

基于积分方程法和奇异值分解的磁性目标磁场延拓技术研究

郭成豹[†] 肖昌汉 刘大明

(海军工程大学电气与信息学院, 武汉 430033)
(2007 年 9 月 18 日收到 2007 年 12 月 3 日收到修改稿)

对磁性目标磁场延拓技术进行了研究, 提出了一种基于积分方程法和奇异值分解的新方法, 应用该方法只需要采用积分方程法对磁性目标的结构进行较为粗略的单元划分, 利用目标下方大平面上的磁场测量值, 得到相应的线性方程组, 采用基于奇异值分解的截断奇异值方法和修正奇异值方法对该线性方程组进行正则化求解, 可实现磁性目标磁场的三维磁场重建、向上或向下延拓。该方法较以前的方法, 提高了磁性目标磁场延拓的精度和可靠性, 并且解决了磁性目标磁场在一定范围内向上延拓的技术难题。

关键词: 磁性目标磁场, 延拓, 积分方程法, 奇异值分解

PACC: 4110, 4110D, 4190

1. 引言

目前, 对复杂磁性目标的磁性变化过程的了解还很不深入, 即使拥有完整的磁性历史信息, 也很难用精确的数学模型去描述这些复杂的物理过程。为了磁性目标磁场的精确建模, 有必要利用磁传感器测量磁性目标周围特定区域的磁场分布, 根据测量数据重建磁性目标的磁源分布, 进而根据重建的磁源得到磁性目标在任意或规定位置处的磁场分布, 实现磁性目标磁场的延拓。磁性目标磁性的重建问题必需两个基本步骤。第一步找出将磁源和磁场测量值联系起来的正演关系。第二步是对所得到的正演关系进行求逆。这种反演计算是非常棘手的, 因为该问题是严重不稳定的, 测量数据中的微小误差都可能对求解结果产生巨大的影响。

本文提出一种基于积分方程法和奇异值分解的磁性目标磁场延拓技术。首先处理复杂磁性目标磁场的正演计算问题, 实际上是写出一个相应的线性方程组, 然后处理磁性目标磁场的反演建模问题, 采用基于奇异值分解(SVD)的正则化技术对所得到的病态的线性方程组进行求解。对一个虚拟的三维薄钢壳物体进行了数值验证实验, 表明了所提出方法

的有效性。

2. 磁性目标磁场的正演问题

以一艘薄钢壳船舶为例, 设其体积为 V , 处于磁化磁场 \mathbf{H}_0 中。整个空间中的磁场是磁化磁场 \mathbf{H}_0 和铁磁材料被磁化产生的磁场 \mathbf{H}_m 的总和, 即

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m.$$

体积 V 内的磁化强度和空气区域的磁感应强度之间的关系为^[1,2]

$$\mathbf{B}(P) = \mu_0(\mathbf{H}_0(P))$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{(\mathbf{M}(Q) \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \mathbf{M}(Q) \right) dV,$$

其中, μ_0 是空气区域的磁导率, P 是空气区域内的一个点, Q 是体积 V 内的积分点, \mathbf{r} 是 PQ 矢径, r 是 \mathbf{r} 的长度。将体积 V 划分为 n 个体积单元。为了简化, 假定每个单元中的磁化强度是均匀的。如果在船舶周围空间中放置 m 个三轴磁传感器, 可以获得一个矢量线性方程, 将传感器 j 的磁场测量值和每个单元 i 的未知磁化强度分量 \mathbf{M}_i 联系起来(见图 1),

$$\mathbf{B}_j^{\text{mes}} = \mu_0(\mathbf{H}_{0j})$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_i^n \iiint_{V_i} \left(\frac{(\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \mathbf{M}_i \right) dV_i.$$

