

基于复合胞化空间的图胞映射方法^{*}

贺 群 徐 伟[‡] 李 爽 肖玉柱[†]

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 11 月 22 日收到, 2007 年 12 月 8 日收到修改稿)

为了提高计算的准确性和效率, 通过引入复合胞化空间概念, 构建了一种迭代的图胞映射方法。该方法能够对任意感兴趣的空间区域进行细化处理, 细化过程采用代数运算完成, 不会额外增加计算机内存且能保持细化前后图动力系统性质不变。为了便于计算机实施, 也给出了相应的有效算法。通过对典型例子 Hénon 映射的应用分析, 证实了该方法的有效性。

关键词: 图胞映射方法, 迭代方法, Hénon 映射

PACC: 0547, 0545

1. 引 言

为了克服直接数值法对系统全局分析时效率较低的不足, Hsu 在上世纪 80 年代提出了胞映射方法^[1]。经过二十多年的发展, 胞映射法先后形成了多种版本, 如简单胞映射法^[1]、广义胞映射法^[2]、插值胞映射法^[3]、胞参照点映射法^[4]、图胞映射法^[5, 6]、胞映射点映射法^[7], 以及一些改进的胞映射法^[8, 9]等。各种胞映射法对科学和工程领域中存在的大量实际问题的应用, 极大地促进了人们对非线性科学的研究和认识^[1-18]。借助胞映射方法研究非线性系统的动力学特性时, 通常会遇到这样两个问题: 其一是尽量想使胞的尺寸足够小, 从而能够准确地展示系统的全局空间结构, 其二是提高计算速度。然而这两者之间存在着矛盾, 因为胞的尺寸足够小就意味着胞的数目的增多, 胞的数目增多将导致计算速度降低。为了解决这一困难, 许多学者基于相应版本的胞映射方法提出了细化处理方案^[9, 14-17], 如, 文献[14]利用兼容的胞映射方法研究了吸引子和边界的细化问题, 文献[15]基于广义胞映射方法给出了奇怪吸引子的细化方案, 文献[16]基于迭代的胞参照点映射法提出了用于优化胞结构的多尺度参照技术。这些细化处理方案与相应版本胞映射方法的有机结合,

极大地提高了计算效率。

图胞映射法最早由 Hsu 在 1995 年提出, 通过将图论和偏序理论引入到胞映射理论中, Hsu 提出了广义胞映射与偏序集(poset)和图论数学分支的对应^[5]。在此基础上, 得到动力系统的全局性质, 建立了动力系统和图、偏序理论联系的统一框架。之后, Xu 和 Hong 依循 Hsu 的思路, 以集合理论为基础, 通过在胞状态空间上定义二元关系, 建立广义胞映射动力系统与图的对应关系并给出了严格的数学证明, 提出了全局分析的广义胞映射图论方法^[6], 并将其应用于激变和模糊等方面的研究之中, 取得了显著的研究成果^[10-12, 18]。在 Hsu 与 Xu, Hong 的图胞映射方法的基础上, 最近, 贺群等提出了基于自循环胞集(永久自循环胞集和瞬态自循环胞集)的瞬态胞的新分类方法^[19], 用以逼近动力系统的稳定和不稳定流形。为了精细地反映系统的全局空间结构, 特别是不变流形的空间结构, 图胞映射方法也需要细化处理。然而由于图胞映射方法本身实施起来较为复杂, 而且需要占用大量的计算机内存, 是否细化处理会额外增加计算机内存, 是否细化过程会扰乱已有的分析结果, 是否细化方案能够显著提高计算速度, 因此细化处理过程存在着较多的技术困难。

本文基于图胞映射方法, 用集合理论的语言严格地提出了复合胞化空间方法。基于复合胞化空间方

* 国家自然科学基金(批准号: 10502042)资助的课题。

† E-mail: yuzhuxiao@mail.nwpu.edu.cn

‡ E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

法构建了一种迭代的图胞映射方法,用以实现对任意感兴趣的空间区域细化处理。

2. 复合胞化空间方法

为了使胞映射方法能够高效地处理动力系统,建立有效的胞化空间是很必要的。

定义1 所谓胞化空间是指状态集合 Γ (超小区域构成的集合)、相应的整数集合 T_Γ (超小区域序号的集合)以及它们之间映射关系 $\Gamma_{T_\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$ 和 $G_{T_\Gamma, \Gamma} : T_\Gamma \rightarrow \Gamma$ 构成的四元体 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{T_\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$,且该四元体满足

$$F_{T_\Gamma, T_\Gamma} \cdot G_{T_\Gamma, \Gamma} = I_{T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma} \cdot F_{T_\Gamma, T_\Gamma} = I_\Gamma,$$

