} 的增大而增大,随 Ω 的增大而减小,且 Ω 的变化对 ω 的影响很小.

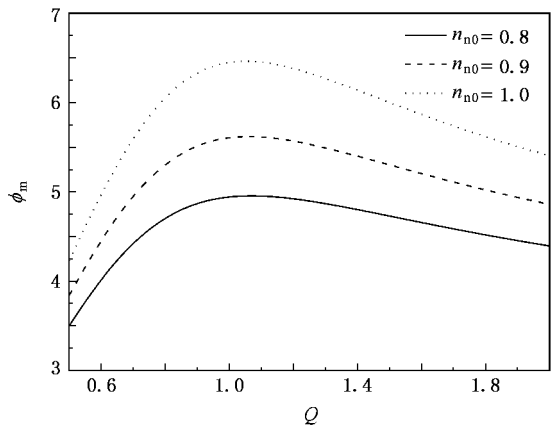


图 6 mZK 方程中 ϕ_m 随 Q 的变化 $p = 1, \mu = 2$

利用方程(6),(10)–(15),(20)和(40),我们分别得到正离子的位移图像(图 7)和负离子的位移图像(图 8).从图 7 和图 8 可知,当 $px + ly + mz - (pV + \epsilon\mu)t \rightarrow +\infty$ 时,

$$r_{px} \rightarrow -\frac{\pi\phi_m\omega}{2V(pV + \epsilon\mu)},$$
$$r_{nx} \rightarrow \frac{\pi\phi_m\omega}{2QV(pV + \epsilon\mu)},$$
$$r_{py} \rightarrow 0,$$
$$r_{ny} \rightarrow 0,$$

$$\times (2ACp\phi^{(1)3} - 6\mu\phi^{(1)}). \tag{39}$$

我们取 $n_{i0} \approx 1$ 代入 C 的表达式,在 Q 的变化范围内,有 $C > 0$,所以方程(39)有孤立波解

$$\phi^{(1)} = \pm \phi_m \operatorname{sech}\left[\frac{px + ly + mz - \mu t}{\omega}\right], \tag{40}$$

式中

$$r_{pz} \rightarrow 0,$$
$$r_{nz} \rightarrow 0;$$

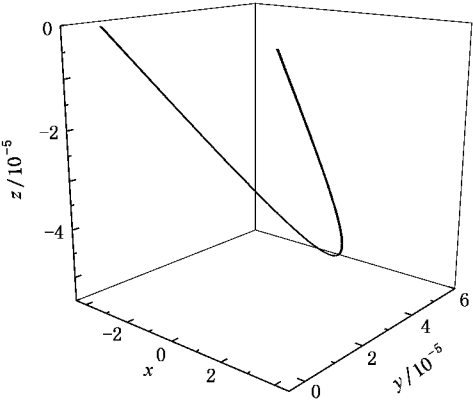


图 7 mZK 方程中正离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 1, \Omega = 20000$

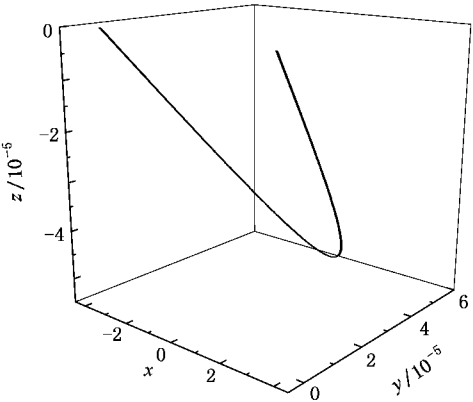


图 8 mZK 方程中负离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 1, \Omega = 20000$

当 $px + ly + mz - (pV + \epsilon\mu)t \rightarrow -\infty$ 时,

$$\begin{aligned}r_{px} &\rightarrow \frac{\pi\phi_m\omega}{2V(pV + \epsilon\mu)}, \\r_{nx} &\rightarrow -\frac{\pi\phi_m\omega}{2QV(pV + \epsilon\mu)}, \\r_{py} &\rightarrow 0, \\r_{ny} &\rightarrow 0, \\r_{pz} &\rightarrow 0, \\r_{nz} &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

因此,等离子体中正离子的总位移

$$r_p \rightarrow \frac{\pi\phi_m\omega}{V(pV + \epsilon\mu)}.$$

负离子的总位移

$$r_n \rightarrow -\frac{\pi\phi_m\omega}{QV(pV + \epsilon\mu)}.$$

若方程(40)等号右端取负号,则得到稀疏型孤立波.