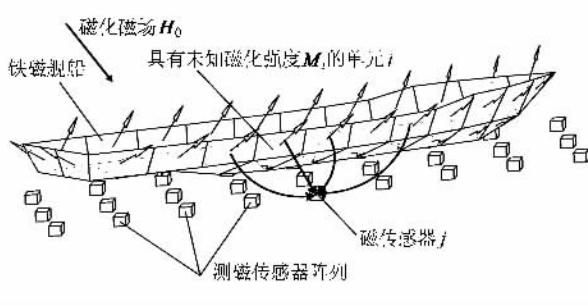


图 1 薄钢壳船舶的单元划分、磁传感器和磁化磁场

考虑所有的传感器,可以写出一个线性方程组,
 $AM = b$,

其中 A 是将磁源和测量值联系起来的线性观测矩阵, M 是未知磁化强度向量, b 是简化的磁场测量值向量(从测量磁场中减去磁化磁场). A 是一个 $3m \times 3n$ 的矩阵, M 是一个 $3n \times 1$ 的向量(每个单元三个未知量), b 是一个 $3m \times 1$ 的向量(每个传感器三个分量的测量值).

作为求逆问题所必需的第一个步骤,我们已经写出了正演问题.下一步,求解反演问题,找出能够拟合到磁场测量值上的最佳的 M 分布.

3. 病态问题的正则化处理

磁性目标磁场反演建模中,磁场测量值数目通常大于待求未知参数数目,但是所要研究的是病态问题,磁场测量值的微小扰动会导致解的很大变化.

正则化技术是处理病态问题的有效方法,在很多领域被广泛应用^[3-9],特别是截断奇异值法(truncated singular value decomposition, TSVD).学者们对基于 SVD 的病态问题处理方法进行了大量研究,在位场延拓、波场反演、重磁解释、层析成像、脑电成像等方面都取得了一些进展.这些研究得出的结论:1)对于呈阶梯型分布的奇异值,一般采用 TSVD 法进行修正;2)对于呈均匀下降型分布的奇异值,是采用 TSVD 法还是采用修正奇异值法(modified singular value decomposition, MSVD),还存在较大分歧.

磁性目标磁场反演建模中,所碰到的是均匀下降型奇异值,因此要同时考虑 TSVD 法和 MSVD 方法.充分考虑磁性目标磁场建模中病态问题的特点(例如,矩阵 A 不精确、条件数较大等),分别采用

TSVD 法和文献 4 提出的将全部奇异值分成两部分分别修正的技术方案(MSVD 方法),对磁性目标磁场反演建模中的病态问题进行解算.通过数值算例检验了这两种技术方案的有效性和适用性.

3.1. SVD 法解病态方程的算法及原理

为了求解线性方程组

$$AX = b, \quad (1)$$

将观测矩阵 A 进行奇异值分解得

$$A = U D^{-1} V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T,$$

式中, $U_{m \times m} = (u_1 \dots u_m)$, $V_{n \times n} = (v_1 \dots v_n)$ 为正交矩阵; $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ 为 A 的奇异值矩阵, 降序排列.

根据 D 中的奇异值分布特性,可以将病态问题分成两类:具有均匀下降型奇异值或阶梯型奇异值,如图 2 所示.

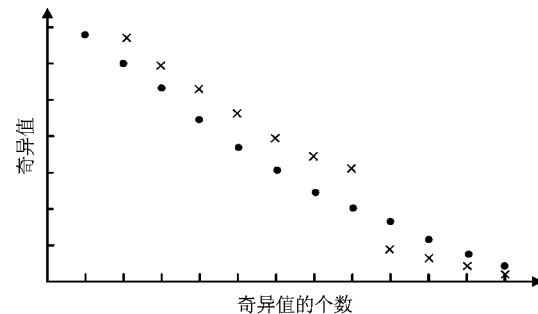


图 2 奇异值的分类示意图(●表示均匀下降型奇异值;×表示阶梯型奇异值)

(1) 式的最小二乘解可以表示为

$$X_{\text{LS}} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i. \quad (2)$$

当观测值 b 表示为真值与噪声的和时,有 $b = b_t + e$, 可得(2)式的分解式为

$$X_{\text{LS}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i^T b_t}{\sigma_i} + \frac{u_i^T e}{\sigma_i} \right) v_i. \quad (3)$$

分析(3)式可知,噪声对真解的污染主要反映在右端第二项,特别当奇异值 σ_i 异常小时,该污染项的值很大,甚至掩盖了反映真解的右端第一项,这样得到的解是没有意义的.