其中 I 表示相应集合的恒等映射。

我们称上述构造状态集合 Γ 和其相应的整数集合 T_Γ 的过程为胞状态空间的构造过程,建立相应映射 $F_{T_\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$ 和 $G_{T_\Gamma, \Gamma} : T_\Gamma \rightarrow \Gamma$ 的过程为标号过程。

2.1. 基本胞化空间方法

2.1.1. 构造状态集合 Γ, T_Γ

为叙述方便且不失一般性,设所考虑的空间区域 $S \in R^2$ 这里

$$S = [X_{1,\min}, X_{1,\max}] \times [X_{2,\min}, X_{2,\max}],$$

并定义 $\bar{S} = R^2 - S$ 。

基本胞化方法是将 S 沿 X_1, X_2 方向均匀地分割成为 N_1, N_2 个小区间,每一个区间长为

$$H_1 = \frac{X_{1,\max} - X_{1,\min}}{N_1},$$

$$H_2 = \frac{X_{2,\max} - X_{2,\min}}{N_2},$$

因此共有 $N_t = N_1 N_2$ 个子区域,每个子区域为

$$s_i = [X_{(1,\min)}, X_{(1,\max)}] \\ \times [X_{(2,\min)}, X_{(2,\max)}],$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N_t$ 这里

$$X_{(1,\min)} = X_{(1,\min)} + (j-1)H_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$X_{(1,\max)} = X_{(1,\min)} + jH_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$X_{(2,\min)} = X_{(2,\min)} + (j-1)H_2, \quad j = 1, 2, \dots, N_2,$$

$$X_{(2,\max)} = X_{(2,\min)} + jH_2, \quad j = 1, 2, \dots, N_2.$$

$\Gamma = \{s_i, i = 1, 2, \dots, N_t\} \cup \{\bar{S}\}$ 就构成状态集合,与之相应的整数集合为 $T_\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, N_t\}$ 。

2.1.2. 建立 Γ 与 T_Γ 之间的标号对应关系

1) 建立映射关系 $F_{T_\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$

$\forall \alpha \in \Gamma$ 当 $\alpha = \bar{S}$ 时 映射关系为 $F_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\alpha) = 0$;

当 $\alpha = s_i = [X_{(1,\min)}, X_{(1,\max)}] \times [X_{(2,\min)}, X_{(2,\max)}]$ 时,依次计算

$$x_1 = \frac{X_{(1,\min)} + X_{(1,\max)}}{2},$$

$$x_2 = \frac{X_{(2,\min)} + X_{(2,\max)}}{2},$$

$$I_1 = \text{int}\left(\frac{x_1 - X_{1,\min}}{H_1}\right) + 1,$$

$$I_2 = \text{int}\left(\frac{x_2 - X_{2,\min}}{H_2}\right) + 1,$$

其中 $\text{int}(\cdot)$ 表示取整运算,下同,则映射关系定义为

$$F_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\alpha) = (I_2 - 1)N_1 + I_1.$$

2) 建立映射关系 $G_{T_\Gamma, \Gamma} : T_\Gamma \rightarrow \Gamma$

$\forall t \in T_\Gamma$ 当 $t = 0$ 时 映射关系为 $G_{T_\Gamma, \Gamma}(t) = \bar{S}$;

当 $t \neq 0$ 时,依次计算

$$u_1 = \text{mod}(t, N_1),$$

$$u_2 = \text{int}\left(\frac{t}{N_1}\right) + 1,$$

这里 $\text{mod}(\cdot)$ 表示取余运算,当 $u_1 = 0$ 时, $I_1 = N_1, I_2 = u_2 - 1$;否则 $I_1 = u_1, I_2 = u_2$.

记

$$x_{(1,\min)} = X_{(1,\min)} + (I_1 - 1)H_1,$$

$$x_{(1,\max)} = X_{(1,\min)} + I_1 H_1,$$

$$x_{(2,\min)} = X_{(2,\min)} + (I_2 - 1)H_2,$$

$$x_{(2,\max)} = X_{(2,\min)} + I_2 H_2,$$

则映射关系定义为

$$G_{T_\Gamma, \Gamma}(t) = s_t = [x_{(1,\min)}, x_{(1,\max)}] \\ \times [x_{(2,\min)}, x_{(2,\max)}].$$

经过以上的构造子区域集合和建立标号映射关系后,我们称得到的四元体 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{T_\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$ 为状态空间 R^2 基于区域 S 上的分割为 $N_1 \times N_2$ 的胞化空间。