3.3. 耦合 ZK 方程的解

我们假设耦合 ZK 方程有如下的行波解:

$$\begin{aligned}\phi^{(i)}(x,y,z,t) &= \phi^{(i)}(\xi), \\ \xi &= px + ly + mz + \mu t,\end{aligned}\tag{41}$$

其中 μ 为一正常数.将方程(41)代入耦合 ZK 方程(35)中,化简后得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \xi^2} &= -\frac{1}{3Ap^3 + 3ADpl^2 + 3ADpm^2} \\ &\times (2ACp\phi^{(i)3} + 3ABp\phi^{(i)2} + 6\mu\phi^{(i)}).\end{aligned}\tag{42}$$

我们取 $n_{i0} \approx 2$ 代入 B, C 的表达式,在 Q 的变化范围内,有 $B < 0, C < 0$,因此得到该方程的一个孤立波解

$$\phi^{(i)} = \frac{12\mu}{\sqrt{4A^2B^2p^2 - 24ACp\mu} \cosh\left(\frac{px + ly + mz + \mu t}{\omega}\right) - 2ABp},\tag{43}$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(n_{i0} + 1 + \frac{n_{i0}}{Q}\right)^{1/2} p [p^2\Omega^2 + (l^2 + m^2)(\Omega^2 + n_{i0} + 1 + n_{i0}Q)]}{2\mu\Omega^2}}.$$

当(43)式中的 $px + ly + mz + \mu t = 0$ 时,就可得到

$$\begin{aligned}\phi_m &= \{2\mu Q^{1/2}(n_{i0}Q + Q + n_{i0})^{3/2}\} \\ &\div \{p^2[3n_{i0}Q^2 + 3Q^2 - 3n_{i0} \\ &- (n_{i0}Q + Q + n_{i0})^2]^2 \\ &- 6p\mu Q^{1/2}(n_{i0}Q + Q + n_{i0})^{1/2} \\ &\times [15n_{i0}Q^3 + 15Q^3 + 15n_{i0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&- (n_{i0}Q + Q + n_{i0})^3]\}^{1/2} \\ &- p[3n_{i0}Q^2 + 3Q^2 - 3n_{i0} \\ &- (n_{i0}Q + Q + n_{i0})^2]\}.\end{aligned}$$

这是压缩型孤立波.从图 9 可以看出, Q 越大, n_{i0} 越小, ϕ_m 越大.通过数值计算得到 ω 随 Q 的增大而减小,随 n_{i0} 的增大而增大,随 Ω 的增大而减小, Ω 的变化对 ω 的影响很小.

由方程(6),(18)和(41),可得到孤立波的速度

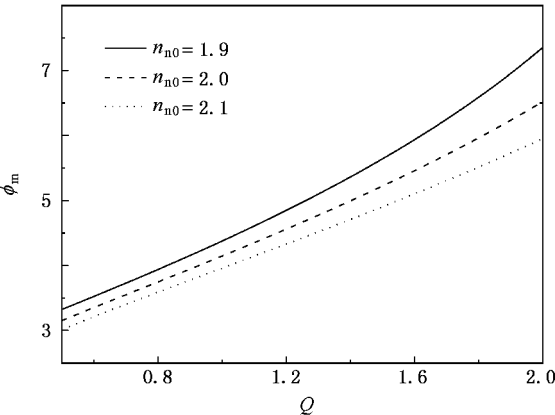


图 9 耦合 ZK 方程中 ϕ_m 随 Q 的变化 $p = l = m = 1, \mu = 2$

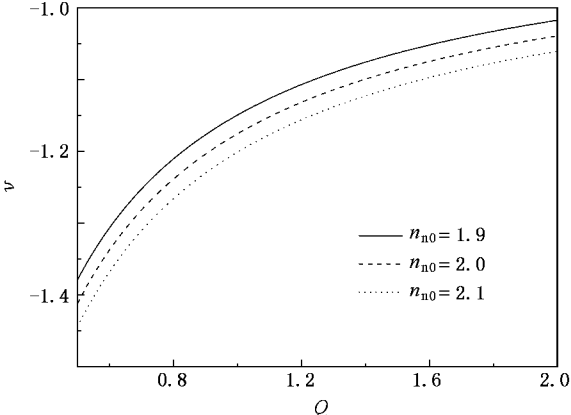


图 10 耦合 ZK 方程中 v 随 Q 的变化 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1$

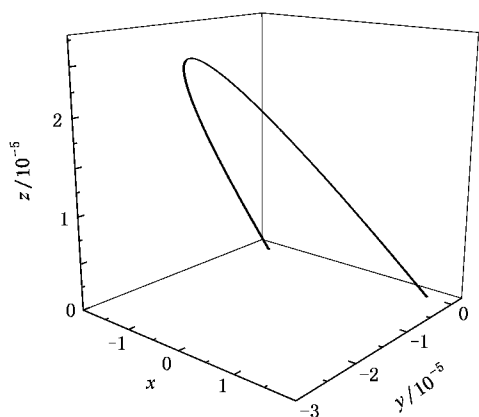


图 11 耦合 ZK 方程中正离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 2, \Omega = 20000$

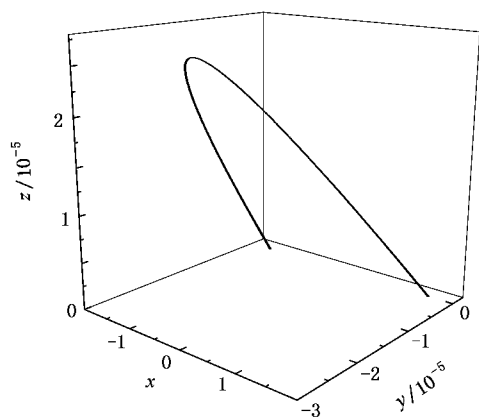


图 12 耦合 ZK 方程中负离子的位移 $p = l = m = 1, \mu = 2, \epsilon = 0.1, Q = 1, n_{i0} = 2, \Omega = 20000$

$$v = \frac{\mu\epsilon\sqrt{Q} - p\sqrt{n_{i0}Q + Q + n_{i0}}}{k\sqrt{Q}}.$$

图 10 反映了 v 随 Q 的增大而减小, 随 n_{i0} 的增大而增大.