3.2. TSVD 法

TSVD 法把容易造成不稳定的较小奇异值直接截去,对(2)式和(3)式进行修改^[10],

$$X_k = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\sigma_i} v_i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{u_i^T b}{\sigma_i} + \frac{u_i^T e}{\sigma_i} \right) v_i, \quad (4)$$

适当去除 $(n - k)$ 个大污染项, 恢复了一些解的主要特性, 同时也丧失了一些解的精确性. 整数 k 是截断参数, 同时也是正则化参数.

比较(2)和(4)式, 可以看出, 当 k 选取较大时, X_k 能够较好地拟合数据, 但放松了对解的范数最小的限制 (X_k 可能会很大); 反之, 若 k 选取较小时, 可以保证解的范数较小, 但牺牲数据的拟合程度. 因此, 如何合理地选取 k , 使这两个量达到最佳的平衡, 是 TSVD 法的关键. 当奇异值呈阶梯型分布时, TSVD 法一般情况下是比较适用的, 因为这时确定成分和不可靠部分差别很大, 截掉不确定部分对解估计分辨率的影响不大. 当奇异值呈均匀下降型分布时, 这时模型参数的确定成分和不可靠成分的界限不好确定, k 的确定可能存在困难. 在这种情况下, 如何处理奇异值是一个难点.

3.3. MSVD 法

杨文采提出了一种奇异值修正方案^[4], 可以称其为修正奇异值法 (modified singular value decomposition, MSVD). 具体做法: 设 t 为截断奇异值法保留的最小奇异值的门限, q 为对应小于 t 的奇异值个数, 用以下公式进行奇异值修正:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{t^2}{\sigma_k}, & k \geq q, \\ \lambda_k &= \sigma_k + \frac{k}{q} \left(\frac{t^2}{\sigma_{q+1}} - \sigma_q \right), & k < q. \end{aligned}$$

相应的修改后的奇异值为

$$D_\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

解估计的表达式为

$$X_k = V D_\lambda^{-1} U^T b.$$

通过适当降低分辨率, 减小了解的方差, 解估计的质量可能会提高.

3.4. 离散 Picard 条件

离散 Picard 条件^[11]与不适定问题紧密相连, 若(2)式中的傅里叶系数 $u_i^T b$ 在平均意义上比矩阵 A 的奇异值 σ_i 趋于零的速度快, 则该问题满足离散 Picard 条件, 可以进行正则化求解; 否则, 一般不可能通过正则化方法得到该问题的合理解.

Picard 图是分析不适定性的直观方法. 图 3 给出了同一个模型在不同数据项情况下的 Picard 图,

图 3(b)是一个污染较轻情况下的 Picard 图, 开始时, 傅里叶系数 $u_i^T b$ 的下降速度比奇异值快, 但下降一段过程后, 其下降速度不及奇异值, 对这类问题, 可以利用正则化方法求解. 而图 3(a)是数据项受噪声严重污染的情况, 其系数 $u_i^T b$ 的下降速度从一开始就不比奇异值 σ_i 快, 这类问题的数据几乎完全被噪声所淹没, 即使采用正则化处理, 也很难求得较好的近似解.