2.2. 复合胞化空间方法

设状态空间 R^2 基于区域 S 上的分割为 $N_1 \times N_2$ 的胞化空间为 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{T_\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$ 。对于 Γ 的某个子集 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ 且 $\bar{S} \notin \Gamma_1$ (Γ_1 中元素个数记为 $|\Gamma_1|$) 细化是指将 Γ_1 中的每个元素沿 X_1, X_2 方向

再次分割成为 $n_1 \times n_2$ 个小区间(记 $n_t = n_1 n_2$),而 $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1 - \{\bar{S}\}$ 中元素个数记为 $|\Gamma_2|$ 中的元素保持原分割不变. 我们称这样新得到的状态集合、相应的整数集合及其相应的标号映射为基本胞化空间 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{T_\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, T_\Gamma}\}$ 上的关于子集 Γ_1 分割为 $n_1 \times n_2$ 的复合胞化空间. 下面我们通过引入辅助映射 φ, φ^- 及辅助胞化空间 $\{S', T_{S'}, F_{S', T_{S'}}, G_{T_{S'}, S'}\}$ 的概念, 来给出复合胞化空间的详细建立过程.

φ, φ^- 是基于集合 T_Γ 与集合 $T_{\Gamma_1} = \{0, 1, 2, \dots, N_t\}$ 之间的一一映射, 它们之间互为逆映射, 且满足以下性质:

- 1) $\varphi(0) = 0$;
- 2) $\forall k$, 当 $1 \leq k \leq |\Gamma_1|$ 时, $G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\varphi^-(k)) \in \Gamma_1$;
- 3) $\forall k$, 当 $|\Gamma_1| + 1 \leq k \leq N_t$ 时, $G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\varphi^-(k)) \in \Gamma_2$.

另外, 记 $S' = [0, H_1] \times [0, H_2]$, 对状态空间 S' 基于 S' 建立分割为 $n_1 \times n_2$ 的胞化空间为 $\{S', T_{S'}, F_{S', T_{S'}}, G_{T_{S'}, S'}\}$.

在建立了 φ, φ^- 和 $\{S', T_{S'}, F_{S', T_{S'}}, G_{T_{S'}, S'}\}$ 的基础上, 可以按照如下方式构造复合胞化空间.

2.2.1. 构造状态集合 Ω, T_Ω

1) 计算 $h_1 = \frac{H_1}{n_1}, h_2 = \frac{H_2}{n_2}$.

2) $\forall s_i \in \Gamma - \{\bar{S}\}$, 构造集族 Ψ_{s_i} :

当 $s_i \in \Gamma_1$ 时, 记 $s_i = [a, b] \times [c, d]$,

$$\begin{aligned} \Psi_{s_i} = & \{[a + (i-1)h_1, a + ih_1] \\ & \times [c + (j-1)h_2, c + jh_2]; \\ & i = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_2\}; \end{aligned}$$

当 $s_i \in \Gamma_2$ 时, 记 $s_i = [a, b] \times [c, d], \Psi_{s_i} =$

$\{[a, b] \times [c, d]\}$,

$$\Omega = \bigcup_{s_i \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} \Psi_{s_i} \cup \{\bar{S}\},$$

$$T_\Omega = \{0, 1, 2, \dots, |\Gamma_1| n_t, \dots, |\Gamma_1| n_t + |\Gamma_2|\}.$$

2.2.2. 建立 Ω 与 T_Ω 之间的标号对应关系

1) 建立映射关系 $F_{\Omega, T_\Omega}: \Omega \rightarrow T_\Omega$

$\forall \alpha \in \Omega$, 当 $\alpha = \bar{S}$ 时, $F_{\Omega, T_\Omega}(\alpha) = 0$.

当 $\alpha = s_i = [X_{\zeta(1, \min)}, X_{\zeta(1, \max)}] \times [X_{\zeta(2, \min)}, X_{\zeta(2, \max)}]$ 时, 计算

$$x_1 = \frac{X_{\zeta(1, \min)} + X_{\zeta(1, \max)}}{2},$$

$$x_2 = \frac{X_{\zeta(2, \min)} + X_{\zeta(2, \max)}}{2},$$

$$I_1 = \text{int}\left(\frac{x_1 - X_{1, \min}}{H_1}\right) + 1,$$

$$I_2 = \text{int}\left(\frac{x_2 - X_{2, \min}}{H_2}\right) + 1,$$

$$LL = (I_2 - 1)N_t + I_1.$$

当 $1 \leq \varphi(LL) \leq |\Gamma_1|$ 时,

$$\begin{aligned} \beta = & [0, X_{\zeta(1, \max)} - X_{\zeta(1, \min)}] \\ & \times [0, X_{\zeta(2, \max)} - X_{\zeta(2, \min)}], \end{aligned}$$