利用方程(6), (10)–(15), (20) 和 (43), 我们分别得到正离子的位移图像(图 11)和负离子的位移图像(图 12). 从图 11 和图 12 可知, 当 $px + ly + mz - (pV + q\mu)t \rightarrow \pm\infty$ 时, 沿磁场方向上正离子和负离子位移趋于一常数, 但两者的方向相反. 垂直磁场的方向上正离子和负离子的位移趋于零.

4. 结 论

运用约化摄动法, 本文在特定条件下从所研究的系统中推导出 ZK 方程、mZK 方程和耦合 ZK 方程. 对于 ZK 类方程, 我们分别给出了它们的一个孤立波解, 得到波宽随负正离子质量比的增大而减小, 随负离子数密度的增大而增大, 随磁场强度的增大而减小, 同时磁场强度对波宽的影响甚小. 孤立波的速度随负正离子质量比的增大而减小, 随负正离子数密度的增大而增大; 当 $px + ly + mz - (pV + q\mu)t \rightarrow \infty$ 时, 沿磁场方向上正离子和负离子的总位移趋于一个常数, 且方向相反, 垂直磁场方向上的总位移都趋于零. 对于 ZK 方程和耦合 ZK 方程, 当负正离子的质量比越大、负离子数密度越小时, 孤立波的振幅就越大. 对于 mZK 方程, 当负正离子的质量比增大时, 振幅先增大后减小, 当负离子数密度增大时, 振幅增大.

- [1] Benjamin T B 1972 *Proc. Roy. Soc. London A* **328** 153
- [2] Drazin P G 1997 *Q. J. Mech. Appl. Math.* **30** 91
- [3] Duan W S, Hong X R 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1337 (in Chinese)
[段文山、洪学仁 2003 物理学报 **52** 1337]
- [4] Li B, Chen Y, Zhang H Q 2003 *Appl. Math. Comput.* **146** 653
- [5] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1979 *Sov. Phys. Dok.* **15** 539
- [6] Duan W S 2002 *Chaos Solitons Fract.* **14** 503
- [7] Kako M, Rowlands G 1976 *Plasma Phys.* **18** 165
- [8] Chen X N 1989 *Phys. Fluids A* **1** 2058
- [9] Chen X N, Sharma S D 1995 *J. Fluid Mech.* **291** 263
- [10] Chen X N, Sharma S D 1997 *J. Fluid Mech.* **335** 305

- [11] Infeld E, Rowlands G, Hen M 1978 *Acta Phys. Pol. A* **54** 131
- [12] Okeir I S, Parkes E J 1997 *Phys. Scripta* **55** 135
- [13] Zakharov V E, Kuznetsov E A 1974 *Sov. Phys. JEPT* **39** 285
- [14] Infeld E 1985 *J. Plasma Phys.* **33** 171
- [15] Laedke E W, Spatschek K H 1982 *J. Plasma Phys.* **28** 469
- [16] Munro S, Parkes E J 1999 *J. Plasma Phys.* **62** 305
- [17] Munro S, Parkes E J 2000 *J. Plasma Phys.* **64** 411
- [18] Wang Z X, Wang W C, Liu Y, Liu J Y, Wang X G 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 697
- [19] Verheest F 1992 *Planet Space Sci.* **40** 1



The study of nonlinear waves in plasma containing both positively and negatively charged ions^{*}

He Guang-Jun Tian Duo-Xiang Lin Mai-Mai Duan Wen-Shan[†]

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 23 May 2007 ; revised manuscript received 22 November 2007)

Abstract

Zakharov-Kuznetsov(ZK) equation, modified ZK equation and coupled ZK equation are derived for magnetized plasma containing both positively and negatively charged cold ions and hot electron by using the reductive perturbation method in this paper. We obtain a solitary wave solution, and also obtain the variation of solitary wave parameters, such as amplitude, width, velocity of soliton, with the mass ratio of negative ions to positive ions, the negatively charged ion number density and the magnetic field intensity.

Keywords : Zakharov-Kuznetsov(ZK) equation, modified ZK equation, coupled ZK equation, reductive perturbation method

PACC : 5235, 0340K, 5235M

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10575082), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant No. 3ZS061-A25-013) and the Science and Technology Innovation Program of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNU-KJCXGC-03-17).

[†] Corresponding author. E-mail : duanws@nwnu.edu.cn