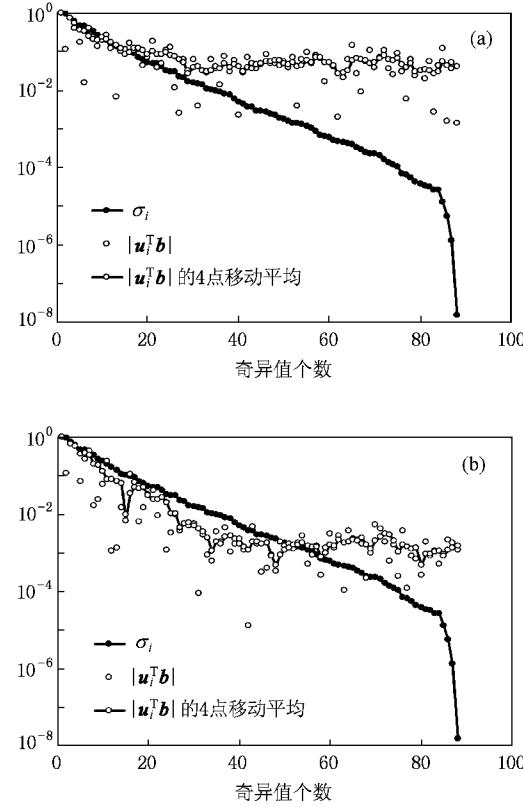


图 3 受噪声污染严重和较轻情形下的 Picard 图 (a) 污染严重; (b) 污染较轻

3.5. 正则化参数的选取

正则化参数 k 的选取应使得残差的范数 $\| b - AX_k \|_2$ 与正则解的范数 $\| X_k \|_2$ 之间达到某种平衡. 在磁性目标磁场反演建模中, 通常所拥有的先验信息较少, 尤其是无法预知测量数据中的噪声情况, 采用 L 曲线法确定正则化参数具有优势. 如图 4 所示, L 曲线法的关键是定位曲线上曲率最大的那个点, 选择所对应的 k 作为截断参数. 从图 4 可以明显看出, 最优截断点明显是 $k = 7$.

在磁性目标磁场反演建模中, 所得到的实际 L 曲线(见图 5(a))并不像图 4 那么理想, 而是很多点

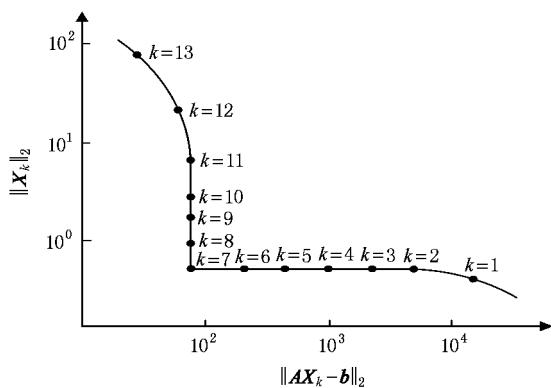


图 4 L 曲线示意图(最优截断点明显为 $k=7$)

集中在 L 形状的拐角位置(见图 5(b)),最大曲率点难以确定。我们采用了另一种策略,作出一种辅助曲线,纵轴为 $\log(\|b - AX_k\|_2) + \log(\|X_k\|_2)$,横轴为奇异值序号(如图 6(a)所示)。在 L 曲线拐角范围内的 k 值中,可以快速容易地找出范数 $\|b - AX_k\|_2$ 与正则解的范数 $\|X_k\|_2$ 之和最小的 k 值,作为最优截断点(如图 6(b)所示)。采用上述方法进行了大量仿真计算,通常在拐角范围内可很快找到最佳截断点 k ,并且所得到的正则化结果符合磁性目标磁场反演建模的要求。