$$F_{\Omega, T_\Omega}(\alpha) = (\varphi(LL) - 1)n_t + F_{S', T_{S'}}(\beta);$$

当 $|\Gamma_1| + 1 \leq \varphi(LL) \leq N_t$ 时,

$$F_{\Omega, T_\Omega}(\alpha) = |\Gamma_1| n_t + \varphi(LL) - |\Gamma_1|.$$

2) 建立映射关系 $G_{T_\Omega, \Omega}: T_\Omega \rightarrow \Omega$

$\forall t \in T_\Omega$, 当 $t = 0$ 时, $G_{T_\Omega, \Omega}(t) = \bar{S}$.

当 $1 \leq t \leq |\Gamma_1| n_t$ 时, 计算 $\nu_1 = \text{mod}(t, n_t), \nu_2 =$

$$\text{int}\left(\frac{t}{n_t}\right) + 1.$$

当 $\nu_1 = 0$ 时, $I_1 = n_t, I_2 = \nu_2 - 1$, 否则 $I_1 = \nu_1, I_2 = \nu_2$.

记

$$G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\varphi^-(I_2)) = [a, b] \times [c, d],$$

$$G_{T_{S'}, S'}(I_1) = [e, f] \times [g, h],$$

$$\begin{aligned} G_{T_\Omega, \Omega}(t) = s_i = & [a + e, a + f] \\ & \times [c + g, c + h]. \end{aligned}$$

当

$$|\Gamma_1| n_t + 1 \leq t \leq |\Gamma_1| n_t + |\Gamma_2|$$

时, 令

$$G_{T_\Omega, \Omega}(t) = G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\varphi^-(t - |\Gamma_1| n_t + |\Gamma_1|)).$$

在建立了复合胞化空间 $\{\Omega, T_\Omega, F_{\Omega, T_\Omega}, G_{T_\Omega, \Omega}\}$ 后, 为了方便完成基于不同胞化空间的图动力系统 D 与 D' 的转化, 容易建立三个辅助映射 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. 它们分别是

$\theta_1: T_\Omega \rightarrow T_\Gamma$, 满足

$$\forall k \in T_\Omega \Rightarrow G_{T_\Omega, \Omega}(k) \subset G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(\theta_1(k)).$$

$\theta_2: T_\Gamma \rightarrow T_\Omega$, $\theta_3: T_\Gamma \rightarrow T_\Omega$, 且满足

$$\forall k \in T_\Gamma, \theta_1(\theta_2(k)) = \theta_1(\theta_3(k)),$$

$$G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(k) \in \Gamma_1 \Rightarrow \theta_3(k) - \theta_2(k) = n_t - 1,$$

$$G_{T_\Gamma, T_\Gamma}(k) \in \Gamma_2 \Rightarrow \theta_3(k) - \theta_2(k) = 0.$$

如果条件 $\Gamma'_1 \subset \Gamma_1$ 成立, 则可以根据以上思路继续建立一个基于胞化空间 $\{\Omega, T_\Omega, F_{\Omega, T_\Omega}, G_{T_\Omega, \Omega}\}$ 上的关于 Γ'_1 的分割为 $n'_1 \times n'_2$ 的复合胞化空间, 如此往复就形成了胞化空间序列.

2.3. 示例分析

为了说明上述复合胞化空间详细建立过程及有关概念, 我们考察一个具体例子.

取所研究的区域 $S = [0, 12] \times [0, 6]$, 该区域以外的区域记为 $\bar{S} = \mathbb{R}^2 - S$. 对区域 S 水平和垂直方向做分割使得参数 $N_1 = 3, N_2 = 2$, 则由 2.1 中的基本胞化空间方法, 可得 $H_1 = 4, H_2 = 3, N_t = 6$. 集合 $\Gamma = \{s_i, i = 1, 2, \dots, 6\} \cup \{\bar{S}\}$, 相应的整数集合 $T_\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$. 同时可以建立映射 $F_{\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$ 和 $G_{T_\Gamma, \Gamma} : T_\Gamma \rightarrow \Gamma$. 图 1 给出了集合 Γ 中子区域 s_i 的空间位置. 表 1 给出了映射 $F_{\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$ 具体对应关系, 由于映射 F_{Γ, T_Γ} 和 $G_{T_\Gamma, \Gamma}$ 互为逆映射, 所以映射 $G_{T_\Gamma, \Gamma}$ 的对应关系在这里省去. 从而四元体 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$ 就构成了基本胞化空间.