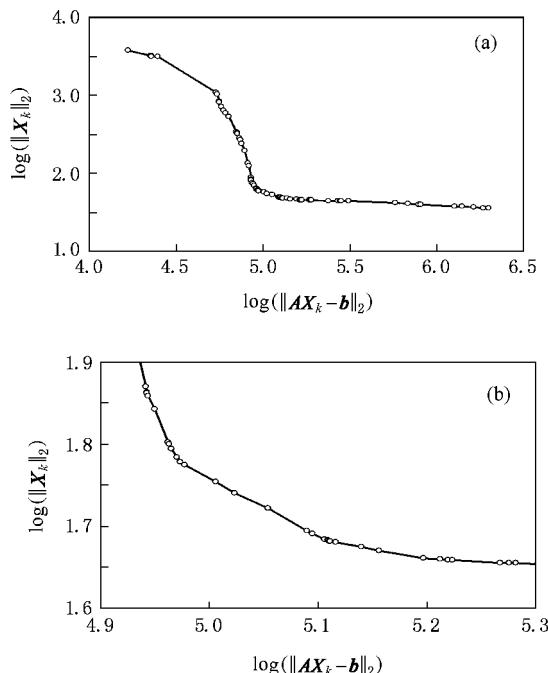


图 5 磁性目标磁场反演建模中的实际 L 曲线(难以找出最优截断点) (a)L 曲线的全部图形 ;(b)L 曲线的局部图形

采用上述正则化参数选取方法,TSVD 法和

MSVD 法在缺乏先验信息的情况下能得到较好的解。这非常符合磁性目标磁场反演建模工作的要求,具有一定的优势。在后续的船舶磁场反演建模中,分别采用 TSVD 法和 MSVD 法进行反演建模,并对这两种正则化方法进行对比。

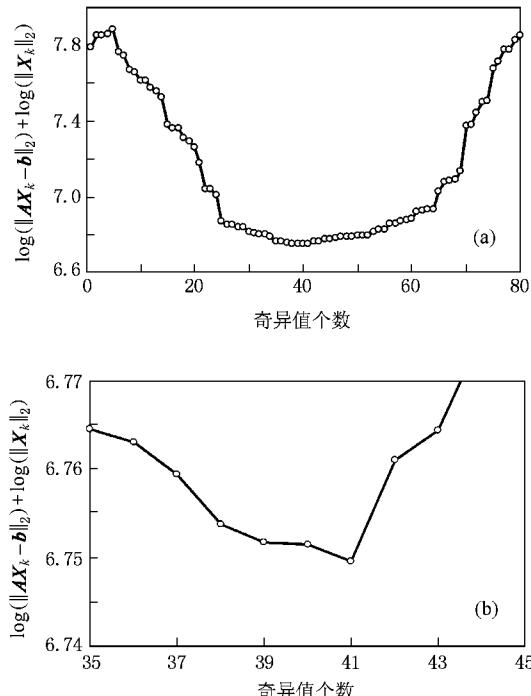


图 6 磁性目标磁场反演建模中的辅助曲线(最优截断点明显为 $k=41$) (a)辅助曲线的全部图形 ;(b)辅助曲线的局部图形

4. 磁性目标磁场反演仿真实验

4.1. 磁性目标的磁化特点

薄钢壳磁性目标的大部分结构可以看作是由厚度和形状不一的钢板构成的。钢板这种铁磁材料的基本特性是它们吸引磁通的能力,薄钢板的厚度相对于它的其他尺度(长度、宽度)的比率是相当小的,并且材料的磁导率比空气大得多,那么薄钢板成为磁力线通道的现象会更加明显。在这种情况下,钢板内的磁场可以被认为是与钢板表面方向相切的。磁场的切向分量在钢板的横截面上是恒定的,磁场 H 全部是切向分量的^[12-14]。这种近似可以应用于船舶壳体的情形^[15-16],如图 7 所示,钢板结构成为了磁场的通道。

如图 8 所示,磁化强度分布 M 在边界 S 上产生的是均匀的磁荷分布,这个表面磁荷分布的表达式

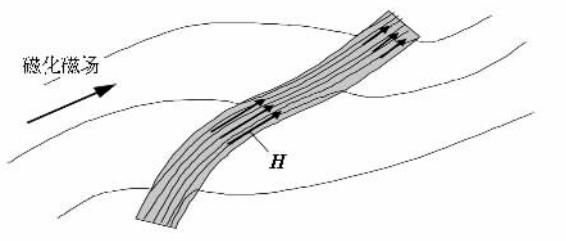


图 7 钢板内的磁场和磁力线分布

为 $M \cdot n$ 。这不但在空气中处处成立,而且在材料内部也成立,唯一的条件是磁化强度的散度严格为零。这个表达式适用于均匀磁化体积。

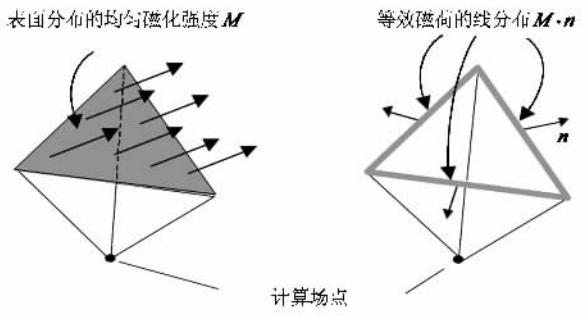


图 8 均匀磁化强度与线磁荷分布的等效关系

对于一个面积为 S 和厚度为 e 的薄钢板,可以认为在切线方向存在恒定的磁化强度。磁场的计算可以采用两种不同的方式

$$\mathbf{H}_m = -\frac{e}{4\pi} \iint_S \nabla_S \times \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dS,$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{e}{4\pi} \int_L \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL,$$

其中, \mathbf{n} 是这个表面的切面边界的法向量。均匀磁化强度的表面分布严格等效于线磁荷分布。

4.2. 仿真实验设置

为了模拟船舶磁场分布情况,虚拟了一艘船舶的主船体结构(见图9),长度为 L ,主船体宽度为 B ,划分为44个薄板单元。

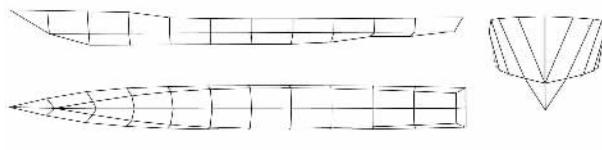


图 9 模拟船舶的单元划分

为收集到足够的船舶磁场信息,设置了 61×9

= 549 个单分量磁传感器,均匀分布在船舶下方的大平面上(见图10),测量船舶磁场的垂向分量。船舶中心点位于测磁平面中心的正上方,测磁平面的展布范围为横向 $[-B, +B]$ 纵向 $[-L, L]$,磁场测量点横向和纵向间隔都为 $L/30$ 。所形成的线性方程组具有 $44 \times 2 = 88$ 个未知数(各个单元的磁化强度分量) 549 个方程。

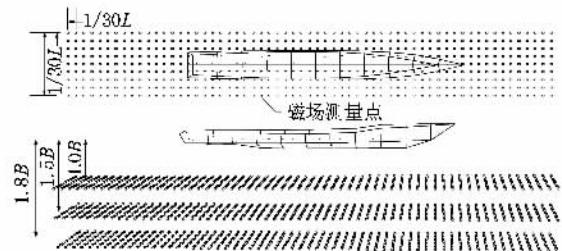


图 10 模拟船舶的磁场测量点布置

也可以采用不同的船舶单元划分和磁场测量点布置,但有两点必须得到保障:1)磁传感器的分布范围涵盖整个船舶下方的较大平面,可以收集到船舶结构各个单元在不同方位上产生的磁场分量;2)磁传感器的分量数与个数的乘积大于未知量的个数,保证船舶磁场反演建模方程组是一个超定方程组。

4.3. 仿真磁场数据的产生

船舶磁性主要包括感应磁性和永久磁性两部分,能够测量得到的是这两部分磁性所产生的磁场与背景地磁场的总和,而船舶磁场为磁场测量值减去背景地磁场。采取下述设置产生船舶磁场数据:

1) 取三个测磁深度: $1.0B$, $1.5B$, $1.8B$ 。

2) 感应磁场部分考虑为,模拟船舶在纵向 $40\,000\text{ nT}$ 、垂向 $-30\,000\text{ nT}$ 、横向 $20\,000\text{ nT}$ 的均匀外磁场作用下所产生的感应磁场。

3) 永久磁场部分考虑为,取感应磁场计算中的平均感应磁化强度分量的 30% 为幅值 M_p ,各单元的永久磁化强度分量取为 $[-M_p, +M_p]$ 范围内的随机数。

4) 取 -50 nT , $+50\text{ nT}$ 范围内的随机数作为测磁噪声。

5) 船舶位置纵向偏离 $L/150$,横向偏离 $L/150$ 。

4.4. 数据分析参数的定义

为分析数据,定义下述两个变量:

1) 相对误差(relative errors, RE)

$$RE = \frac{\| \mathbf{b}_{\text{reg}} - \mathbf{b}_t \|_2}{\| \mathbf{b}_t \|_2}$$

其中, \mathbf{b}_{reg} 表示正则化解得到的磁场值, \mathbf{b}_t 表示精确磁场值。RE 实质上表示正则化解的精确程度。这一量通常是不可知的,因为在实际问题中,无法得到 \mathbf{b}_t 。但是为了验证仿真结果与真实解的逼近程度,我们定义了此量。

2) 相对残差(relative residual errors, RRE)

$$RRE = \frac{\| \mathbf{AX}_{\text{reg}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{b} \|_2}$$

表示正则化解对数据的拟合程度。实际问题中,只能根据相对残差来判断问题解对数据的拟合程度。

4.5. TSVD 法和 MSVD 法的数值仿真验证

按照 4.3 节的设置,可以得到一种具有典型意义的模拟船舶单元磁化强度分布,见图 11,图中的箭头的方向和长度分别表示相应结构单元磁化强度的方向和幅值。

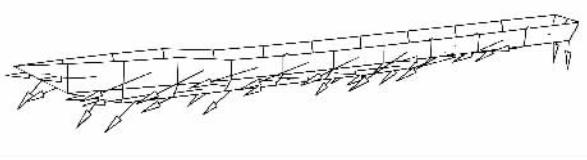


图 11 模拟船舶的磁化强度分布

上述磁化强度分布可以产生 3 个测磁深度(包括 $1.0 B$, $1.5 B$ 和 $1.8 B$)的船舶磁场垂向分量数据。进行船舶磁场反演建模,将上述船舶磁场延拓到三个测量平面上,计算结果见表 1。

表 1 仿真建模结果

测磁 深度/ B	计算 方法	截断点 k	相对 残差	相对误差/ B		
				1.0	1.5	1.8
1.0	TSVD	53	0.045	0.086	0.056	0.047
	MSVD	44	0.045	0.086	0.058	0.049
1.5	TSVD	29	0.075	0.094	0.063	0.057
	MSVD	23	0.079	0.093	0.068	0.065
1.8	TSVD	19	0.105	0.205	0.084	0.064
	MSVD	17	0.102	0.118	0.070	0.066

4.6. 仿真实验结论

对表 1 所示的数据进行分析,可以知道:

1) 根据 $1.0 B$ 和 $1.5 B$ 的磁场数据, TSVD 法和 MSVD 法都可以较为准确地延拓到三个深度上, 相对残差最大值为 0.079, 相对误差最大值为 0.094。TSVD 法和 MSVD 法计算精度非常接近。

2) 根据 $1.8 B$ 的磁场数据, TSVD 法和 MSVD 法向 $1.5 B$ 深度延拓得到的磁场值较为准确, 两种方法计算精度相差不大。但是向 $1.0 B$ 深度延拓时, TSVD 法得到的磁场值误差较大, 其相对误差最大值为 0.205。MSVD 法误差相对小得多, 其相对误差最大值为 0.118, 二者在这种情况下的计算精度相差较大, 几乎达到了 2 倍。