表 1 映射 $F_{\Gamma, T_\Gamma} : \Gamma \rightarrow T_\Gamma$ 的具体对应关系

Γ	\bar{S}	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
T_Γ	0	1	2	3	4	5	6

假如想要对区域 s_2 和 s_6 细化, 其中分割方法为使它们分别在水平和垂直方向等分 2 份和 3 份, 则根据 2.2 可知, $\Gamma_1 = \{s_2, s_6\}$, $|\Gamma_1| = 2$, $\Gamma_2 = \{s_1, s_3, s_4, s_5\}$, $|\Gamma_2| = 4$, $n_1 = 2, n_2 = 3, n_t = 6, h_1 = 2, h_2 = 1$. $T_{\Gamma_1} = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$. 辅助映射 $\varphi : T_\Gamma \rightarrow T_{\Gamma_1}$ 具体对应关系如表 2. 映射 φ 的作用是重新排序 T_Γ 中的元素, 使得待细化的子区域的序号排前, 不被细化的子区域序号靠后. 在所生成的复合胞化空间中, $\Omega = \{r_1, r_2, \dots, r_{16}, \bar{S}\}$, 图 2 给出了 Ω 中子区域 r_i 的

空间位置, $T_\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. 表 3 给出了映射 $F_{\Omega, T_\Omega} : \Omega \rightarrow T_\Omega$ 具体对应关系, 由于映射 F_{Ω, T_Ω} 和 $G_{T_\Omega, \Omega}$ 互为逆映射, 所以映射 $G_{T_\Omega, \Omega}$ 的对应关系在这里省去. 表 4—6 分别给出了便于不同胞化空间转化的辅助映射 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的具体对应关系, 其中 θ_1 反映了细化后所得的区域与细化前区域的来源关系.

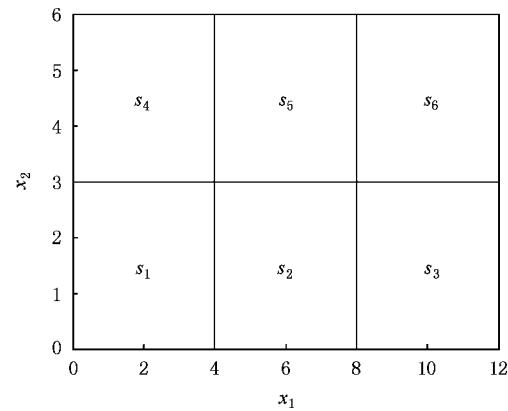


图 1 Γ 中子区域 s_i 的空间位置

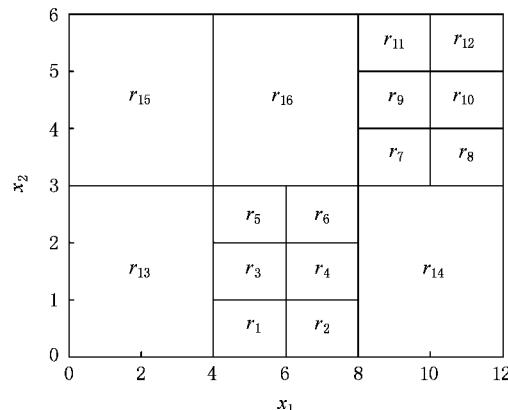


图 2 Ω 中子区域 r_i 的空间位置

表 2 辅助映射 $\varphi : T_\Gamma \rightarrow T_{\Gamma_1}$ 的具体对应关系

T_Γ	0	1	2	3	4	5	6
T_{Γ_1}	0	3	1	4	5	6	2

表 3 映射 $F_{\Omega, T_\Omega} : \Omega \rightarrow T_\Omega$ 的具体对应关系

Ω	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	\bar{S}
T_Ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0

表 4 辅助映射 $\theta_1 : T_\Omega \rightarrow T_\Gamma$ 的具体对应关系

T_Ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0
T_Γ	2	2	2	2	2	2	6	6	6	6	6	6	1	3	4	5	0

表 5 辅助映射 $\theta_2: T_\Gamma \rightarrow T_\Omega$ 的具体对应关系

T_Γ	0	1	2	3	4	5	6
T_Ω	0	13	1	14	15	16	7

表 6 辅助映射 $\theta_3: T_\Gamma \rightarrow T_\Omega$ 的具体对应关系

T_Γ	0	1	2	3	4	5	6
T_Ω	0	13	6	14	15	16	12

3. 基于复合胞化空间的迭代图胞映射法

为了既能充分展示系统的复杂空间结构又能提高计算效率,有必要对状态空间的胞化采用不同的尺度,做到粗细相宜.