5. 结 论

所进行的模拟实验表明, 基于积分方程法和奇异值分解的磁性目标磁场反演建模技术是有效的, 计算精度较高, 能够用于磁性目标磁场延拓工作。

-
- [1] Chadebec O, Coulomb J 2004 *COMPEL* **23** 518
- [2] Igarashi H, Honma T, Kost A 2000 *IEEE Trans. Magn.* **36** 1168
- [3] Li P, Wang C Y, Xu H Z, Xiong X 2001 *Progress in Natural Science* **11** 891 (in Chinese) [李 平、王椿镛、许厚泽、熊 熊 2001 自然科学进展 **11** 891]
- [4] Yang W C 1989 *Theory and Method of Geophysical Inversion* (in Chinese) [杨文采 1997 地球物理反演的理论和方法 (北京: 地质出版社)]
- [5] Li W B, Chen J, Bi C X, Chen X Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1264 (in Chinese) [李卫兵、陈 剑、毕传兴、陈心昭 2006 物理学报 **55** 1264]
- [6] Zhu H Y, Li J, Luo B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2393 (in Chinese) [朱红毅、李 军、罗 宾 2002 物理学报 **51** 2393]
- [7] Bi C X, Chen X Z, Chen J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4268 (in Chinese) [毕传兴、陈心昭、陈 剑 2004 物理学报 **53** 4268]
- [8] Huang Q X, Liu D, Wang F, Yan J H, Chi Y, Cen K F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6742 (in Chinese) [黄群星、刘 冬、王 飞、严 建华、池 勇、岑可法 2007 物理学报 **56** 6742]
- [9] Szinger J J 1996 *Ph. D. Thesis* (New Haven: Yale University)
- [10] Hansen P C 1990 *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **11** 503
- [11] Hansen P C 1990 *BIT* **30** 658
- [12] Parker S 1988 *McGraw-Hill Encyclopedia of the Geological Sciences* (New York: McGraw-Hill)
- [13] Eskola L, Jokinen T, Soininen H, Tervo T 1993 *Journal of Applied Geophysics* **30** 229

- [14] Eskola L , Puranen R , Soiminen H 1999 *Geophysical Prospecting* **47** 593
- [15] Rioux-Damidau F , Bandelier B , Penven P 1995 *IEEE Trans. Magn.* **31** 3491
- [16] Chadebec O , Coulomb J , Leconte V , Bongiraud J , Cauffet G 2000 *IEEE Trans. Magn.* **36** 667

Research on the continuations of magnetic field of magnetic object based on integral equation method and singular value decomposition

Guo Cheng-Bao[†] Xiao Chang-Han Liu Da-Ming

(School of Electrical and Information Engineering , Naval University of Engineering , Wuhan 430033 , China)

(Received 18 September 2007 ; revised manuscript received 3 December 2007)

Abstract

The continuation of magnetic field of magnetic object is studied , and a novel method based on integral equation method and singular value decomposition is presented. In the implementation of the new method , the magnetic object 's structure only needs to be coarsely partitioned as some elements by integral equation method , thus a linear system of equations can be obtained with the magnetic field measurements at a large plane below the magnetic object. The system of equations can be solved regularly by the truncated singular value decomposition technique and the modified singular value decomposition technique based on singular value decomposition , then the 3D magnetic fields reconstruction the upward and downward continuation of the magnetic object 's magnetic field are realized. The precision and reliability of the new method are higher than the conventional ones ; especially , the difficulty of the upward continuation in certain ranges is surmounted.

Keywords : magnetic fields of magnetic object , continuation , integral equation method , singular value decomposition

PACC : 4110 , 4110D , 4190

[†] E-mail :guochengbao@gmail.com