设所研究的动力系统为

$$X(n+1) = P(X(n)), \quad (1)$$

这里 m 维状态向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, P 为 m 维向量函数, n 为离散时间. 迭代算法分为两步:首先用较粗的胞化方案对状态空间进行胞化,得到胞映射动力系统并进行分析. 然后基于所得的分析结果,对关键区域进行细致划分,以新的胞状态空间为基础得到更为精细的胞映射动力系统并进行分析. 不失一般性,下面以二维空间为例,给出迭代的图胞映射方法的具体算法.

1) 对状态空间进行基本胞化. 记基本胞化空间为 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$, T_Γ 中元素的个数为 $|T_\Gamma|$, 开辟图空间 $D = (V, E)$, 且 $|V| = |T_\Gamma|$, $E = \emptyset$.

2) 令 E 为 $E \cup \{0\}$ (建立陷胞关系).

3) $\forall k \in T_\Gamma - \{0\}$, 记 $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k) = s_k = [a, b] \times [c, d]$; 从 s_k 中均匀产生 m 个初值点, 对于每一个初值点, 记其坐标为 (x_j, y_j) , 经过映射 P 后的像点记为 (x'_j, y'_j) ; 若 $(k, F_{\Gamma, T_\Gamma}((x'_j, y'_j))) \notin E$, 则令 E 为 $E \cup (k, F_{\Gamma, T_\Gamma}((x'_j, y'_j)))$.

4) 对形成的有向图 $D = (V, E)$ 进行图分析可以得到相应结果.

5) 适当选取需要精细分割的胞状态集合 Γ_1 .

对 Γ_1 进行细分, 记胞化空间 $\{\Omega, T_\Omega, F_{\Omega, T_\Omega}, G_{T_\Omega, \Omega}\}$ 为基于 $\{\Gamma, T_\Gamma, F_{\Gamma, T_\Gamma}, G_{T_\Gamma, \Gamma}\}$ 上的关于 Γ_1 分割为 $n_1 \times n_2$ 的复合胞化空间.

6) 记 T_Ω 中元素的个数为 $|T_\Omega|$, 开辟图空间 $D' = (V', E')$, 且 $|V'| = |T_\Omega|$, $E' = \emptyset$; $A = \emptyset$.

7) 令 E' 为 $E' \cup \{0\}$ (建立陷胞关系).

8) $\forall (k_1, k_2) \in E$, 作:

如果 $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k_1) \in \Gamma_2$; $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k_2) \in \Gamma_2$, 则令 E' 为 $E' \cup (\theta_2(k_1), \theta_2(k_2))$;

如果 $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k_1) \in \Gamma_2$; $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k_2) \in \Gamma_1$, 则令 A 为 $A \cup \{\theta_2(k_1)\}$;

如果 $G_{T_\Gamma, \Gamma}(k_1) \in \Gamma_1$, 则令 A 为 $A \cup \{\theta_2(k_1), \dots, \theta_3(k_1)\}$.

9) $\forall k \in A$, 记 $G_{T_\Omega, \Omega}(k) = s_k = [e, f] \times [g, h]$; 从 s_k 中均匀产生 m_1 个初值点, 对于每一个初值点, 记其坐标为 (x_j, y_j) , 经过映射 P 后的像点记为 (x'_j, y'_j) ; 若 $(k, F_{\Omega, T_\Omega}((x'_j, y'_j))) \notin E'$, 则令 E' 为 $E' \cup (k, F_{\Omega, T_\Omega}((x'_j, y'_j)))$.

10) 对生成的 $D' = (V', E')$ 进行图分析可以得到相应结果, 如有必要, 返回 5), 否则停.

从相应算法中不难看出, 在由已知的胞映射动力系统生成 $D = (V, E)$ 为基础上进一步生成更为精细的胞映射动力系统 $D' = (V', E')$, 需要重新生成映射的胞序号为集合 A , 而不是 T_Ω . 这就大大的提高了计算效率. 同时在关心区域 Γ_1 中胞的长度为 h_1, h_2 , 而非 H_1, H_2 , 胞映射得到的分析结果的准确性会有显著的提高. 而且 $|V'| = |T_\Omega|$ 远远小于 $N_1 N_2 n_1 n_2 + 1$, 这样不仅在生成映射时节省了时间, 更为重要的是在应用胞映射动力系统 $D' = (V', E')$ 分析程序时, 图的规模会大大降低. 另外, 由于图胞映射动力系统分析过程(采用深度优先搜索算法求解强连通集)的时间复杂度为 $O(|E'|)$ 或(采用逻辑矩阵算法求解强连通集)的时间复杂度为 $O(|V|^3)$, 因此, 无论是采用何种类型算法迭代图胞映射都可以大大降低算法的时间复杂度.

4. 典型算例

考虑 Henon 映射^[20-21]

$$(x, y) \rightarrow (1.4 - x^2 + 0.3y, x). \quad (2)$$

这里 x 的坐标范围为 $[-3, 3]$, y 的坐标范围为

[-3.3].下面我们分别采用三种方法来分析 Henon 映射不变流形的全局空间结构.对于如何利用图胞映射方法有效逼近动力系统的不变流形可以参见文献[19].首先采用传统方法,即未应用细化处理的方法,这时 x, y 的坐标范围都被分为 1000 个长度相同的小区间.然后分别采用复合胞化方案 1,2 进行细化处理.复合方法 1,2 首次都采用相同尺度的胞结构,但对所得的稳定与不稳定流形所含区域细化时,复合方法 2 比方法 1 更精细.表 7 详细地给出了应用上述三种方法所采用的参数,不变流形总测度及

计算时间.图 3—5 给出了采用传统方法和复合方法 1,2 得到的不变流形的全局空间结构,图中 D 表示不稳定的解,SM 表示稳定流形,UM 表示不稳定流形.由表 7 和图 3—5 可知,复合方法 1,2 与传统方法相比既能精细地展示不变流形的全局空间结构,又能显著节省计算时间;而复合方法 2 比复合方法 1 得到的结果更精细(见表 7 中不变流形的总测度),但相对来说较费机时,这可以根据实际中对研究问题的精度要求来选择哪种复合方法.

表 7 采用传统方法和复合方法 1,2 详细结果一览表

胞化方法	传统方法	复合方法 1	复合方法 2
Γ_1	无	初始胞映射算法得到的稳定与不稳定流形所含区域	初始胞映射算法得到的稳定与不稳定流形所含区域
N_1	1000	200	200
N_2	1000	200	200
n_1	无	10	20
n_2	无	10	20
图动力系统中顶点数目	1000001	305816	1111316
图动力系统中边数目	2488083	709808	2449499
稳定与不稳定流形总测度	0.5338	0.2749	0.1602
计算时间/s	44737	3445	12301

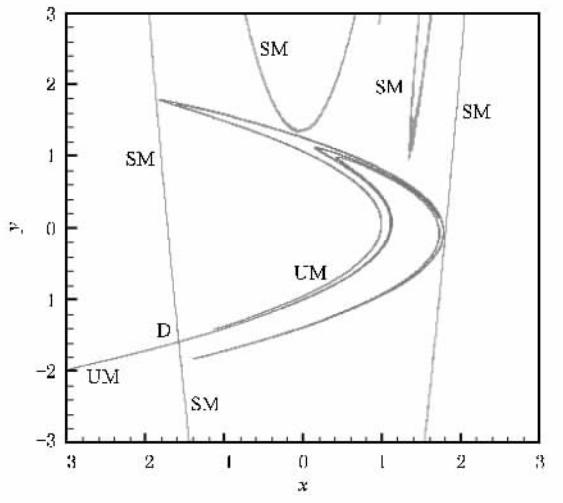


图 3 传统方法得到的不变流形的全局空间结构

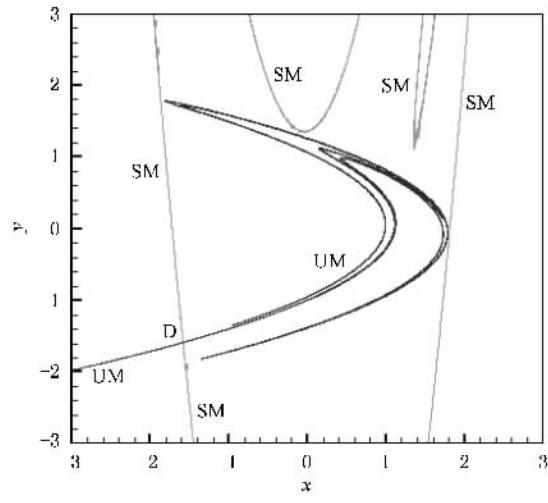


图 4 复合方法 1 得到的不变流形的全局空间结构

5. 结 论

非线性系统含有复杂的动力学特性^[11—23].利用

胞映射方法对这些复杂的动力学特性分析时,空间结构的精细程度和计算机的计算速度是人们普遍关注的两项指标.为了既能充分展示精细的空间结构又能提高计算速度,对状态空间的胞化采用不同的

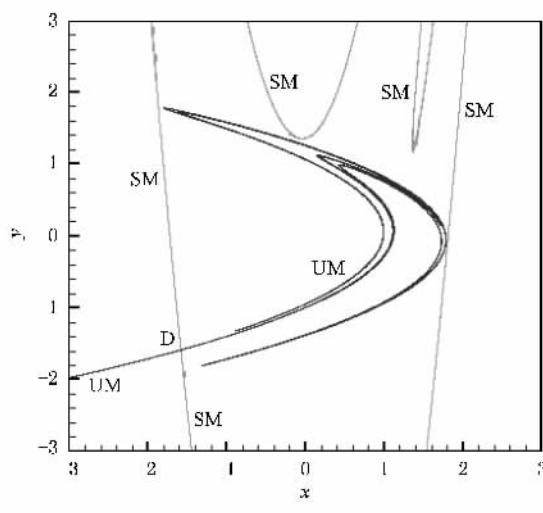


图 5 复合方法 2 得到的不变流形的全局空间结构

尺度就成了人们有效的选择,然而在此过程中却存在较多的技术困难。本文基于复合胞化空间的概念,构建了迭代的图胞映射方法。该方法能够对任意感兴趣的区域进行细化处理,细化过程采用代数运算完成不会额外增加计算机内存且能保持细化前后图动力系统性质不变。为了提高计算速度和便于计算机实施,本文也设计了相应的有效算法。通过对典型例子 Hénon 映射的应用分析,表明该方法是研究非线性系统复杂动力学特性的有效工具。

- [1] Hsu C S 1980 *J. Applied Mechanics* **47** 931
- [2] Hsu C S 1981 *J. Applied Mechanics* **48** 634
- [3] Tongue B H ,Gu K 1988 *J. Sound Vib.* **125** 169
- [4] Jiang J ,Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
- [5] Hsu C S 1995 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **5** 1085
- [6] Hong L ,Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [7] Wen C X ,Yao Y X ,Wen B C 1997 *J. Northeastern University* **18** 119 (in Chinese) [文成秀、姚玉玺、闻邦椿 1997 东北大学学报 **18** 119]
- [8] Ding Q ,Cooper J E ,Leung A Y T 2005 *J. Fluids and Structures* **20** 35
- [9] Zou H L ,Xu J X 2006 *The Second International Conference On Dynamics ,Vibration and Control*
- [10] Hong L ,Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
- [11] Hong L ,Xu J X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2694 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2002 物理学报 **51** 2694]
- [12] Hong L ,Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [13] Xu W ,He Q ,Rong H W ,Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [14] Hsu C S ,Chiu H M 1987 *J. Sound Vib.* **114** 203
- [15] Zhu W H ,Wu Q T 1988 *Communications in Applied Numerical Methods* **4** 541
- [16] Jiang J ,Xu J X 1998 *Nonlinear Dynamics* **15** 103
- [17] Guder R ,Kreuzer E 1999 *Nonlinear Dynamics* **20** 21
- [18] Hong L ,Sun J Q 2006 *Physica D* **213** 181
- [19] He Q ,Xu W ,Li S ,Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 734 (in Chinese) [贺 群、徐 伟、李 爽、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 734]
- [20] Wang B H ,Chen G Y ,Gu G Q 1994 *Chin. Phys.* **3** 653
- [21] Luo X S ,Fang J Q ,Wang L H ,Kong L J et al 1999 *Chin. Phys.* **8** 895
- [22] Ma S J , Xu W , Li W et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese) [马少娟、徐 伟、李 伟等 2005 物理学报 **54** 3508]
- [23] Jin Y F , Xu W , Ma S J et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、马少娟等 2005 物理学报 **54** 3480]

The digraph cell mapping method based on composite cell space^{*}

He Qun Xu Wei[‡] Li Shuang Xiao Yu-Zhu[†]

(Department of Applied Mathematics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China)

(Received 22 November 2007 ; revised manuscript received 8 December 2007)

Abstract

In order to improve the accuracy and efficiency ,an iterative digraph cell mapping method is presented through introducing the notion of composite cell space . This iterative method can refine any interesting region of cell state space . Because the refining process is performed by algebraic operation ,the computer memory does not be increased additionally . Furthermore ,the digraph dynamical properties can be preserved in the refining process . In order to implement it easily ,an effective algorithm is designed . As an example ,the Henon map is taken to demonstrate the validity and efficiency of this method .

Keywords : digraph cell mapping method , iterative algorithm , Henon map

PACC : 0547 , 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10502042).

[†] E-mail : yuzhuxiao@mail.nwpu.edu.cn

[‡] E-mail : weixu@nwpu.edu.cn